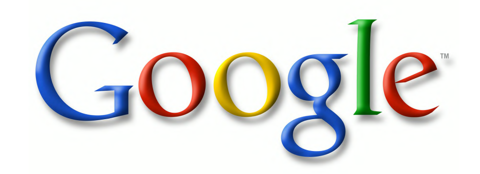
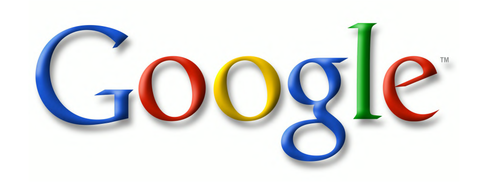








1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



TRAITÉ ANALYTIQUE

DES SECTIONS CONIQUES,

FLUXIONS ET FLUENTES.

AVEC UN ESSAI SUR LES QUADRATURES, ET UN TRAITÉ DU MOUVEMENT.

PAR M. MULLER, Professeur de Mathématiques à l'Ecole Royale de Volwich, traduit de l'Anglois par l'Auteur.

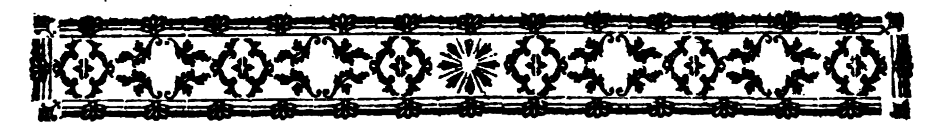


A PARIS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



PRÉFACE.

L'EXCELLENCE des Mathématiques en général, & de leurs parties en particulier, que l'on traite dans cet Ouvrage, a été si bien établie par plusieurs Auteurs célebres, qu'il seroit fort inutile d'en relever les précieux avantages. Aussi ne se propose-t'on dans cette Préface que de donner les raisons qui ont engagé à écrire sur des sujets déja épuisés en apparence par plusieurs habiles Mathématiciens.

Mon premier dessein, lorsque je composai cet Ouvrage, étoit d'éclaircir les principes de Mathématiques sur la Philosophie Naturelle du Chevalier Newton, & je me croyois bien récompensé de mon travail, si je pouvois y réussir. Comme il y a un grand nombre de propriétés des Sections Coniques, qui sont nécessaires pour bien entendre ces principes, dont la plus grande partie n'a été développée par aucun Auteur, du moins que je connoisse, j'ai été obligé de rechercher ces propriétés ; cela n'a pu s'exécuter qu'en mettant sous les yeux toute la théorie des Sections Coniques. Car ces Sections ayant la plûpart les mêmes propriétés, qui ne different presque que par la position de quelques lignes, on ne peut les traiter séparément, sans perdre cette liaison qui se trouve entr'elles. Autrement les démonstrations sont non seulement multipliées en vain, mais encore le sujet en devient en même temps plus obscur & très-embarrassant. Voilà pourquoi les plus sçavans Géometres les ont considérées toutes trois ensemble, & alors la même démonstration sert pour toutes, excepté dans quelques cas : c'est aussi ce que je fais dans la premiere partie de cet Ouvrage, où je donne des démonstrations particulieres de la parabole, afin d'éviter le mot infini qui pourroit embarrasser les commençans. Dans mes planches, les mêmes lignes sont marquées par les mêmes lettres, & lorsque je me sers de l'Algebre, elles sont aussi marquées par le mêmes lettres, de sorte qu'il ne faut retenir que cinq ou six lettres pour

lire cette premiere partie. Au reste, je ne fais usage de l'Algebre que dans des cas où j'ai cru rendre les démonstrations plus courtes & plus faciles, & j'ai préféré la synthese à l'analyse, lorsque cela a pu se faire.

Quoique le Traité des Sections Coniques du Marquis de l'Hôpital soit un ouvrage excellent dans son genre, cependant il y a bien des propriétés de ces courbes fort remarquables qu'il n'a pas données, & les autres étant traitées séparément & en differens endroits, l'étude en devient plus ennuyeuse & plus pénible qu'elle le seroit, si elles étoient rassemblées comme elles devroient l'être. Outre cela, ses définitions ne sont pas absolument exactes; car il en donne une différente de la même chose dans chaque section. Par exemple, dans la parabole il dit. *Toutes lignes menées des points de la parabole parallélement à l'axe, sont les diametres.* Et dans l'ellipse, *toutes lignes droites qui passent par le centre, & qui sont terminées de part & d'autre par l'ellipse, sont appellées diametres.* Il fait la même chose à l'égard du foyer & de quelques autres lignes; au lieu de définir les diametres & les foyers par quelque propriété générale dans quelques courbes où ces lignes & ces points puissent se trouver,

Dans mon second Livre, je donne les premiers principes de la méthode des Fluxions, d'une maniere tout-à-fait différente de toutes celles qui ont été employées jusques ici : car rien n'est plus répréhensible que cette méthode de faire entrer des quantités infiniment petites dans ce calcul : il en a résulté deja une si grande obscurité dans le raisonnement, que bien des commençans se sont rebutés & persuadés qu'il n'étoit pas possible d'en déduire des principes certains, comme on le prétendoit. En effet, lorsqu'il faut trouver la fluxion d'une quantité variable élevée à une puissance quelconque, la manière ordinaire est d'ajouter cette quantité à une autre infiniment petite, & d'élever la somme à la puissance donnée; & après avoir ôté le premier terme, on divise le reste par cette petite quantité : il faut donc rejetter tous les termes, excepté le second, qui doit exprimer la fluxion cherchée; & on ne conçoit pas que la somme infinie des termes qu'on rejette soit si petite à l'égard du seul terme que l'on garde, qu'on les puisse négliger sans aucune erreur. L'imagination se révolte : on perd l'idée de l'exactitude géométrique, sans concevoir la moindre idée de justesse des principes qu'on tâche d'établir. Pour rendre donc ces principes plus à portée des

commençans, je considere les courbes décrites par le mouvement d'un point, poussé par deux puissances dans des directions différentes, l'une parallele aux abscisses, & l'autre parallele aux appliquées; & je démontre que, si ce point continuoit avec une vîtesse uniforme & égale à celle qu'il a dans un point de la courbe quelconque, il décriroit une ligne droite, qui seroit tangente à la courbe en ce point: delà on peut conclure que la direction du point en mouvement est dans la tangente de la courbe en ce point. Par conséquent les directions des deux puissances, & celle du point étant connues dans un point quelconque, la raison des vîtesses de ces puissances sera aussi connue. Or la vîtesse dans la direction des abscisses étant à la vîtesse dans la direction des appliquées, comme la soutangente est à l'appliquée correspondante, le rapport de ces vîtesses étant donné, la nature de la courbe peut être trouvée, ou la nature de la courbe étant donnée, la relation entre ces vîtesses peut être trouvée.

C'est de ce principe que se déduit la maniere de trouver les fluxions des quantités variables, sans rejetter aucune chose; & je donne ensuite les regles ordinaires, pour trouver les plus grandes & les moindres des quantités, les rayons des développées & les caustiques par réfléxion & par réfraction : en ne se servant que des lignes finies pour exprimer la relation entre les fluxions: j'ai eu grand soin surtout de distinguer, lorsqu'on cherche les plus grands & les moindres, la quantité que l'on trouve, si c'est un plus grand en effet ou non; car comme la même regle donne l'une & l'autre, & souvent plusieurs ensemble, il est absolument nécessaire de sçavoir si l'on a trouvé ce que l'on cherche, & lorsqu'il y en a plusieurs, lequel doit être pris par préférence; ce que personne que je sçache n'a eu soin de faire. Comme le sujet de ce second Livre a été traité par le Marquis de l'Hôpital, & d'autres Ecrivains, je ne pouvois éviter de répéter une partie de ce qu'il a dit dans ses *Infinimens Petits*, surtout ce qui regarde les caustiques: je dirai plus, je conviens que j'ai pris de lui ce que je ne pouvois pas mieux traiter.

Je parle dans le troisieme Livre des Fluentes: d'abord je commence par poser des regles sur ce qu'il y a de plus aisé, & après avoir donné quelques exemples, afin de les mieux comprendre, je donne ensuite une formule générale des fluentes qui peuvent être exprimées en un nombre fini de termes, ou de celles qui dépendent de la quadrature des Sections Coniques : cela m'a

obligé de faire six Tables contenant les fluentes des cas particuliers de la formule générale, absolument générale à bien des égards ; j'ai encore eu soin de donner plusieurs exemples pour rendre facile & aisée l'usage de ces Tables, d'autant plus qu'elles dépendent des principes de M. Cotes, qui ne sont pas encore si bien connus qu'ils méritent de l'être, principalement en France. Je donne ensuite les méthodes de trouver les espaces terminés par des courbes & des lignes droites, les surfaces & les solides décrits par la révolution des courbes autour d'un axe ; & pour ne laisser rien à deviner aux commençans, je joins à chaque solution des exemples numériques : car il arrive bien souvent que l'on croit entendre les regles ; cependant quand on veut sçavoir les valeurs en nombres, on est surpris de ce qu'on ignore comment il faut s'y prendre. Ainsi un Auteur ne sçauroit prendre trop de précaution pour rendre les regles générales les plus familieres qu'il est possible. Enfin il est question dans ce troisieme Livre, de la maniere de déterminer les centres de gravité, d'oscillation & de percussion, avec un grand nombre d'exemples sur chacun : on trouvera dans la cinquieme section un grand nombre de problêmes Physico-Mathématiques, la plûpart nouveaux, & qui ont pour objet l'Architecture ou le Génie ; ce qui finit le Livre tel qu'il a été imprimé en Anglois. J'ai ajouté à cette traduction deux nouveaux Traités, l'un sur la Quadrature des Courbes, & l'autre sur les loix du Mouvement ; & comme ils n'ont pas encore été publiés, & qu'ils contiennent des choses très-intéressante, je vais en donner un précis.

Monsieur Cotes, dans son excellent Traité *De Harmoniâ mensurarum*, a donné une nouvelle maniere de trouver les fluentes des fluxions qui se peuvent réduire à la quadrature des Sections Coniques, par le moyen de la division de la circonférence du cercle en un certain nombre de parties égales ; & comme il a omis la démonstration, M. de Moivre en a publié une dans son Traité de *Miscellanea Analytica ;* mais il s'est servi d'une méthode particuliere qui n'étoit point assez générale, & rendoit les démonstrations des cas particuliers fort longues & ennuyeuses. Après M. de Moivre, M. Klinkenstiern, sçavant Suédois, donna sans démonstration, dans les *Transactions Philosophiques*, la fluente d'une fraction dont le dénominateur est un trinome, & l'exposant de l'inconnue un nombre entier quelconque. Cette maniere de trouver les fluentes est fort curieuse ; c'est ce qui m'a

engagé à la développer dans cet Ouvrage, où j'ai tâché de rendre les principes aussi clairs & aisés que le sujet pouvoit le permettre : à cette fin je fais voir comment la partie des fluentes qui dépend de la quadrature des Sections Coniques, pouvoit être réduite en pratique par le moyen des Tables de logarithmes, & des sinus & tangentes, & je n'ai rien négligé pour rendre cette méthode très-facile.

Le Traité du Mouvement est divisé en deux parties. La premiere a pour objet celui qui se fait dans un milieu sans résistance. Je donne d'abord quelques théorêmes sur les principes du mouvement en général ; je joins à cela un problême général sur le mouvement d'un corps qui est attiré ou poussé vers un point fixe, duquel on peut déduire tout ce qu'on peut dire sur les forces centripetes & centrifuges ; & dans l'application je démontre le systême du Chevalier Newton ; sçavoir, que les orbes des Planetes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ; que les aires décrites par le rayon tiré du point fixe au centre du corps, sont comme les tems écoulés ; & que les quarrés des tems périodiques sont comme les cubes des distances moyennes. Je fais ensuite l'application de ces regles pour trouver les résistances des Planetes au Soleil, exprimées en demi-diametres de la terre. Je me suis servi pour cela des observations Astronomiques les plus récentes & les plus approuvées, suivant la maniere de trouver les diametres des Planetes, par le moyen de leurs diametres apparens ; leurs solidités & densités, comparés à celles de la terre ; & je trouve que le Soleil est presqu'un million de fois plus grand que la terre, en supposant que sa parallaxe est de dix secondes & demie, comme les meilleurs observations la donnent. Je finis enfin cette premiere partie par la recherche de la figure de la terre. Comme presque tous ceux qui l'ont traitée ne s'accordent point sur le rapport entre l'axe & l'équateur, nonobstant toutes les observations sur la longueur du pendule à secondes, dans différentes latitudes, & les mesures d'un degré de méridien, que les Mathématiciens François ont faites derniérement au Nord & sous l'Equateur, il est assez surprenant que ces Messieurs, qui ont été employés dans ces mesures, different tant dans la détermination de ce rapport. M. Clairaut (*) voulant suivre

(*) Voyez dans cet Ouvrage les raisons sur lesquelles M. *Muller* se fonde en attaquant M. *Clairaut*, & la réponse de cet Auteur, page 391 & suiv. Comme il prétend que M. *Muller* traite cavaliérement une matiere qu'il lui reproche de ne

la méthode de Maclaurin & de Simpson, entre dans des calculs très-longs & très-pénibles, & cela afin de trouver le même rapport, sans avoir peut-être assez examiné si ses principes s'accordent avec les différentes mesures d'un degré de méridien, faites en France & ailleurs. Car s'il eût fait attention que toute hypothese, quelque spécieuse qu'elle puisse être, ne sçauroit être vraie, si elle ne s'accorde pas avec l'expérience, il n'auroit pas pris tant de peine à éclaircir & à suivre un calcul aussi ennuyeux que celui des deux Auteurs cités, Maclaurin & Simpson, qui établissent un rapport qui ne s'accorde pas avec leurs propres principes, puisque Simpson donne 231 à 230, pour ce rapport, au lieu de 232 à 231, qui est le rapport le plus proche de ses propres nombres : mais si l'on extrait la racine quarrée de son expression à trois décimales seulement, on trouvera ce rapport de 353 à 352, lequel est bien différent du sien, quoiqu'il soit déduit de son propre calcul ; ce qui fait voir que M. Clairaut n'avoit aucune raison valable de suivre une méthode si incorrecte. Il y a plus, c'est qu'après avoir donné une équation qui renferme ce rapport & la force centrifuge sous l'équateur, M. Clairaut suppose que la force centrifuge à l'équateur est la 289me partie de la force de la gravité, pour avoir le rapport entre l'axe & l'équateur ; & comme ce rapport ne s'accorde pas avec celui trouvé par les Auteurs Anglois, il suppose leur rapport comme véritable, & cherche celui de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, par un grand détour de calcul & de raisonnement non seulement inutile, puisqu'il l'auroit pu trouver par la même équation, mais encore fort douteux. En effet, il suppose le degré de méridien sous l'équateur de 57438 toises, ce qui est 500 toises plus que celui qu'on a trouvé par la mesure, à moins qu'il ne veuille que ses Confreres se soient trompés d'autant ; ce qui est impossible, comme on le fait voir dans ce Traité.

M. Bouguer, après avoir donné un long détail de ses observations, cherche dans toutes les hypotheses possibles, celle qu'il croit pouvoir servir à trouver la figure de la terre, c'est-à-dire, qu'il cherche quel rapport les arcs, ou leurs sinus, ou leurs puissances, doivent avoir pour répondre aux mesures actuelles ; & il

point entendre, on ne sera point étonné qu'il ait trouvé long & ennuyeux son calcul dans une démonstration qui est pénible par la nature de la question. Quant à l'obscurité, il faut au moins avouer qu'il n'y en a pas dans la maniere dont cet Académicien s'exprime sur les argumens de son adversaire.

s'arrête

s'arrête à la supposition que c'est celui du quarré du sinus de la latitude : supposition d'autant plus absurde, qu'en comparant la longueur du Pendule à secondes, qu'il assûre avoir mesuré fort exactement, avec les longueurs du même Pendule, qu'on a déterminées dans d'autres latitudes, on voit clairement que la sienne ne s'accorde nullement avec les autres. Au reste, tout ce que j'avance dans cet Ouvrage à ce sujet, ne porte pas sur les Observations Astronomiques pour déterminer la figure de la Terre; car je ferai voir qu'on a été plus heureux dans les mesures qu'on a prises, que dans la Théorie qu'on a voulu établir.

Il s'agit dans la seconde Partie de mon Traité du Mouvement, des loix du mouvement dans un milieu dont la résistance suit la loi des vîtesses élevées à une puissance quelconque, & j'y donne la solution d'un Problème que Newton seul a résolu : c'est de déterminer la hauteur d'où un corps doit tomber dans un milieu résistant pour y acquérir la plus grande vîtesse possible. On trouvera aussi dans cette seconde Partie trois manieres de résoudre le Problème des Projectiles, qui est un des plus difficiles de la Méchanique. La méthode ordinaire des grands Mathématiciens est de le résoudre par le calcul des fluxions, & d'exprimer la fluente par une suite infinie. C'est ainsi que l'a résolu M. Euler; mais les suites qu'il a employées pour exprimer la fluente en question, ne convergent que fort lentement, & quelquefois même point du tout. Je crois avoir évité ce défaut, en modifiant les sujets de maniere qu'elles convergent dans tous les cas possibles.

Je termine ce Traité du Mouvement par la solution de quelques Problèmes touchant les oscillations du Pendule dans des cycloïdes, en supposant que la résistance est ou comme le quarré des vîtesses, ou comme les vîtesses simples; & je confirme la théorie que le Chevalier Newton a donnée là-dessus dans le second Livre de ses Principes, & que quelques Auteurs avoient fort mal-à-propos cru erronée.

Approbation du Censeur Royal.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, le *Traité Analytique des Sections Coniques, & des Fluxions & Fluentes, appliquées à différens sujets.* J'ai cru que cet Ouvrage étoit très-utile à ceux qui veulent s'appliquer à la Géométrie transcendante. Fait à Paris ce 21 Janvier 1760.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur à Paris, nous ayant fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre : *Le Guide des jeunes Mathématiciens, traduit de l'Anglois*, par le R. P. Pezenas, Jésuite. *Nouveau Traité du Microscope, mis à la portée de tout le monde, traduit de l'Anglois. Traité des Fluxions & Traité d'Algebre*, par Colin Maclaurin. *TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES, FLUXIONS ET FLUENTES*, PAR M. MULLER, &c. S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de douze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression de ces Livres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes ; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le quatorzieme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cens quarante-neuf, & de notre Regne le trente-quatrieme. Par le Roi en son Conseil. SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires-Imprimeurs de Paris, N°. 160, fol. 160. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le 16 Mai 1749. Signé, G. CAVELIER, *Syndic.*

TRAITÉ



TRAITÉ ANALYTIQUE
DES SECTIONS CONIQUES
ET DES
FLUXIONS ET FLUENTES
APPLIQUÉES A DIFFERENS SUJETS.

LIVRE I.
DES SECTIONS CONIQUES.

SECTION I.
Des Sections Coniques considérées dans le Plan.

Definitions.

1. SI la droite MH, parallele au côté AD du triangle EAD, rectangle en A, rencontre les autres côtés EA, ED, prolongés en P & H; & si l'on fait AF = AD, la Figure décrite par un mouvement parallele de la partie MM de cette droite, terminée par les points M, M, tels que FM soit toujours égale à la droite correspondante PH, sera nommée en générale *Section Conique;* parce que les sections d'un cone & d'un plan diversement incliné, Fig. 1. 2. 3.

repréſentent de telles figures, comme on verra dans la deuxiéme Section.

2. Lorſque E A > A D, (Fig. 1.) la figure eſt nommée *Ellipſe*: lorſque E A < A D, (Fig. 2.) *Hyperbole*; & ſi A D = A E, (Fig. 3.) elle eſt nommée *Parabole*.

N. B. Lorſque le côté A E devient infini, par rapport au côté A D, E D deviendra parallele à E A, & l'ellipſe devient alors un cercle dont le point F ſera le centre.

3. Toute ligne droite qui diviſe en deux également toutes les droites qu'on puiſſe tirer dans une Section Conique paralleles entr'elles, eſt nommée *Diametre*.

Le diametre qui coupe ces paralleles à angles droits, eſt auſſi nommé *Axe*.

4. Les paralleles diviſées en deux également par un diametre, ſont nommées *Ordonnées* à ce diametre; & leurs moitiés, *Appliquées*.

5. Deux diametres ſont dit être *Conjugués*, lorſque l'un eſt parallele aux ordonnées de l'autre.

6. Le point F eſt nommé le *Foyer*; le point de milieu de l'axe, *Centre*; & le point d'interſection d'un diametre quelconque avec la courbe, eſt nommé *Sommet*.

7. L'ordonnée à l'axe, qui paſſe par le foyer F, eſt nommée le *Parametre* de cet axe.

8. Toute partie d'un diametre, entre ſon ſommet & une ordonnée quelconque, eſt nommée *Abſciſſe*: l'abſciſſe avec l'appliquée correſpondante, ſont nommées enſemble co-ordonnées.

9. Toute droite qui ne rencontre une ſection conique que dans un ſeul point, & qui, quoique prolongée, ne tombe point dans la figure, eſt nommée *Tangente*.

COROLLAIRE I.

1. Il ſuit de la deuxiéme définition, que l'hyperbole tombe de part & d'autre du point E. Car puiſque A D > A E, la droite Q R parallele à A D, ſera auſſi plus grande que E Q; & par conſéquent Q R peut être moindre, égale ou plus grande que F Q. Par conſéquent lorſque Q R > F Q, la circonférence de cercle décrite du point F comme centre avec le rayon Q R, coupera Q R en quelque part.

Les parties M A M, *mam*, de cette figure ſont nommées *Hyperboles oppoſées*, l'une par rapport à l'autre.

COROLLAIRE II.

2. Il suit aussi de la cinquiéme définition, que A P est un axe & A son sommet, puisque la droite M M est toujours divisée en deux également au point P; & qu'alors P H est $=$ A D, F P sera aussi $=$ F A $=$ * A D. *Fig.* 1. 2. 3. * *Déf.* 1.

COROLLAIRE III.

3. Si dans l'ellipse & l'hyperbole, l'on prend le point C dans l'axe, tel que ∺ C E : C A : C F; la perpendiculaire C K sera $=$ C A. Car en retranchant & en alternant, on aura C E — C A, C A — C F; ou E A : A F ou * A D :: C E : C A, comme C E : C K, à cause des paralleles A D, C K. Donc C K $=$ C A. *Fig.* 1. 2. * *Déf.* 1.

COROLLAIRE IV.

4. De là si l'on prend C *a* $=$ C A dans les mêmes figures, la courbe passera par le point *a*. Car puisque * C E : C A :: C A : C F, en composant & en alternant, C E : C A :: C E + C A : C A + C F ou :: E *a* : F *a*, comme E P : *p h* ou F *m*. Par conséquent lorsque E *p* $=$ E *a*, F *m* sera aussi $=$ F *a*; *ce qui montre que* C *est le centre &* a *un autre sommet.* * *Art.* 3. * *Art.* 3.

COROLLAIRE V.

5. Par conséquent, l'axe & le foyer d'une ellipse ou hyperbole étant donnés, on peut trouver autant de points de leurs courbes que l'on voudra. Car divisant l'axe par le milieu, on aura le centre C, & en faisant ∺ C F : C A : C E, on aura le point E; & par conséquent on peut décrire la courbe par la définition premiere.

Et si le parametre de l'axe de la parabole est donné, on n'a qu'à faire le triangle rectangle isoscele E A D, ensorte que E A, A D, soient chacune égale au quart du * parametre : on achevera le reste comme ci-dessus. Car puisque A E $=$ AD $=$ A F, on aura A D $= \frac{1}{2}$ F *m*. *Fig.* 3. * *Déf.* 7.

DEFINITION 10.

Si dans l'hyperbole, on prend dans la perpendiculaire C K, C *f* $=$ C F, & A B $=$ A *b* $=$ C F; les hyperboles opposées L B *l*, N *b n*, décrites avec le foyer *f* & l'axe B *b*, sont nommées *Fig.* 2.

Conjuguées aux hyperboles MAM, *mam*, de même que celles-ci sont dites être *conjuguées* à celles-là.

COROLLAIRE VI.

Fig. 2. 6. De là le triangle rectangle ABC donne $\overline{BC}^2 =$
* Déf. 10. $\overline{AB}^2$ ou * $\overline{CF}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CF + CA} \times \overline{CF - CA}$, ou
Fig. 1. $\overline{BC}^2 = AFa$. Et dans l'ellipse, le triangle rectangle FCB
* Art. 3. donne $\overline{BC}^2 = \overline{FB}^2$ ou * $\overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 = \overline{CA + CF} \times \overline{CA - CF}$, ou $\overline{BC}^2 = AFa$.

THEOREME I.

Fig. 1. 2. 7. *Dans l'ellipse & l'hyperbole, le quarré d'une appliquée quelconque à l'axe est au rectangle fait des parties correspondantes de l'axe, comme le rectangle fait des parties terminées par le foyer est au quarré de la moitié de cet axe; sçavoir* $\overline{PM}^2 : APa :: AFa : \overline{CA}^2$.
Fig. 3. *Et dans la parabole*, $4\,AF \times AP = \overline{PM}^2$.

* Déf. 1. * Ibid. * Art. 3. * Art. 4. Car puisque * AD ou AF : AE :: PH ou * FM : EP :: * CF : CA; en retranchant, FM — AF : AP :: CF : CA; & en composant, I. FM + FP : AP :: F*a* : CA. De même * F*a* : E*a* :: FM : EP :: CF : CA, en composant F*a* ∓ FM : P*a* :: CF : CA; d'où en composant encore, II. FM ∓ FP : P*a* :: FA : CA; lorsque le point F est entre les points A, P. Par conséquent, en multipliant les proportions I & II, on aura $\overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$ ou $\overline{PM}^2 : APa :: AFa : \overline{CA}^2$.

Puisque EA = AD dans la parabole, on aura EP = FM, ou I. 2 AF = FM — FP, lorsque le point P tombe entre les points A, P; & II. EP + FP ou 2 AP = FM + FP. Et par conséquent, le produit des égalités I & II, donne $\overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$ ou $\overline{PM}^2 = 4\,AF \times AP$.

Lorsque le point P tombera en tout autre endroit de l'axe, la démonstration sera toujours de même, à quelques signes près.

COROLLAIRE I.

Fig. 4. 5. 8. De là si l'on tire une autre appliquée N*p* à l'axe A*a*, on aura $\overline{PM}^2 : APa :: \overline{pN}^2 : Apa :: AFa : \overline{CA}^2$. C'est-à-dire, dans l'ellipse & l'hyperbole, *les quarrés des appliquées sont entr'eux comme les rectangles faits des parties correspondantes de*

l'axe. Et dans la parabole, $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: 4AF \times AP : 4AF \times Ap :: AP : Ap$: c'est-à-dire *les quarrés des appliquées de la parabole sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.* Fig. 3.

COROLLAIRE II.

9. Il est évident que dans l'ellipse & l'hyperbole, les appliquées également distantes du centre sont égales. Car puisque $\overline{PM}^2 : APa :: \overline{pN}^2 : Apa$; si $AP = Ap$, APa sera $= Apa$; & par conséquent $\overline{PM}^2 = \overline{pN}^2$ ou $PM = pN$. D'où il suit,

1°. *Que la perpendiculaire* Bb *est l'axe conjugué de* Aa. Car si $CP = Cp$, PM sera aussi $= pmi$; & ainsi la droite Mm sera parallele à Aa, & par conséquent divisée en deux également au point Q par Bb. Il en sera de même à l'égard de toute autre droite parallele à l'axe Aa.

2°. *Que toute droite terminée dans une ellipse ou hyperboles opposées & qui passe par le centre, est divisée en deux également par le centre.* Car si $CP = Cp$, les triangles rectangles CPM, CpN seront semblables & égaux. Donc puisque CP, Cp, ne sont qu'une même droite, MC, NC, ne seront aussi qu'une même droite. Il en sera de même à l'égard de toute autre droite qui passe par le centre.

COROLLAIRE III.

10. Puisque $CQ = PM$, & $CP = QM$, & que * $\overline{PM}^2 : APa$ ou $\pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 :: AFa$ ou * $\overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$; on aura $\overline{CQ}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$; ou en alternant & en composant, $\overline{BC}^2 \mp \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$. Or si l'on tire une autre appliquée Nq à l'axe Bb, on aura $\overline{BC}^2 \mp \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{BC}^2 \mp \overline{Cq}^2 : \overline{qN}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2$. Ce qui montre *que les quarrés des appliquées à l'axe conjugué* Bb, *sont comme les quarrés de la moitié de cet axe diminués ou augmentés par les quarrés de leurs distances au centre.* * Art. 7. * Art. 6.

D'où il suit, 1°. que l'un & l'autre axe partagent la figure en deux également, puisque chacun divise ses ordonnées en deux également.

2°. Les axes étant donnés, on trouvera le foyer, en faisant $BF =$ * AC dans l'ellipse, & $CF =$ * AB dans l'hyperbole: Fig. 1. 2. * Art. 3. * Déf. 10.

& au contraire le foyer F & le premier axe A a étant donnés, on trouvera les sommets B, b du second, en faisant BF = Fb = * CA dans l'ellipse, & AB = Ab = CF dans l'hyperbole.

* Art. 3.

3°. Dans l'ellipse l'axe conjugué Bb est toujours moindre que le premier. Puisque l'hypothenuse BF (= AC) est toujours plus grande que l'un des côtés BC du triangle BCF. Lorsque AC = BC, l'ellipse devient un cercle.

Mais dans l'hyperbole, l'axe Bb peut être moindre, égal ou plus grand que l'axe Aa. Lorsque Aa = Bb, l'hyperbole est nommée équilatere.

N. B. *Puisque la partie* CBMAMb *de l'ellipse ou hyperbole est égale & semblable à la partie* CBmamb, *il est évident que le point* f *pris dans l'axe, ensorte que* Cf = CF, *sera aussi un foyer, puisqu'il aura les mêmes propriétés que le premier.*

COROLLAIRE IV.

11. Lorsque l'appliquée PM tombe au foyer f ou F, la proportion * $\overline{PM}^2 : AP a :: AFa : \overline{AC}^2$, deviendra $\overline{Fm}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$, parce que $AFa =$ * $\overline{BC}^2$; ou Fm : BC :: BC : AC. Ce qui fait voir que *le parametre* * 2Fm *du premier axe d'une ellipse ou hyperbole, est une troisiéme proportionnelle aux premier & second axes.*

* Art. 7.
* Art. 6.
* Déf. 7.

N. B. *Tout ce que nous venons de dire touchant les hyperboles opposées* MAM, mam, *convient également à leurs conjuguées* LBl, Nbn, *avec cette différence seulement que le premier axe des unes est le second des autres.*

On nommera toujours dans la suite les données CA = a, CB = b, CF = d, Fm = p, & les variables AP = x, CP = u, PM ou * QN = y.

* Fig. 2.

COROLLAIRE V.

12. Si l'on met les valeurs analytiques dans * $\overline{PM}^2 : AP a$ ou $\pm \overline{AC}^2 \mp \overline{CP}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$, on aura $yy : \pm aa \mp uu :: bb : aa$. Donc $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa - uu$ sera l'équation de l'ellipse & de l'hyperbole par rapport au premier axe Aa.

* Art. 7.

Et comme on a dans les hyperboles conjuguées LBl, Nbn, *

* Art. 10.

par rapport à leur second axe A a, (†) $\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{NQ}^2 ::$ $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$; ou $aa + uu : yy :: aa : bb$, ou $\frac{aa}{bb}yy = aa + uu$; dans la parabole, on aura $2px = yy$.

Mais si l'on met p au lieu de sa valeur * $\frac{bb}{a}$ ($Fm = \frac{\overline{BC}^2}{AC}$) dans les équations précédentes, on aura A. $\pm \frac{a}{p} yy = aa - uu$, & B. $\frac{a}{p} yy = aa \mp uu$, pour les équations de l'ellipse & de l'hyperbole; la premiere, par rapport au premier axe; & la seconde, par rapport à l'axe conjugué A a des hyperboles conjuguées L B l, N bn, & par rapport à l'un ou à l'autre axe de l'ellipse, en observant que *les signes de dessus appartiennent toujours à l'ellipse.* * Art. 11.

COROLLAIRE VI.

13. Puisqu'on a $\frac{aa}{bb} yy = aa - uu$ dans l'ellipse, lorsque $u = 0$ ou $= a$, y sera $= b$ ou $= 0$. Ce qui montre *que l'ellipse ne passe pas au-delà des sommets des axes, & par conséquent elle rentre en elle-même.*

Comme $\frac{aa}{bb} yy = uu - aa$ dans l'hyperbole, lorsque $u = a$ ou $= \infty$, y sera $= 0$ ou $= \infty$: *donc les hyperboles opposées s'étendent depuis les sommets du premier axe jusqu'à l'infini.*

Et parce que $2px = yy$ dans la parabole; si $x = 0$ ou $= \infty$, y sera aussi $= 0$ ou $= \infty$; & par conséquent *la parabole s'étend aussi depuis le sommet jusqu'à l'infini.*

N. B. Comme $2a - x = Pa = a + u$, & $AP = x = a - u$; *en mettant au lieu de* $2a - xx$, *& au lieu de* $a + u$, $a - u$, *dans l'équation de l'ellipse, on aura* $\frac{a}{p} yy = x \times \overline{2a - x}$; *& lorsque* $2a = \infty$, $2a - x$ *sera* $= 2a$: *& par conséquent* $\frac{a}{p} yy = 2ax$, *ou* $yy = 2px$, *ce qui est l'équation de la parabole : or on pourroit déduire les propriétés de la parabole de celle de l'ellipse, par le moyen de cette supposition de* $a = \infty$; *mais on aime*

(†) Car la proportion $\overline{BC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: BC : CA$ de l'art. 10. A l'égard de l'axe B b, les hyperboles M A, N am, (Fig. 5.) se changent (Fig. 2.) en celle-ci, $\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$; & CQ est ici $= u$, & QN $= y$.

néanmoins mieux les démontrer séparément en faveur des commençans.

THEOREME II.

Fig. 1. 2. 14. *La somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole des lignes tirées des foyers en un point quelconque de la courbe, est toujours égale au premier axe ; sçavoir* $fM \pm FM = Aa$.

Si $Cp = CP$, & que l'on tire ph parallele à PH, à cause

* Art. 9. que $fP = Fp$, & * $pm = PM$, on aura $fM = Fm =$ * ph:

* Déf. 1. & comme $Cp = CP$, il s'ensuit que (†) ($ph \pm PH = 2CK$)

* Art. 3. ou $fM \pm FM =$ * Aa.

Différentes constructions des Sections Coniques lorsque le premier axe & les foyers sont donnés.

POUR L'ELLIPSE.

Fig. 6. Ayant attaché les bouts d'un fil fMF, égal en longueur au premier axe, aux foyers Ff, le style M qui sert à tenir le fil bien tendu, décrira, en tournant autour des foyers, la courbe de l'el-

* Art. 14. lipse * demandée.

Fig. 7. Si les foyers se réunissent en un point C, le style M décrira la circonférence d'un cercle.

AUTREMENT.

Fig. 8. Soient deux régles AF, Bf, égales chacune en longueur au premier axe, attachées par un de leurs bouts aux foyers F, f, & par les autres à une troisiéme régle AB ($= Ff$) de sorte qu'elles puissent tourner librement ; je dis que l'intersection M sera toujours dans la courbe. Car puisque $AB = Ff$, & $AF = Bf$, les triangles fBA, AFf, seront semblables & égaux ; & par conséquent les angles f & A du triangle fMA, aussi bien que les côtés fM, & MA, seront égaux. Donc $fM + FM = FA$.

POUR L'HYPERBOLE.

Fig. 9. Ayant attaché le bout d'une régle Df au foyer f, & celui d'un fil FMD, dont la différence de leur longueur soit

(†) A cause des paralleles PH, CK, ph, on a $ph - CK : Cp :: CK \mp PH : CP$; ainsi puisque $Cp = CP$ par hyp. $ph = CK \mp PH$, ou $ph \pm PH = 2CK$.

égale

égale au premier axe Aa, à l'autre foyer F, & l'autre bout du fil à celui de la régle en D : le stile M, qui sert à tenir le fil bien tendu & sa partie M D comme colée contre la régle, décrira, pendant que la régle tourne autour du point f, la courbe MAm de l'hyperbole demandée.

En attachant le bout de la régle au foyer F, & celui du fil en f, on décrira la courbe Nan de l'hyperbole opposée.

Lorsque la longueur de la régle est égale à celle du fil, le stile M décrira une droite C M perpendiculaire sur le milieu de fF. *Fig.* 10.

POUR LA PARABOLE.

Ayant attaché le bout d'un fil au foyer F, & l'autre à l'extrêmité d'un équerre fDE, dont le côté fD soit parallele à l'axe & égal en longueur au fil ; le stile M, qui sert à tenir le fil bien tendu & sa partie fM comme collée contre l'équerre, décrira, en glissant sur le côté D E, le long d'une régle fixe E E, la courbe mAm de la parabole demandée. Car si $Ba = Df$, lorsque Df tombe sur Ba, on aura $fM + MF = Aa + AB = Aa + AF$: ainsi $AF = AB$. Par conséquent $FM = AP + AF = {}^{*}BP$. Donc, &c. *Fig.* 11. * *Déf.* 1.

Autrement pour l'Ellipse & l'Hyperbole.

Ayant pris fD égale au premier axe, & du foyer f comme centre avec les rayons fN, fN, ~~pris à volonté, décrit~~ un grand nombre d'arcs de cercles M N M ; en faisant les droites F M toujours égales à leurs correspondantes D N, les points M, M, seront dans la courbe. *Fig.* 12. 13.

Car $fM = fD \mp DN$, par const. ou $fM \pm DN = fM \pm FM = fD$ égal au premier axe.

PROBLEME I.

15. *Tirer une droite qui touche une section conique dans un point donné* M. *Fig.* 14. 15. 16.

Des foyers f, (†) F, soient tirées les droites fM, FM, & dans fM, prolongée dans l'ellipse, soit prise $ML = FM$, la perpendiculaire M D sur L F sera la tangente demandée. Car si l'on tire de quelqu'autre point m de M D, des lignes aux points L, f ; $fm + mL$ sera plus grand dans l'ellipse, & $fm - mL$

(†) Dans la parabole, la ligne M L est tirée parallele à l'axe.

sera moindre dans l'hyperbole que f L ($=$ A a). Donc puisqu'il n'y a que le seul point D dans M D, duquel on puisse tirer deux lignes aux foyers, dont la somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole soit égale au premier axe, il s'ensuit que M D

* *Art.* 14. sera * la tangente demandée.

Si dans la parabole on prend A B $=$ A F, la perpendiculaire B l sur A T passera par le point L, puisque M L $=$ M F

* *Par la construction de la Parabole.* (par constr.) & M F $=$ * P B. Ainsi $m\,l$ parallele à M L, sera toujours moindre que m L, ou son égale m F. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

16. Il est manifeste que les angles f M t, F M T, faits par la tangente & par les lignes tirées du point touchant aux foyers, sont égaux. Car puisque L M $=$ M F, les triangles rectangles L D M, F D M, ayant le côté M D de commun, seront semblables & égaux; par conséquent L M D $=$ F M D, & l'angle L M D est égal à son alterne t M f. Donc F M D $=$ f M t.

COROLLAIRE II.

17. Si dans l'ellipse & l'hyperbole l'on tire les droites C D, P D;

* *Art.* 15. C D sera parallele à fL & $= \frac{1}{2} f$L $=$ * A C, puisque F C $=$ C f,

* *Art.* 16. & * F D $=$ D L; & à cause des angles droits en D & P, on a

* *Art.* 16. T F : T M : : T D : T P. Ainsi l'angle T M F (* f M t) sera égal à l'angle A P D, & C D T $=$ C P D $=$ f M D, & par conséquent les triangles C D P, C D T seront semblables; par conséquent C P : C D ou C A : : C A : C T.

COROLLAIRE III.

18. De là il suit que si la perpendiculaire M K à la tangente rencontre les axes en K & k, on aura,

* *Art.* 17. 1°. P T $= \frac{\pm aa \mp uu}{u}$, puisque C T $=$ * $\frac{aa}{u}$, & C P $= u$.

* *Art.* 12. 2°. T P : P M : : P M : P K $= \frac{pu}{a}$, parce que * $\pm \frac{a}{p} yy = aa - uu$.

3°. C P : C A : : A P : A T; car $\pm$ C T $\mp$ C A $=$ A T $= \frac{\pm aa \mp au}{u}$.

4°. C P : a P : : A P : P T, parce que P T $= \frac{\pm aa \mp uu}{u}$.

5°. A T : a T : : A P : a P, à cause que A T $= \frac{\pm aa \mp au}{u}$, & a T $= \frac{aa + au}{u}$.

6°. $TA : TP :: TC : Ta$, ($\pm CT \mp a : \pm CT \mp u :: CT : CT + a$) puisque $CT = \frac{aa}{u}$.

COROLLAIRE IV.

19. Si l'on tire l'appliquée Mp à l'axe conjugué Bb, on aura $PK \left(\frac{pu}{a}\right) : PM\,(y) :: pM\,(u) : pk = \frac{a}{p}y$, & $pk \left(\frac{ay}{p}\right) : pM\,(u) :: pM\,(u) : pt = \frac{puu}{ay} = * \frac{bb \mp yy}{y}$, & $CT = \frac{bb}{y}$; d'où l'on voit que les propriétés des tangentes sont communes aux deux axes. * Art. 12.

COROLLAIRE V.

20. Puisque dans la parabole les angles FMT, $fMt = FTM$ sont égaux, * on aura $FM = FT = * x + \frac{1}{2}p$; & comme $AF = \frac{1}{2}p$, il s'ensuit que $FT - AF = AT = x$; d'où il suit, Fig. 15. * Art. 16. * Art. 7.

I.

21. Que $PK = p$. Car les triangles rectangles LBF, MPK sont semblables & égaux, puisque tous leurs côtés sont paralleles aussi bien que LM, BK. Donc $PK = BF = * p$. * Art. 7.

II.

22. La tangente AD au sommet A rencontre la tangente MT au même point D que la droite FD. Car puisque $FM = FT$, FD coupe MT par le milieu; & à cause que AD, PM sont paralleles & $AT = AP$, AD coupera MT aussi par le milieu, & par conséquent au même point que FD.

III.

23. La perpendiculaire FD est moyenne proportionnelle entre FM & FA. Car à cause des triangles rectangles semblables FDT, FAD, on a $FA : FD :: FD : FT = * FM$. * Art. 20.

THEOREME III.

24. *Si dans l'ellipse & l'hyperbole l'on tire une appliquée du premier axe par l'intersection d'une droite tirée par le centre parallele à une tangente quelconque, le quarré de la moitié du premier axe moins ou plus le quarré de la distance de cette appliquée au centre, sera égale au quarré de la distance du centre à l'appliquée* Planche 2. Fig. 17. 18.

qui passe par le point touchant; sçavoir $\overline{CA}^2 \mp \overline{CQ}^2 = \overline{CP}^2$.

* Art. 18. n. 1. Car si $CQ = v$, $QN = z$, $PT = s$, on aura * $us = \pm aa \mp uu$; & à cause des paralleles, $\overline{TP}^2\ (ss) : \overline{CQ}^2\ (vv) :: \overline{PM}^2 : \overline{QN}^2$
* Art. 8. $::$ * $us\ (\pm aa \mp uu) :$ * $aa \mp vv$, ou $ss : su :: vv : aa \mp$
* Art. 10. vv: ou en divisant le premier rapport par $\frac{s}{u}$, $us : uu :: vu : aa \mp vv$; & en composant $us : uu \pm us :: vv : aa$. Par conséquent puisque * $aa = uu \pm us$, on aura aussi $us = vv = \pm aa \mp uu$, ou $uu = aa \mp vv$.
* Art. 18. n. 1.

COROLLAIRE I.

* Art. 12. 25. De là il suit: 1°. puisque * B $\frac{aa}{bb} zz = aa \mp vv =$ *
* Art. 24. uu, on aura $az = bu$. 2°. Comme A * $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa -$
* Art. 12. uu, ou $uu = aa \mp \frac{aa}{bb} yy =$ * $aa \mp vv$, il s'ensuit que ay
* Art. 24. $= bv$. 3°. $az \times bv = bu \times ay$, ou $zv = uy$. 4°. En ajoutant les équations $\frac{aa}{bb} zz = uu$, $\frac{aa}{bb} yy = vv$, on aura $\frac{aa}{bb} \times zz$
* Art. 24. $\pm yy\ (= uu \pm vv$ *$) = aa$, ou $zz \pm yy = bb$.

COROLLAIRE II.

26. Si l'on tire CY perpendiculaire à la tangente MT, les triangles semblables TCr, CNQ, donneront NC : NQ
* Art. 17. $(z) ::$ CT $(\frac{aa}{u})$ * : Cr, ou CN × Cr, $= \frac{z}{u} aa = ab$, parce
* Art. 25. n. 1. que $az =$ * bu.

THEOREME IV.

27. *Le rectangle, fait des droites tirées des foyers perpendiculaires à une tangente quelconque, est égal au quarré de la moitié de l'axe conjugué; sçavoir* $fd \times FD = \overline{BC}^2$.

Car si la droite DC rencontre df prolongée dans l'ellipse en E, on aura (à cause que fC = CF, & que Ef, FD sont paralleles)
* Art. 17. fE = FD, & EC = CD = * CA. Donc la circonférence de cercle décrite du centre C par les sommets A, a, passera par les points E, d, D; & par conséquent par la proprieté du cer-
* Art. 6. cle, E$f \times fd$, ou $fd \times$ FD $= af$A = * $\overline{BC}^2$.

COROLLAIRE I.

* Art. 24. 28. Si fM $= r$, FM $= s$, on aura * $r \pm s = 2a$. D'où il

suit, 1°. que $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$; 2°. $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$. $Cr = \frac{ab}{\sqrt{rs}}$. Car
les triangles semblables *fMd, FMD, donnent $fM : fd ::$ * Art. 16.
$FM : FD$, & comme *$fd : BC :: BC : FD$, en multi- * Art. 17.
pliant par ordre $fM : BC :: BC \times FM : \overline{FD}^2 = \frac{bbs}{r} = \frac{bbss}{rs}$,
ou $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$. En mettant cette valeur de FD dans la
premiere proportion, on aura $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$.

Or comme Cr, Ed, sont paralleles & $ED = 2CD$, on aura aussi $Ed = 2Cr = fd + FD = \frac{br+bs}{\sqrt{rs}}$, ou $Cr = \frac{ab}{\sqrt{rs}}$, parce que $r + s = 2a$.

4°. $\overline{CN}^2 = fM \times FM$. Car * $CN \times Cr = ab$, & $Cr =$ * Art. 26.
$\frac{ab}{\sqrt{rs}}$.

5°. $FM \times BC = FD \times CN$, puisque $FD = \frac{bs}{\sqrt{rs}}$.

6°. $fd \times CN = BC \times fM$, à cause que $fd = \frac{br}{\sqrt{rs}}$.

COROLLAIRE II.

29. La même chose étant supposée, excepté que FL soit Fig. 19. 20.
parallele à CN, la partie EM de fM, terminée par CN, sera
$= CA$. Car puisque $fC = FC$, on aura $fE = EL$, mais
$LM = {}^*MF$: donc $fL + 2LM = fM + FM = {}^*2CA$ * Art. 15.
$= 2EL + 2LM$. Par conséquent $EM = {}^*CA$. * Art. 14.

COROLLAIRE III.

30. Si du point M (le reste étant de même) on tire la perpen- Fig. 21. 22.
diculaire MK à la tangente MT, rencontrant les axes en K, k,
on aura 1°. $FK = \frac{ds}{a}$, & $fK = \frac{dr}{a}$. Car $fL\,(2a) : fF\,(2d)$
$::$ $ML\,(s)$ ou $MF : FK = \frac{ds}{a} :: fM\,(r) : fK = \frac{dr}{a}$.

2°. $MK = \frac{b}{a}\sqrt{rs}$. Puisque $fL\,(2a) : LF\,\left(\frac{2bs}{\sqrt{rs}}\right) :: fM$
$(r) : MK = \frac{brs}{a\sqrt{rs}} = \frac{b}{a}\sqrt{rs}$.

3°. $Mk = \frac{b}{p}\sqrt{rs}$. Car KP * $\left(\frac{pu}{a}\right) : PC\,(u) :: MK\,\left(\frac{b}{a}\sqrt{rs}\right) :$ * Art. 18. n. 2.
$Mk = \frac{b}{p}\sqrt{rs}$.

4°. $CP = u = \frac{aa \mp as}{d}$. Car $FK = \frac{ds}{a}$, & $CK \pm KF =$

* Art. 11. CF, ou $u \pm \frac{pu}{a} \pm \frac{ds}{a} = d$, ou à cause que * $p = \frac{bb}{a}$ & $aa \mp$

* Art. 6. $bb =$ * dd, $\frac{dd}{aa} u \pm \frac{ds}{a} = d$, ou $u = \frac{aa \mp as}{d}$.

* Art. 25. 5°. $QN = z = \frac{ba \mp bs}{d}$, puisque * $az = bu$.

6°. $CK = \frac{dd \mp ds}{a}$, parce que $CK = CP \mp PK$.

* Art. 24. 7°. $CQ = v = \frac{a}{d} \sqrt{rs - bb}$; car * $vv = \pm aa \mp uu$, &

* Art. 6. bb * $= \pm dd \mp aa$.

* Art. 25. n. 2. 8°. $PM = y = \frac{b}{d} \sqrt{rs - bb}$, à cause que * $ay = bv$.

Fig. 21. 24. 9°. $CT = \frac{ad}{a \mp s}$, puisque $CT = \frac{aa}{u}$, & $u = \frac{aa \mp as}{d}$.

10°. $FT = \frac{ds}{a \mp s}$, car $\pm CT \mp CF = FT$.

11°. $fT = \frac{dr}{a \mp s}$, car $CT + Cf = fT$.

12°. $KT = \frac{drs}{aa \mp as}$, $FK + FT = KT$.

13°. $TD = \frac{a\sqrt{rs}\sqrt{rs - bb}}{ar \mp rs}$; $CN : CQ :: FT : TD$.

14°. $Td = \frac{a\sqrt{rs}\sqrt{rs - bb}}{as \mp ss}$.

15°. $TM = \frac{\sqrt{rs}\sqrt{rs - bb}}{a \mp s}$.

16°. $Dr = \frac{a\sqrt{rs - bb}}{\sqrt{rs}}$.

17°. $MD = \frac{\sqrt{rs}\sqrt{rs - bb}}{s}$.

18°. $Md = \frac{\sqrt{rs}\sqrt{rs - bb}}{r}$.

* Art. 6. 19°. $CM = \sqrt{aa \pm bb \mp rs}$; car $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$, & * $aa \mp dd = bb$.

COROLLAIRE IV.

31. Si l'on tire des points K, k, les perpendiculaires K a, k g, sur l'une des lignes F M ou fM que l'on voudra, on aura M $a = p$ dans les trois sections coniques, & M $g = a$ dans l'ellipse & l'hyperbole. Car fM (r) : fd $\left(\frac{br}{\sqrt{rs}}\right)$ :: M K $\left(\frac{b}{a}\sqrt{rs}\right)$: M a $\left(= \frac{bb}{a} = p\right)$ :: M k $\left(\frac{b}{p}\sqrt{rs}\right)$: M $g = \frac{bb}{p} = a$,

* Art. 11. parce que * $ap = bb$.

COROLLAIRE V.

32. Si les tangentes (le reste étant de même) tirées par les sommets A, a, du premier axe, rencontrent la tangente M T, en E, e, on aura $AE \times ae = \overline{BC}^2$. Car puisque * T A : T P : : T C : T a, on aura aussi A E : P M (y) : : C t * $\left(\frac{bb}{y}\right)$: ae, ou $AE \times ae = bb$. D'où il suit, 1°. Que $AE \times ae = \overline{BC}^2 =$ * $AF \times Fa =$ * $FD \times fd$; c'est-à-dire, A E : A F : : F a : ae. Ainsi les triangles rectangles E A F, e a F, sont semblables, & par conséquent les angles E F A, e F a, valent ensemble un angle droit. Donc E F e, ou E f e, sera aussi un angle droit. 2°. $ED \times De = \overline{DF}^2$ * $= \frac{bbs}{r}$, & $Ed \times de = \overline{fd}^2 =$ * $\frac{bbr}{s}$. Fig. 23. 24. * Art. 18. n. 6. * Art. 19. * Art. 6. * Art. 27. * Art. 28.

THEOREME V.

33. *Dans une section conique quelconque, le triangle* P M T *fait par une tangente, soutangente & appliquée correspondante, est égal au trapese* A R M P, *terminé par les co-ordonnées, par une tangente qui passe par le sommet* A *de l'axe, & par une droite* M R, *qui passe par le point touchant & par le centre dans l'ellipse & l'hyperbole, & parallèle à l'axe dans la parabole; sçavoir* P M T = P M R A. Fig. 25. 26. 30.

Car puisque * C P : C A : : C A : C T : : P M : A R, dans l'ellipse & l'hyperbole, ou $CA \times AR = CT \times PM$, les triangles C A R, C M T seront égaux. Et par conséquent $\pm$ C A R $\mp$ C P M $= \pm$ C M T $\mp$ C M P, ou P M T = P M R A. * Art. 17.

Puisque * T P = 2 A P dans la parabole, le triangle T M P sera égal au rectangle P M R A. * Art. 20.

COROLLAIRE I.

34. De là il suit que tout triangle Q L V, dont un de ses côtés soit une appliquée quelconque à l'axe, & qui soit semblable au triangle P M T, sera toujours égal au trapeze Q K R A correspondant. Car * $\overline{PM}^2 : \overline{QL}^2 : : \mp \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CQ}^2$, (†) ou P M T : Q L V : : P M R A : Q K R A. Or com- * Art. 8.

(†) Parce que les triangles semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues; & par conséquent la différence de deux triangles sem-

* Art. 33. me * P M T = P M R A, il s'ensuit que Q L V = Q K R A
* Art. 33. égale Q K M T, parce que * C M T = C A R.

Fig. 26. Si l'appliquée Q L est tirée de quelque point de l'hyperbole conjuguée, on aura Q L V = C A R + C Q K, ou
* Art. 12. C K L V = C A R = C T M, parce que * $\overline{PM}^2 : \overline{QL}^2 :: \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CQ}^2 + \overline{CA}^2$.

* Art. 8. Comme * A P : A Q : : $\overline{PM}^2 : \overline{QL}^2$ dans la parabole, on
* Art. 33. aura P M R A : Q K R A : : P M T : Q L V; mais P M T = * P M R A : donc Q L V = Q K R A = Q K M T.

COROLLAIRE II.

35. Si des espaces égaux Q L V, Q K R A, l'on retranche les espaces égaux *q l* V, *q k* R A, on aura Q L *l q* = Q K *k q*. D'où en retranchant la partie commune Q K E *l q*, il restera L K E = *l k* E; & par conséquent, puisque les triangles L E K, *l* E *k*, sont semblables & égaux, on aura L E = E *l*. D'où l'on voit que *toute ligne* M C *qui passe par le centre de l'ellipse ou hyperbole, ou est parallele à l'axe dans la parabole, est un* Diametre, *& les lignes paralleles à la tangente qui passe par le sommet de ce diametre, sont* Ordonnées *au même diametre.*

COROLLAIRE III.

36. De là tout triangle L K E est égal au trapeze correspondant E M T V; car puisque * Q L V = Q K M T, en re- (* Art. 34.) tranchant la partie commune Q K E V, il restera L K E = E M T V.

Si dans l'hyperbole conjuguée l'on ajoute C V E aux espaces égaux C K L V, C A R ou C M T, on aura L E K = E M T V.

COROLLAIRE IV.

37. Puisque tout diametre coupe ses ordonnées par le milieu

blables sera à l'un de ces triangles que l'on voudra, comme la différence des quarrés de leurs côtés homologues est au quarré du côté de ce triangle.

Si dans l'hyperbole (Fig. 26.) V L tombe au centre C, elle deviendra le diametre conjugué de C M, puisqu'elle est parallele à la tangente M T, par hypothese, & le triangle L K E deviendra (Fig. 32.) le triangle C N D = C M T.

Et si l'on conçoit que la ligne L K (Fig. 31.) tombe sur N D, E K L deviendra = D N C, & E M T V deviendra C M T.

& passe par le centre dans l'ellipse & l'hyperbole, ou est parallele à l'axe dans la parabole, il s'ensuit que toute droite, qui passe par le centre dans le premier cas, ou est parallele à l'axe dans le second, sera un diametre, & la droite qu'il divise en deux également sera une de ses ordonnées.

COROLLAIRE V.

38. De là on peut trouver un diametre qui fait un angle donné avec ses ordonnées lorsque la section est décrite. Car si dans l'ellipse & l'hyperbole on décrit sur un diametre quelconque M m, comme corde, un arc M L m de corde capable de contenir l'angle donné; le diametre A a, ou B b, qui divise la corde M L ou L m, tiré par les intersections de cet arc avec la courbe en deux également, sera le diametre demandé, puisque L M sera ordonnée au diametre A a, & l'angle M P C égale à l'angle donné M L m. *Fig. 27. 28.*

Dans la parabole le diametre A C qui divise la droite M L, qui fait un angle donné L M m avec tout autre diametre M m, en deux également, sera le diametre demandé. *Fig. 29.*

THEOREME VI.

39. *Dans l'ellipse & l'hyperbole, le quarré d'une appliquée* L E *à un diametre quelconque* M m, *est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diametre, comme le quarré de la moitié de son conjugué* C N *est au quarré de la moitié de ce diametre; sçavoir* $\overline{LE}^2 : MEm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$. *Dans la parabole* $2p \times ME = \overline{LE}^2$. *Fig. 31. 32.* *Fig. 30.*

Car si l'on tire N D parallele à K L, rencontrant M E en D, on aura à cause des triangles semblables, $\overline{LE}^2 : \overline{NC}^2 :: LEK : NCD$, & MEm ou $+\overline{CM}^2 \mp \overline{CE}^2 : \overline{MC}^2 :: EMTV : CMT$. Or comme $LEK =$ * $EMTV$, & $NCD =$ * CMT, il s'ensuit que $\overline{LE}^2 : MEm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$. * *Art. 36.* * *Art. 33.*

Dans la parabole $\overline{TM}^2 : \overline{LE}^2 :: PMT : KLE$, & $MR : ME :: PMRA : TMEV$; & comme $PMT =$ * $PMRA$, & $KLE =$ * $TMEV$, il suit que $\overline{TM}^2 : \overline{LE}^2 :: MR : ME$. *Fig. 3.* * *Art. 33.* * *Art. 36.*

COROLLAIRE I.

40. Si $AP = x$, TP sera $=$ * $2x$, & $\overline{TM}^2 = yy +$ *Fig. 30.* * *Art. 20.*

C

$4xx$, ou à cauſe que $2px = yy$, $\overline{TM}^2 = 2px \mp 4xx$. Ainſi $2px + 4xx : \overline{LE}^2 :: x : ME$, ou $\overline{2p+4x} \times ME = \overline{LE}^2$. Par conſéquent le parametre ($2p + 4x$) d'un diametre M E quelconque de la parabole, eſt quadruple de la diſtance de ſon ſommet au foyer *.

* Art. 7.

COROLLAIRE. II.

Fig. 31. 32. 41. Puiſqu'en nommant le demi-diametre M C (a), la moitié de ſon conjugué N C (b), & les indéterminées C E (u) & L E (y), on aura toujours $yy : \pm aa \mp uu :: bb : aa$, ou $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa - uu$, pour l'équation de l'ellipſe & de l'hyperbole par rapport à deux diametres conjugués quelconques. Or comme les articles 8, 9 & 10 ſont des conſéquences tirées de cette équation par rapport à l'axe, il s'enſuit que ces conſéquences ſeront vraies à l'égard de tout diametre.

COROLLAIRE III.

Fig. 30. 42. Si l'on tire par les extrêmités L, N, des appliquées L E, N F, au diametre M E, les droites L H, N G, paralleles à l'axe, rencontrant la tangente T M en H & G, on aura L E = H M, N F = G M, L H = E M, N G = F M. Or comme $ME : MF :: \overline{LE}^2 : \overline{NF}^2$, il s'enſuit que $HL : GN :: \overline{MH}^2 : \overline{MG}^2$.

REMARQUES.

Fig. 33. I. *Si dans la ligne* A Q *qui touche la parabole en* A, *on prend les parties* A q, A q, *dans une progreſſion arithmetique, les droites* q m, q m, *paralleles au diametre* A P, *terminées par la courbe & la tangente, ſeront comme les quarrés dont les côtés ſont en progreſſion arithmétique : c'eſt pourquoi les élémens de l'eſpace* A m M Q *ſont en même raiſon que ceux d'une pyramide; par conſéquent on trouvera ſa valeur de la même maniere qu'on trouve celle d'une pyramide, ſçavoir en multipliant la plus grande* M Q *par le tiers de la perpendiculaire* M D. *Ainſi* A m M Q $= \frac{1}{3}$ M D × M Q.

II. *Puiſque l'eſpace extérieur* A m M Q *eſt le tiers du parallelogramme* A Q M P, *il s'enſuit que l'eſpace intérieur* A M P *en ſera les deux tiers; ſçavoir* A M P $= \frac{2}{3}$ M D × A P.

III. *Si les abscisses* A p, A p *sont en progression arithmetique, les quarrés faits des appliquées, ou les surfaces coniques décrites par ces appliquées* p M, p M, *dans la révolution de la figure autour de l'axe* A P, *seront dans la même progression. Et par conséquent les élémens du solide décrit par l'espace* A M P *autour de* A P, *seront entr'eux comme ceux d'un triangle. On trouvera par conséquent la valeur de ce solide en multipliant la surface décrite par* M P, *ou la base par la moitié de la hauteur* M d.

Si M D = n, P M = y, *& que* c *soit la circonférence du rayon* M D, *on aura* $\frac{1}{2}$ c y *pour la valeur de la surface décrite par* P M. *Ainsi* $\frac{1}{4}$ n c y *sera la valeur du solide.*

Si l'on ôte $\frac{1}{4}$ n c y *de la valeur* $\frac{1}{2}$ n c y *du cylindre circonscrit, la différence* $\frac{1}{4}$ n c y *sera la valeur du solide décrit par l'espace extérieur* A M Q *autour de l'axe* A P; *d'où l'on voit que ces solides sont égaux.*

PROBLEME II.

43. *Deux diametres conjugués d'une ellipse ou hyperbole étant donnés, décrire leurs courbes.* Fig. 34. 35.

Ayant tiré un grand nombre de droites M *m*, *m m*, paralleles à l'un des diametres A *a*, & par leurs intersections P, *p*, avec l'autre, tiré les droites P Q, *p q*, paralleles à la droite A B, qui joint les extrêmités de ces diametres; cela posé, si dans l'ellipse on décrit du centre C une demi-circonférence de cercle par les points A, *a*; en faisant P M toujours égale à l'appliquée correspondante Q N du cercle, la courbe demandée passera par tous les points A, *m*, M.

Par la propriété du cercle, $\overline{CQ}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{PM}^2$ ($= \overline{QN}^2$), & à cause des triangles semblables, $\overline{CQ}^2$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{PM}^2 : \overline{CA}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CB}^2$; ou en divisant & en alternant, $\overline{PM}^2 : \overline{CB}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$. Or comme cette proportion exprime la nature de l'ellipse par rapport aux diametres conjugués * A *a*, B *b*, il s'ensuit que A B *a b* est une ellipse. * Art. 39.

Si dans l'hyperbole on tire la droite D C perpendiculaire & égale à A C, en faisant P M, *p m*, toujours égale à leur correspondante Q D, *q* D, on trouvera tant de points M, *m*, que l'on voudra de la courbe demandée. Fig. 35.

Car à cause du triangle rectangle C Q D, $\overline{QD}^2 - \overline{CD}^2$

ou $\overline{PM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CQ}^2$, & à cause des triangles semblables $\overline{CQ}^2$ ou $\overline{PM}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; & comme cette
* Art. 39. proportion exprime la nature de l'hyperbole par rapport aux * diametres conjugués A a, B b, il s'ensuit, &c.

Fig. 36. Soit A B le parametre du diametre A P de la parabole : si des centres C, C pris à volonté dans A B, l'on décrit des demi-circonférences de cercle par le point B, qui rencontrant la droite A N parallele aux ordonnées M M de ce diametre en N, n ; en faisant P M toujours égale à sa correspondante A N, les points M, m, seront dans la courbe demandée, puisque $AB \times AP = \overline{AN}^2 = \overline{PM}^2$.

THEOREME VII.

Fig. 37. 38. 44. *Le parallelogramme* H G *fait de deux diametres conjugués* M m, N n *quelconques d'une ellipse ou hyperbole, est égal au rectangle fait de deux axes* A a, B b.

En tirant C r perpendiculaire sur un des côtés H M, on aura,
* Art. 35. à cause que H M est une tangente * & parallele à N n, * $CN \times$
* Art. 26. $Cr = CA \times CB$, ou $MN\,mn = Aa \times Bb$.

THEOREME VIII.

45. *La somme dans l'ellipse ou la différence dans l'hyperbole des quarrés des demi-diametres conjugués quelconques* C M, C N, *est égale à la somme ou différence des demi-axes* C A, C B.

Des sommets M, N, soient tirées les appliquées M P, Q N, au premier axe A a, on aura $\overline{CM}^2 = uu + yy$, & $\overline{CN}^2 =$
* Art. 24. $zz + vv = {}^* \pm aa \mp uu$. Donc $\overline{CN}^2 \pm \overline{CM}^2 = zz$
* Art. 25. n. 4. $\pm yy = bb \pm aa$. On a la même chose par art. 30. n°. 19.
* Art. 22. n. 4. car $CM = \sqrt{aa \pm bb \mp rs}$, & $CN = {}^*\sqrt{rs}$.

THEOREME IX.

Fig. 39. 40. 46. *Le rectangle fait des parties d'une droite* L I *terminées dans une ellipse ou hyperbole, & par un diametre quelconque* M m, *est au rectangle fait des parties correspondantes de ce diametre comme le quarré du demi-diametre* N C, *parallele à cette droite, est au quarré de la moitié de ce premier diametre ; sçavoir* $LKI : MKm :: \overline{NC}^2 : \overline{MC}^2$.

Si des points K, N, l'on tire K F, N S paralleles à la tan-

gente MT, rencontrant le diametre A a, dont L l est l'ordonnée, en F, S, & le reste étant comme dans les fig. 31. 32. on aura KLE = * EMTV, ou FKMT = FKLV. Or comme $\overline{QL}^2 - \overline{QK}^2 : \overline{NC}^2 :: FKLV : NCS$, lorsque le point K tombe dans la figure, & $+ \overline{CM}^2 \mp \overline{CK}^2$ ou MKm : $\overline{MC}^2$ :: FKMT : CMT. Donc puisque FKMT = FKLV, & CMT = * NCS, il s'ensuit que LKl : MKm :: $\overline{NC}^2$: $\overline{MC}^2$. * Art. 36. * Art. 34.

Lorsque le point K tombe hors de la figure, la démonstration est à quelques signes près de même.

Si dans la parabole on tire l'appliquée M P au diametre A P, dont le parametre est $= 2p$, on aura * $2p \times AP = \overline{PM}^2$, & $2p \times AQ = \overline{LQ}^2$; ainsi $2p \times \pm \overline{AP \mp AQ} = \pm \overline{PM}^2 \pm \overline{QL}^2$, ou à cause que QK = PM, on aura $2p \times MK = LKl$. Fig. 41. * Art. 39.

COROLLAIRE I.

47. De là si la droite Hh, parallele au demi-diametre R C & terminée dans la section, coupe le diametre M m au même point K que la droite L l, on aura HKh : MKm :: $\overline{RC}^2$: $\overline{MC}^2$. Et comme LKl : MKm :: $\overline{NC}^2$: $\overline{MC}^2$, il s'ensuit que LKl : HKh :: $\overline{NC}^2$: $\overline{RC}^2$. Si $2q$ est le parametre du diametre dont Hh est l'ordonnée, on aura $2q \times MK = HKh$; & comme $2p \times MK = LKl$, il s'ensuit que LKl : HKh :: $2p \times MK : 2q \times MK :: p : q$. Fig. 39. 40. Fig. 41.

COROLLAIRE II.

48. Si dans une section conique quelconque, deux droites Hh, Gg, paralleles entr'elles & terminées dans la section, rencontrent une autre droite L l en K & P, en dedans ou en dehors de la section, on aura * LKl : HKh :: $\overline{NC}^2$: $\overline{RC}^2$, ou :: $p : q$, & LPl : GPg :: $\overline{NC}^2$: $\overline{RC}^2$, ou :: $p : q$; par conséquent LKl : HKh :: LPl : GPg. * Art. 47.

COROLLAIRE III.

49. Si dans une section conique quelconque la droite T D (le reste étant de même) parallele aux droites Hh, Gg, touche la section en D, & rencontre la droite L l prolongée en T,

en concevant que la droite H h devient la tangente D T, la
* Art. 48. proportion * L K l : H K h : : L P l : G P g, deviendra L T l : $\overline{DT}^2$: : L P l : G P g.

COROLLAIRE IV.

50. De là il suit, 1°. que si la droite R O, touche la section en A & rencontre la tangente D T en O, on aura L K l : H K h : : $\overline{BO}^2$: $\overline{DO}^2$.

2°. Si la droite A R, parallele à D O touche la section en A & rencontre la tangente R O en R & L l en S, on aura L S l : $\overline{AS}^2$: : $\overline{BR}^2$: $\overline{AR}^2$, & $\overline{AR}^2$: $\overline{BR}^2$: : $\overline{DO}^2$: $\overline{BO}^2$, ou A R : B R : : D O : B O.

3°. Si les droites G g, H h prolongées, rencontrent la tangente R O en F & M, on aura G F g : H M h : : $\overline{BF}^2$: $\overline{BM}^2$; d'où l'on voit en général que *de quelque maniere que deux droites paralleles entr'elles puissent rencontrer une troisiéme droite en dedans ou en dehors de la section, & que ces droites touchent ou coupent la section, les rectangles faits des parties de ces paralleles terminées par la section & l'autre droite, seront toujours entr'eux comme les rectangles faits des parties correspondantes de cette droite terminées dans la section & par ces paralleles.*

THEOREME X.

Fig. 43. 44. 51. *Les droites* n K, m H, *qui passent les extrêmités de deux ordonnées à un diametre* A a *quelconque d'une section conique aussi quelconque, rencontrent ce diametre au même point* T.

Car soient p & Q les intersections de ces ordonnées avec leur diametre, on aura à cause des paralleles, Q m — p H : Q p : : p H : p T, & Q n — p K : Q p : : p K : p T. Or comme Q m
* Déf. 4. = * Q n & p H = p K, il s'ensuit que Q m — p H = Q n — p K ; & par conséquent puisque les trois premiers termes de ces proportions sont égaux chacun à chacun, les quatriémes le seront aussi.

COROLLAIRE I.

52. De là il suit que si la ligne T m devient la tangente T M d'un côté, la ligne T n deviendra aussi la tangente T M de l'autre ; & par conséquent les ordonnées H K, m n tomberont sur la droite M M, qui joint les points touchans.

COROLLAIRE II.

53. Il est évident que si T m coupe M M en r, que T H : T m : : H r : $r m$. Car si K H , $n m$ prolongées, rencontrent la tangente T M en F & G, les paralleles G n, F K, donneront T F : T G : : H F : m G : : F K : G n; ou en multipliant, $\overline{TF}^2$: $\overline{TG}^2$: : H F K : m G n : : * $\overline{MF}^2$: $\overline{MG}^2$. Par conséquent T F : T G : M F : M G, ou T H : T m : : H r : $r m$. * Art. 50, n. 3.

COROLLAIRE III.

54. Lorsque la droite T m tombe sur le diametre A a, les parties T H, T m, T r deviendront T A, T a, T P, & la proportion précédente deviendra T A : T a : : P A : P a; ou si C T $= n$, C A $= a$, C P $= u$, $+ n \mp a : n + a : : + a \mp u : a + u$, ou $a a = n u$; c'est-à-dire, ÷ C P : C A : C T, dans l'ellipse ou l'hyperbole, & A T $=$ A P dans la parabole, parce que T a, P a deviennent infinies & égales dans ce cas.

COROLLAIRE IV.

55. Puisque les articles 18. 24. & 25. sont des conséquences tirées de l'équation $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa - uu$, par rapport à l'axe, & de la proportion précédente, & que cette équation aussi bien que cette proportion sont également vraies par rapport à un diametre quelconque, il s'ensuit que ces conséquences doivent aussi être vraies à l'égard de tout diametre.

COROLLAIRE V.

56. Puisque T H : T m : : H p ($= p$ K) : Q m, & H r : $r m$: : P p : P Q, on aura * p K : Q m : : P p : P Q; or comme les côtés adjacens aux angles égaux en Q & p sont proportionnels, les triangles m Q P, K p P, seront semblables; & par conséquent les côtés p P, P Q ne faisant qu'une même droite, les côtés K P, P m ne font non plus qu'une même droite. * Art. 53.

COROLLAIRE VI.

57. Si par le point T on tire la droite T V parallele aux ordonnées du diametre A a, rencontrant m K, prolongée dans l'ellipse, en V, on aura à cause des paralleles T m : T H : : V m : V K, & $r m$: r H : : P m : P K, & comme * T m : T H : : $r m$: r H, il s'ensuit que V m : V K : : P m : P K. * Art. 53.

COROLLAIRE VII.

58. De là il suit que si l'on tire une droite quelconque V *m* par le point P, ses parties V K, V *m*, terminées par la droite T V & la courbe, seront toujours entr'elles comme ses parties K P, P *m*, terminées par la courbe & le point P. Car si l'on suppose que les droites V *m*, T *m* tournent autour des points P & T, il est évident que pendant que l'intersection *m* parcourt l'arc M A M ou *n a m*, l'intersection V parcourra la droite T V.

COROLLAIRE VIII.

Fig. 45. 59. Si dans une section conique quelconque on tire d'un point D tel que l'on voudra de la droite T V (le reste étant de même) deux tangentes D *m*, D K, la droite K *m*, qui joint les points touchans, passera toujours par le point P. Car concevant une droite tirée par les points D & P, il est évident que ses parties
* Art. 58. terminées par la courbe & le point D seront entr'elles * comme celles qui sont terminées par la courbe & le point P; par
* Art. 53. conséquent *m* K passe * par le point P.

COROLLAIRE IX.

60. La droite H *d* qui touche la section en H, rencontre la droite P M prolongée au même point *t* que la tangente *m* D. Car à cause des paralleles *t* M, H K, T D, on a T D $=$ T *d*, puisque *p* H $=$ *p* K, & T H : H *r* : : T *d* : *r t*; de même T *m* :
* Art. 53. *r m* : : T D : *r t*. Or comme * T H : H *r* : : T *m* : *r m*, & que T D $=$ T *d*, il s'ensuit que les quatriémes termes seront aussi égaux; d'où l'on tire le theorême suivant.

THEOREME XI.

61. *Si dans une section conique quelconque on prend deux points* P, T *dans un diametre* A a *prolongé, tels que* $\div$ C P : C A : C T, *dans l'ellipse & l'hyperbole, &* A T $=$ A P *dans la parabole, & que l'on tire les droites* P t, T V, *paralleles aux ordonnées de ce diametre* A a; *toute droite, qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point de la droite* D V, *passera toujours par le point* P; *& toute droite, qui joint les points touchans de deux tangentes qui se rencontrent en quelque point de la droite* P t, *passera toujours par le point* T.

THEOREME

THEOREME XII.

62. *Les tangentes tirées de deux points* T, t, *du même diametre d'une ellipse ou hyperbole également distans du centre* C, *forment un parallelogramme.* Fig. 46. 47.

Ayant tiré les ordonnées M m, N n par les points touchans; on aura ÷ CP : CA : CT, & ÷ CQ : Ca : Ct; ainsi puisque CA = Ca, & CT = Ct, par hypothese, les droites CP, CQ, & par conséquent les appliquées Pm, QN, aussi bien que les soutangentes PT, Qt, seront égales. Donc les triangles TPm, tQN, seront semblables & égaux, & par conséquent les angles mTP, NtQ seront égaux. On prouvera de la même maniere que les angles MTP, n tQ sont égaux.

COROLLAIRE I.

63. Les parties DM, d n, des côtés du parallelogramme, entre les points touchans & les angles opposés, seront égales; car TD étant parallele & égale à t d, & TM = t n, il s'ensuit que DM = d n.

COROLLAIRE II.

64. Les diagonales Tt, Dd, seront deux diametres conjugués; car puisque MP, QN sont paralleles & égales, la droite MN sera parallele à QP, & ainsi les triangles tDT, NDM seront semblables, & par conséquent puisque Dd divise Tt par le milieu, elle divisera aussi MN par le milieu. Donc, &c.

THEOREME XIII.

65. *Dans une section conique quelconque, les quarrés des parties* LS, SN, *d'une droite, terminées par deux tangentes* TA, TC, *& par la droite* AC, *qui joint les points touchans, sont entr'eux comme les rectangles faits des parties de cette droite terminées par la courbe & les tangentes; sçavoir* $\overline{LS}^2 : \overline{SN}^2$ :: HLR : RNH. Fig. 48. 49. 50.

Ayant tiré du point L la droite LF parallele à une de ces tangentes TC, coupant la courbe en E, F, & AC en K, on aura * ELF : $\overline{LA}^2$ :: $\overline{TC}^2$: $\overline{TA}^2$; & à cause des paralleles LK, TC, on a $\overline{LK}^2$: $\overline{LA}^2$ :: $\overline{TC}^2$: $\overline{TA}^2$. Ainsi $\overline{LK}^2$ = ELF, & par conséquent ELF ou $\overline{LK}^2$: $\overline{CN}^2$ :: $\overline{LS}^2$: $\overline{SN}^2$ *, comme HLR : RNH. * Art. 50. n. 2. * Art. 50. n. 3.

Fig. 49. N. B. Lorſque L R eſt un diametre de la parabole, elle ne rencontre la courbe qu'en un ſeul point H; & ainſi N R, L R ſeront infinies & égales dans ce cas; par conſéquent $\overline{LS}^2 : \overline{SN}^2 ::$ H L × N R : HN × N R :: H L : H N.

COROLLAIRE I.

Fig. 50. 66. Si la droite L S, au lieu de couper la ſection ne fait que la toucher au point B, c'eſt-à-dire ſi L S devient la tangente lS; L H, L R deviendront $= lB$, & N R, N H $= nB$; de même S H, S R = S B. Et par conſéquent la proportion ci-deſſus deviendra ici $\overline{Sl}^2 : \overline{Sn}^2 :: \overline{Bl}^2 : \overline{Bn}^2$, ou $Sl : Sn :: Bl : Bn$.

COROLLAIRE II.

Fig. 51. 52. 67. Les diagonales M G, L N d'un trapeze M N G L, dont les côtés touchent une ſection conique quelconque, ſe coupent au même point S que les droites A C, B D, qui joignent les points touchans oppoſés. Car ſi la diagonale L N rencontre la courbe en H, R, on aura R N H : H L R :: $\overline{SN}^2 : \overline{SL}^2$, par rapport à la droite A C ou D B. On prouvera la même choſe à l'égard de la diagonale G M.

COROLLAIRE III.

68. Si les droites B C, A D, qui joignent les points touchans du même côté de la diagonale N L ſont prolongées, elles rencontreront encore la diagonale N L, prolongée s'il faut, au même

* *Art.* 65. point E. Car * $\overline{EN}^2 : \overline{EL}^2 ::$ R N H : H L R, par rapport à la ligne B C ou A D. Et comme R N H : H L R :: $\overline{SN}^2 : \overline{SL}^2 :: \overline{EN}^2 : \overline{EL}^2$, il s'enſuit que S N : S L :: E N : E L.

Fig. 52. N. B. La diagonale T K du trapeze N T L K, qui ne rencontre pas la courbe, coupe néanmoins l'autre diagonale N L au même point E que les lignes B C, A D; car nous venons de prouver qu'elle a les mêmes propriétés que la diagonale G M, ou L N.

THEOREME XIV.

Fig. 53. 69. *Si deux droites quelconques* N M, L E, *ſont paralleles entr'elles & terminées dans la parabole, les rectangles faits de leurs parties terminées par deux diametres* b D, m F, *ſeront entr'eux comme*

les parties de ces diametres entre leurs sommets & ces paralleles ; sçavoir MFN : EDL :: mF : bD.

Soit $2p$ le parametre du diametre AP auquel MN, EL sont ordonnées, on aura * $2p \times mF = MFN$, & $2p \times bD =$ EDL. Par conséquent MFN : EDL :: $2p \times mF : 2p \times bD :: mF : bD$. * *Art.* 46. n. 2.

COROLLAIRE I.

70. Si la ligne AH parallele à NM, touche la parabole en A & rencontre les diametres bD, mF prolongés en R & Q, en concevant que la ligne LE tombe sur cette tangente, on aura mF : bR :: MFN : $\overline{AR}^2$.

COROLLAIRE II.

71. Si le diametre bD coupe la droite NM en K, en concevant que la ligne LE tombe sur MN, on aura NKM : NFM :: bK : mF, & NKM : LDE :: bK : bD.

COROLLAIRE III.

72. De là on tire une maniere de décrire une parabole par trois points donnés N, m, M, lorsque la position des diametres est donnée. Car si l'on tire par le point m & par le point de milieu P de la ligne qui joint les deux autres points donnés, les diametres mF, AP, & si l'on fait MFN : $\overline{PM}^2$ :: mF : AP, on aura le sommet A du diametre AP. En faisant ∺ AP : PM : $2p$, on aura le parametre $2p$. Par conséquent on peut décrire la parabole par *l'art.* 43. *n°.* 2.

COROLLAIRE IV.

73. Si deux lignes DR, MN terminées dans la parabole, se coupent en L, & sont paralleles aux tangentes EB, AB, en E & A, & qu'après avoir tiré le diametre AP par le point touchant A, lequel rencontre BE en T, l'on tire du point N la ligne Nb parallele à AP, rencontrant RD prolongée en b, on aura * $\overline{EB}^2$ ou $\overline{TB}^2$: $\overline{AB}^2$ :: * RLD : MLN :: $\overline{Lb}^2$: $\overline{LN}^2$, ou RLD : ML :: $\overline{Lb}^2$: LN. Et si NQ parallele à RM, rencontre DR en Q, on aura ML : RL :: LN : LQ ; *ex æquo*, LD : 1 :: $\overline{Lb}^2$: LQ, ou $\overline{Lb}^2 = LD \times LQ$. *Fig.* 54. * *Art.* 22. * *Art.* 50.

COROLLAIRE V.

74. De là il suit qu'on peut décrire une parabole par quatre points donnés R, M, D, N : car supposant la construction précédente, si l'on fait L *b* moyen proportionnel entre L D & L Q, on aura la position *b* N des diametres, & par conséquent on achevera le reste comme dans *l'art.* 72.

N. B. Lorsque le point *b* peut être pris de deux côtés du point L, on peut décrire deux paraboles par les quatre points donnés ; mais lorsque le point *b* tombe sur le point R ou D, la construction est impossible, parce que le même diametre ne peut couper la parabole que dans un seul point.

DEFINITIONS.

Fig. 55. 14. Les droites T L, R V, qui passent par le centre C d'une hyperbole, & qui sont paralleles aux lignes B A, *b* A, qui joignent les sommets des axes A *a*, B *b*, sont nommées *asymptotes.*

15. Le quarré de la partie C D ou C H de l'asymptote, terminée par le centre & par la ligne qui joint les sommets des axes, est nommé la *puissance* de l'hyperbole.

COROLLAIRE I.

75. De là il suit que la tangente E F tirée par le sommet d'un axe & terminée par les asymptotes, est égale à l'axe auquel elle est parallele. Car à cause des paralleles B A, C H, on a B C $=$ A E ; & à cause des paralleles A *b*, D C, A F sera $=$ *b* C. Donc E F $=$ B *b*.

COROLLAIRE II.

76. Le quadruple de la puissance $\overline{CD}^2$ de l'hyperbole est égal à la somme des quarrés des deux demi-axes. Car à cause des paralleles B A, C H, on a C D $=$ H A $= \frac{1}{2}$ *b* A, ou 2 C D $=$ *b* A $=$ A B. Donc à cause du triangle rectangle A C B, $\overline{AB}^2$ ou $4\,\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$.

THEOREME XV.

Fig. 55. 77. *Si l'on tire une droite* M T *parallele à l'un des axes, je dis que le rectangle fait ses parties terminées par les asymptotes &*

par un point de la courbe, sera égal au quarré de la moitié de l'axe auquel elle est parallele, sçavoir T M R $= \overline{BC}^2$.

Car à cause des paralleles E F, T M, on a C A (a) : A E ou B C (b) :: C P (u) : P T $= \frac{bu}{a}$. Ainsi T M $=$ P T $+$ P M $= \frac{bu}{a} + y$, & M R $= \pm$ P T $\mp$ P M $= \pm \frac{bu}{a} \mp y$. Par conséquent T M R $= \pm \frac{bb}{aa} uu \mp yy = $ * bb. * *Art.* 31.

COROLLAIRE I.

78. De là il suit que si l'on tire deux droites rt, ad, paralleles entr'elles, les rectangles rMt, aNd, faits de leurs parties terminées par les asymptotes & les courbes, seront égaux. Car si les lignes N V, M T, paralleles à l'axe Bb, rencontrent les asymptotes en L, V, & R, T, on aura M R : Mr :: N V : N d, & M T : Mt :: N L : N a. En multipliant par ordre, R M T : r M t :: L N V : a N d. Or comme * R M T $=$ L N V, on aura aussi rMt $=$ aNd. * *Art.* 77.

COROLLAIRE II.

79. Si de deux points quelconques M, N, pris dans les courbes des hyperboles, on tire les lignes M a, N r paralleles entr'elles, aussi bien que les droites M d, N t, lesquelles rencontrant les asymptotes en a, r, d, t, le rectangle a M d fait des lignes tirées du même point de la courbe, sera égal au rectangle fait de celles tirées de l'autre. Car soient R, T, V, L, les points où les deux lignes tirées par les points M, N, paralleles entr'elles, rencontrent les asymptotes, on aura M R : M a :: N L : N r, & T M : M d :: N V : Nt : en multipliant par ordre, R M T : aMd :: L N V : rNt. Or comme * R M T $=$ L N V, il s'ensuit que a M d $=$ rNt. *Fig.* 56. * *Art.* 77.

COROLLAIRE III.

80. Si les lignes M a, N r sont paralleles à l'asymptote T V, & M d, N t à l'asymptote R L, on aura C a $=$ d M & C r $=$ t N, & par conséquent C a M $=$ C r N. Si la ligne K g, qui joint les sommets des axes, coupe l'asymptote R L en I, & si C I $=$ I K $= n$, C $a = x$, a M $= y$, en concevant que la ligne r N tombe sur la ligne I K, on aura $nn = xy$ pour l'équation de l'hyperbole par rapport aux asymptotes.

COROLLAIRE IV.

Fig. 56. 81. Toute tangente E F à l'hyperbole terminée par les aſymptotes, eſt diviſée en deux également par le point touchant, & eſt égale au diametre B b auquel elle eſt parallele. Car ſi les lignes S T, V L paralleles à E F, rencontrent les aſymptotes en R, T & V, L, & les courbes en S, X, & N, n; à cauſe que

* Art. 78. R S T = * T X R = L N V = V n L, lorſque la ligne S T tombera ſur le diametre B b, & V L ſur la tangente E F, ces égalités deviendront $\overline{BC}^2 = \overline{bC}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{AF}^2$, ou B C = A E = A F.

COROLLAIRE V.

82. Les parties S R, T X, ou n V, L N d'une droite, terminées par les aſymptotes & de la même courbe de l'une des hyperboles, ou par celles des hyperboles oppoſées, ſont égales en-

* Art. 78. tr'elles. Car puiſque * L N V = V n L, ou L N × $\overline{Nn + nV}$ = n V × $\overline{Nn + NL}$, on aura L N × N n = n V × N n; donc L N = n V. On prouvera de la même maniere que S R = T X.

COROLLAIRE VI.

83. Les lignes A B, A b, qui joignent les ſommets de deux diametres conjugués quelconques A a, B b, ſont paralleles aux aſymptotes, & diviſées en deux également par ces aſymptotes. Car

* Art. 81. à cauſe que A E eſt * parallele & égale à B C, la ligne B A ſera parallele à l'aſymptote C H, & ainſi A b ſera diviſée en deux également en H, puiſque b C = C B. De même A F étant parallele & égale à b C, la ligne b A ſera parallele à l'aſymptote C D, & par conſéquent A D = D B.

COROLLAIRE VII.

84. Les aſymptotes d'une hyperbole étant données, on peut tirer une ligne E F qui la touche en un point donné A. Car ſi l'on tire la ligne A D parallele à l'aſymptote C H, & que l'on prenne D F = D C, la ligne tirée par les points A & F ſera la tan-

* Art. 81. gente demandée; car * A E = A F; donc C D = D F.

COROLLAIRE VIII.

85. Deux diametres conjugués quelconques A a, B b d'une

hyperbole étant donnés, on trouvera les axes Kk, Gg, si après avoir tiré l'asymptote C E par le milieu H de A b, & pris C I moyenne proportionnelle entre * C H & H A, on tire g I K parallele à H A, & que l'on fasse I K = I g = I C; les lignes tirées par le centre & les points g & K, seront les axes cherchés. * Art. 80.

COROLLAIRE IX.

86. Puisque les côtés adjacens aux angles égaux H, I, sont réciproquement proportionnels *, il s'ensuit, 1°. que les triangles C A H, C K I, sont égaux; & par conséquent le parallelogramme dont les côtés touchent les hyperboles & qui sont paralleles à deux diametres conjugués, est = 4 C E F = 4 b C A. 2°. La différence des quarrés de deux diametres conjugués C A, C b, proportionnelle à 4 C H × H A, sera aussi donnée, ce qui a déja été prouvé ci-devant. * Art. 80.

REMARQUE.

Si les lignes P M *sont des appliquées au diametre* C A *conjugué à* B C, *la ligne* A E *tangente en* A, C N *une asymptote*, *&* B b *parallele à* C A, *&* *coupant les appliquées en* b, b; *cela posé, puisque* * $\pm \overline{PN}^2 \mp \overline{PM}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2$, ou $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 \mp \overline{BC}^2$, *il est évident que le quarré de* P M, *ou la surface décrite par* P M *dans la révolution de la figure autour de l'axe* C P, *sera égal au quarré* $\overline{PN}^2$, *ou à la surface décrite par* P N, *diminuée ou augmentée par le quarré* $\overline{BC}^2$, *ou par la surface décrite par* B C *dans cette révolution; & comme cela arrive toujours, le solide, décrit par l'espace* A M P *dans cette révolution, sera égal à la différence entre le cone tronqué décrit par l'espace* A E N P, *& le cylindre décrit par le parallelogramme* A E b P. Fig. 57. * Art. 77. 78.

Et le solide décrit par l'espace C B M P, *sera égal au cone décrit par le triangle* C P N, *plus au cylindre décrit par le parallelogramme* C B b P.

THEOREME XVI.

87. *Si dans l'hyperbole on tire une droite* B D *parallele à une des asymptotes* C T, *laquelle rencontrant tant la tangente au point* A, *en* F, *que la courbe en* B *&* *l'ordonnée* M N *au diametre* A a *en* P; *le rectangle fait de* B P *&* *d'une constante, sera au rectan-* Fig. 58. 59.

gle N P M, *fait des parties de cette ordonnée, dans un rapport donné, sçavoir* 2 B P × P Q : N P M :: C E : A E.

Fig. 58. Soient E, T, Q, les points de rencontre de l'asymptote avec la tangente F A, & les ordonnées B B, N M; & K, L les intersections de ces ordonnées avec leur diametre A *a*. Cela posé, si C E $= a$, A E $= b$, B D $= c$, P D $= x$, P M $= y$, B T $=$ P Q $= r$; les triangles semblables C A E, D L P, D K B, donneront P L $= \frac{bx}{a}$, B K $= \frac{bc}{a}$; ainsi * Q L $= r \mp \frac{bx}{a}$, M L $= y \mp \frac{bx}{a}$, T K $= r \mp \frac{bc}{a}$. Ces valeurs étant substituées dans

* Art. 78. * (T B B $=$ Q M N) $\overline{TK}^2 - \overline{KB}^2 = \overline{QL}^2 - \overline{ML}^2$, donneront $\mp \frac{2bcr}{a} = \mp \frac{2brx}{a} \pm \frac{2bxy}{a} - yy$, après la réduction; ou $yy \mp \frac{2bxy}{a} = \frac{2br}{a} \times \overline{\pm C \mp x}$. Par conséquent 2 B P × P Q $(\pm 2rc \mp 2rx)$: N P M $(yy \mp \frac{2bxy}{a})$ :: C E (a) : A E (b). En changeant tous les signes, la proportion servira pour la figure 59.

COROLLAIRE.

88. De là il suit que si la droite *m n* parallele à M N, coupe la courbe en *m*, *n*, la ligne B P en *p*, & l'asymptote en *q*, on aura 2 B P × P Q : M P N :: 2 B *p* × *p q* : *m p n* :: *a* : *b*. Et en concevant que la ligne *m n* tombe sur la tangente A F, on aura 2 B P × P Q : M P N :: 2 B F × F E : $\overline{AF}^2$. Car B *p* devient dans ce cas $=$ B F, & *p m* $=$ *p n*, $=$ A F.

THEOREME XVII.

Fig. 60. 61. 89. *Si une droite* L L *terminée dans une ellipse ou hyperbole, coupe deux diametres conjugués* M m, N n *quelconques, en dedans ou en dehors de la section, le rectangle fait de ses parties, terminées par ces diametres & par celui auquel elle est ordonnée, plus ou moins le quarré de la moitié de cette ligne, sera égal au quarré du demi-diametre* B C *parallele à cette ligne, sçavoir* a R d $\pm \overline{RL}^2 = \overline{BC}^2$.

Si par les sommets M, N des diametres M *m*, N *n*, on tire les appliquées M P, N Q au diametre A *a*; & si C Q $= v$, Q N $= z$, C P $= u$, P M $= y$, les paralleles L L, N Q, P M, donneront *a* R $= \frac{y}{u}$ C R, *d* R $= \frac{z}{v}$ C R. Ainsi *a* R *d*.

$= \frac{yz}{uv}\overline{CR}^2$, ou à cause que * $\frac{yz}{uv} = \frac{bb}{aa}$, $aRd = \frac{bb}{aa}\overline{CR}^2$, & par conséquent $\overline{CR}^2(\frac{bb}{aa}) \pm \overline{RL}^2 = aRd \pm \overline{RL}^2 =$ * $\overline{BC}^2$. * Art. 25. n. 11. * Art. 39.

II. Lorsque la ligne R *a* tombe sur la tangente A E, R L devient $= 0$, R $d =$ A F, & $aRd \pm \overline{RL}^2$ deviendra $=$ F A E $= \overline{BC}^2$.

III. Et lorsque A E $=$ A F, dans l'ellipse, on aura R $a =$ R d, & $\overline{aR}^2 + \overline{RL}^2 = \overline{AF}^2$.

REMARQUE.

Soit A B C *un quart d'ellipse*, C A, C B, *deux demi-diametres conjugués*, A F *parallele & égale à* C B; *si les appliquées* R L *au diametre* A C *rencontrent en* b *la droite qui joint les points* B, F *& le diametre* C F *en* a, *on aura* * $\overline{BC}^2 = \overline{aR}^2 + \overline{RL}^2$, ou $\overline{RL}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{aR}^2$. *C'est pourquoi la surface décrite par* R L *dans la révolution de la figure autour de l'axe* A C, *sera toujours égale à la différence entre les surfaces décrites par* B C *ou* b R & a R. *Or comme cela arrive toujours, le solide décrit par l'espace* C B L R *sera égal à la différence entre le cylindre décrit par l'espace* R C B b, *& au cone décrit par le triangle* C R a. Fig. 62. * Art. 89. n. 3.

Et par conséquent le solide décrit par le quart d'ellipse A B C, *sera égal à la différence du cylindre circonscrit & du cone inscrit; par conséquent égal aux deux tiers du cylindre de la même base & de la même hauteur.*

PROBLEME III.

90. *Décrire la circonférence d'un cercle par deux points donnés* C, G, *ensorte que le segment terminé par une droite* E F *donnée de position, soit capable de contenir un angle donné.* Fig. 63. 64.

Soit *o* le centre du segment qui contient l'angle donné, & soit tirée la corde *e f* & les rayons *o e*, *o f*: cela posé, si l'on coupe la ligne * C G au milieu L par la perpendiculaire O L, qui rencontre la droite E F en H, & que l'on tire H G; & si après avoir tiré L B, ensorte que l'angle L B H soit égal à l'angle *o e f*, on porte L B du point L en quelque point D sur H G, la droite tirée du point G parallele à D L, coupera H L au centre O du cercle cherché. Fig. 65. * Fig. 64.

Si l'on tire O E parallele à L B, on aura, à cause des paralleles L D, O G & L B, O E; H L : H O :: L D : O G ::

L B : O E. Or L D = L B par constr. Donc O G = O E = O C ; par conséquent le cercle décrit du centre O par le point G, passera aussi par les points C, E ; & comme l'angle O E A est égal à l'angle L B A = oef par constr. le segment E C F sera capable de contenir l'angle donné.

N. B. I. Si la ligne L B peut être portée du point L à deux points différens de H G, le problême aura deux solutions ; & si on ne peut la porter à aucun, le problême sera impossible.

II. Si l'angle donné est droit, le centre O tombera au point H. Car E F sera alors un diametre aussi bien que la ligne L H prolongée ; & par conséquent leur intersection H sera le centre.

III. Si C G coupe E F à angles droits, L O sera alors parallele à E F, & L O = B E, L B = O E ; c'est pourquoi les arcs de cercle décrits des centres C, G, avec le rayon B L, se couperont au centre O.

IV. Si le point L tombe au point A, & ainsi la ligne G H sur G A, on tirera d'un point quelconque de la ligne H O, excepté le point A, la ligne L B de la même maniere que ci-dessus, laquelle étant portée du point L en quelque point sur C G, le reste s'achevera comme ci-dessus.

Fig. 64. V. Si les points C & G tombent l'un sur l'autre, ensorte que C G devienne tangente en L, alors H G deviendra = H L,
* Art. 90. O L = O G, H D = H L + L D = * L B. C'est pourquoi la porportion H D : H G :: L D : O G se changera ici en L H + L B : H L :: L B : L O.

Fig. 65. VI. L'angle oef est égal à la différence entre l'angle donné ecf & un angle droit. Car la moitié de l'arc fne sera la mesure de l'angle donné, & la moitié de fr, terminée par eo prolongée, la mesure de l'angle oef ; par conséquent la moitié rne de la circonférence sera la mesure de leur différence.

COROLLAIRE I.

Fig. 63. 91. De là on peut trouver deux points E, F dans une droite donnée de position, tels qu'en tirant des droites de ces points à deux autre R, C donnés, l'angle F C E soit égal à un angle donné, & F R E un angle droit. Car si l'on tire par les points C & A, où la perpendiculaire R A sur E F rencontre cette ligne, une droite C A G, & que l'on prenne le point G, tel que ÷ C A : A R : A G, la circonférence de cercle décrite par les points C, G, telle que le segment terminé par la droite E F soit capa-

ble de contenir l'angle donné, coupera la droite E F aux points demandés. Car par la propriété du cercle E A F = C A G égal à $\overline{AR}^2$, par constr. par conséquent puisque ÷ E A : AR : A F, l'angle E R F sera droit.

COROLLAIRE II.

92. Deux diametres conjugués quelconques d'une ellipse ou hyperbole étant donnés, on en peut trouver deux autres tels que l'angle qu'ils font entr'eux soit donné. Car si dans l'un de ces diametres A *a* prolongé dans l'ellipse, on prend le point G tel que ÷ A C : B C : A G, & que l'on tire par le sommet A la ligne E F parallele à l'autre B*b*; & si après avoir décrit une circonférence de cercle par les points C, G, ensorte que le segment E C F puisse contenir l'angle donné, les diametres N *n*, M *m*, qui passent par les intersections E, F de la circonférence & de la droite E F, seront les diametres demandés. Fig. 66. 67.

Car par la propriété du cercle C A G = E A F est égal à $\overline{BC}^2$ par construction; par conséquent M *m*, N *n*, seront deux diametres conjugués *, & N C M sera égal à l'angle donné. * Art. 89. n. 2.

Si l'on tire l'appliquée A P au diametre M *m*, & que l'on prenne C M, C *m* chacune égale à la moyenne proportionnelle entre C P & C F, les points M, *m* seront les sommets * de ce diametre. On trouvera de la même maniere les sommets N, *n* du diametre N *n*. * Art. 14.

COROLLAIRE III.

93. Outre la construction générale & celle de l'art. 90. n°. 2. on peut encore trouver les deux axes de la maniere qui suit. Par le sommet A de l'un des diametres donnés, soit tirée la ligne A *k* perpendiculaire à son conjugué B *b*; & sur le milieu de C G, la différence dans l'ellipse ou la somme dans l'hyperbole de A C & de son parametre, soit tirée une perpendiculaire sur C G; & de son intersection O avec A *k*, comme centre, soit décrite une circonférence de cercle par le centre C de la section; les diametres M *m*, N *n*, qui passent par les intersections K *k* de la circonférence & de A *k*, seront les axes demandés. Car la propriété du cercle donne C A G = *k* A K, & les triangles rectangles semblables K A F, *k* A E donnent A K : A F :: A E : A *k*, ou *k* A K = E A F égal à $\overline{BC}^2$ par constr. Par conséquent M *m*, N *n*, seront deux diametres * conjugués, & K C *k* un angle droit. Fig. 68. 69. * Art. 89. n. 2.

COROLLAIRE IV.

Fig. 70. 94. Si dans la parabole on tire la droite E F par le sommet A, parallele aux ordonnées du diametre A P, & si la partie A O de ce diametre, prolongé vers le haut, est égale à la moitié de son parametre, & que l'on décrive du centre O un arc de cercle tel que les angles O E F, O F E, soient chacun égal à l'angle donné; le diametre qui passe par l'intersection E ou F, sera celui qui fera l'angle donné avec ses ordonnées. Car si des sommets A, M, on tire les appliquées A Q, M P, aux diametres M Q, A P, on aura * $MQ = MF = AP = x$, $AF = PM = y$; & comme * $2px = yy$, on aura F Q ($2x$) : A F (y) :: A F (y) : A O (p); par conséquent puisque les côtés adjacens aux angles égaux Q F A, O A F sont proportionnels, les triangles Q F A, F A O seront semblables, & l'angle F Q A sera égal à l'angle D F O.

* Art. 54.
* Art. 39. n. 2.

Si l'arc de cercle touche seulement la ligne E F au point D, les diametres E L, F M tomberont sur l'axe D p. Car en tirant A p perpendiculaire sur D p, les triangles rectangles semblables A D O, A p D, donneront p D ($2x$) : A D (y) :: A D (y) : A O (p), ou $2px = yy$.

N. B. On pourroit encore donner ici plusieurs problêmes curieux touchant les diametres conjugués; comme, par exemple, deux diametres conjugués étant donnés, trouver la position d'un autre aussi donné de grandeur, avec la position & la grandeur de son conjugué, ou en trouver deux autres dont la somme, la différence, le rapport, ou le rectangle faits de ces diametres, soit donnée; mais comme cela nous meneroit trop loin, nous n'ajouterons que le premier, auquel les autres se peuvent réduire fort aisément.

Fig. 68. 69. Supposons que les deux diametres conjugués M m, N n soient donnés, & qu'il faille trouver la position du diametre A a donné de grandeur, aussi bien que la position & la grandeur de son conjugué B b. Si l'on nomme C M, m, & n la perpendiculaire tirée du sommet M au diametre N n, C A, r, & z la perpendiculaire tirée du sommet A au diametre B b: cela posé, on aura * $nm = rz$; ainsi connoissant z, il est clair que l'on connoîtra aussi l'angle A C b, que ces diametres doivent faire entr'eux, puisque dans le triangle rectangle on a l'hypotheneuse C A (r) ou le sinus total & le sinus z de l'angle A C b. Par

* Art. 44.

conséquent on peut trouver la position des diametres A a, B b aussi bien que la grandeur de B b, par l'art. 92.

THEOREME XVIII.

95. *Si d'un point quelconque E de la courbe d'une section conique, on tire des lignes sur les côtés d'un trapeze ABCD inscrit dans la section, paralleles à des lignes données de position, le rectangle QER fait de celles qui tombent sur les côtés opposés, sera au rectangle SET, fait de celles qui tombent sur les autres côtés opposés, dans un rapport constant.* Fig. 71. 72. 73.

Premier cas. Soient les côtés A B, DC & les droites E R, E Q paralleles entr'elles, de même que les droites E S, E T, & le côté B C. Si l'on prolonge E Q jusqu'à la rencontre de la courbe en K, on aura K Q = E R, puisque le diametre L V, auquel A B, D C sont ordonnées, divise E K, aussi bien que R Q, par le milieu. Par conséquent E Q K ou son égal R E Q, sera à B Q C ou son égal S E T, dans le rapport constant * des quarrés faits des tangentes paralleles à ces lignes. Fig. 71. * Art. 50. n. 1.

Deuxième cas. Soient le côté A B & les droites E R, E Q paralleles, de même que le côté B C & les lignes E S, E T. Si les lignes C t, D n, paralleles à A B, coupent la courbe en d, n, & les lignes E T, C B en t, N; & si la droite qui joint les points A, d, coupe E Q & D N en r, M; les triangles semblables C T t, D C N, donnent C t ou E Q : T t :: D N : C N. Et les triangles semblables A r R, A M D, donnent R r : D M :: A r : A M. Or à cause des paralleles S T, B C & A B, E Q, D N, on a S E = B Q, & B Q ou S E : B N :: A r : A M :: R r : D M, ou R r : S E :: D M : B N. En multipliant par ordre cette derniere proportion avec la premiere, on aura E Q × R r : S E × T t :: N D M : B N C, comme r E Q : S E t par le premier cas; & en divisant, E Q × $\overline{rE - Rr}$: S E × $\overline{Et - Tt}$, ou R E Q : S E T :: N D M : B N C. Fig. 72.

Mais comme N n = D M, N D M sera = D N n; & par conséquent les rectangles R E Q, S E T, seront dans le rapport constant de * D N n à B N C. * Art. 51. n. 1.

Troisiéme cas. Si l'on tire les lignes E q, s E t, la premiere parallele au côté A B, & la derniere au côté B C, lesquelles rencontrant les côtés du trapeze, prolongés s'il le faut en r, q, s, t: cela posé, il est évident que tous les angles des triangles q E Q, r E R, s E S & t E T sont donnés, puisque tous les côtés sont Fig. 73.

donnés de position ; & ainsi les rapports de ces mêmes côtés seront aussi donnés : par conséquent aussi le rapport de QER à qEr & de SET à sEt. Or le rapport de qEr à sEt, est donné par le premier cas. Donc le rapport de QER à SET sera aussi donné.

COROLLAIRE I.

Fig. 74. 96. De là il suit que si le rapport des rectangles QER, SET est donné, le reste étant comme ci-dessus, on peut toujours trouver tant de ces points E de la courbe que l'on voudra. Car si l'on tire de l'un des angles C du trapeze, une droite CH, laquelle rencontre AD en I & AB prolongée en H : cela posé, puisque tous les angles de la figure sont donnés, le rapport de EC à EQ, de EC à ET, & par conséquent le rapport de EQ à ET est donné : en divisant le rapport donné des rectangles QER, SET, par celui de EQ à ET, on aura le rapport de ER à ES ; & en ajoutant le rapport de EI à ER & de ES à EH, on aura celui de EI à EH, & par conséquent le point E, puisque IH est donnée.

COROLLAIRE II.

Fig. 72. 97. Si le parallelogramme BQES, dont les points angulaires opposés B & E touchent la courbe d'une section conique, est donné ; & si des intersections C, A, des côtés adjacens à l'un de ces angles avec la courbe, on tire des lignes à un autre point D tel qu'on voudra de la courbe, les parties ER, ET des deux autres côtés du parallelogramme, terminées par les lignes CD, AD, seront toujours dans un rapport donné. Car puisque dans * Art. 95. cas 2. la proportion * REQ : SET :: NDM : BNC, les lignes EQ, ES sont données, aussi bien que le rapport de NDM à BNC ; celui de ER à ET sera aussi donné.

COROLLAIRE III.

Fig. 72. 98. De là en tirant des points A, C, des lignes Ad, Cd, à quelqu'autre point d de la courbe, lesquelles rencontrent les côtés EQ, ES du parallelogramme BSEQ en r & t, on aura * ER : ET :: Er : Et. Et si les lignes * ER, ET font des angles donnés avec les côtés Eq, Es du parallelogramme Bs Eq, leur rapport sera encore donné, puisque celui de Er à ER, de Et à ET, & celui de Er à Et est donné.

* Art. 97.
† Fig. 73.

COROLLAIRE IV.

99. Si l'on suppose que le point d tombe au point C, la ligne A d deviendra la ligne A C, & la ligne C d touchera seulement la courbe en C. C'est pourquoi si la ligne A C coupe la ligne E Q en m, on aura E R : E T :: E m est à la partie de E T entre le point E & la tangente. Mais si la ligne D C tombe sur A B, les lignes A D, B C deviendront alors deux tangentes aux points A & B, & E T deviendra = E S. C'est pourquoi le rapport de $\overline{ES}^2$ à R E Q sera donné. Fig. 78.

COROLLAIRE V.

100. De là on pourra trouver le lieu de tous les points E, en supposant le rapport des rectangles faits des lignes tirées de ces points E, aux côtés opposés donnés. Car si l'on tire une tangente * par un des points angulaires B du trapeze A B C D, & d'un autre point A, la ligne A H parallele à cette tangente, dont il faut trouver l'intersection * H avec la courbe; cela fait, la ligne B F tirée par le milieu G de A H, sera un diametre qui sera déterminé en trouvant * son sommet F : c'est pourquoi le rectangle B G F sera à $\overline{GH}^2$, comme B F est à son parametre; par conséquent la courbe pourra être décrite par l'article 43. Fig. 78. * Art. 95. * Art. 96. * Art. 98.

THEOREME XIX.

101. *Dans une section conique quelconque, les segmens* B M E O, D M F O, *terminés par la courbe & par deux droites, qui joignent les intersections de deux paralleles* B D, E F, *avec la courbe, seront égaux.* Fig. 76. 77.

Car le diametre H K divisant les lignes E F, B D, en deux également, de même que toutes les lignes M M, M M, qui leur sont paralleles, aussi bien que ces mêmes lignes, prolongées s'il le faut, & terminées par les lignes F D, E B; c'est pourquoi puisque toutes les lignes correspondantes M O sont toujours égales les unes aux autres, les segmens B M E O, D M F O, seront aussi égaux.

COROLLAIRE I.

102. De là il suit qu'ajoutant ou retranchant aux triangles égaux D E B, B F D, les segmens E M B O, F M D O, qui sont aussi égaux, les sommes ou différences D B M E, B D M F, seront encore égales.

COROLLAIRE II.

Fig. 76. 103. Si l'on ajoute le segment B A D aux espaces égaux E M B D, F M D B, le segment E B A D sera égal au segment F D A B. Mais si la ligne B D, au lieu de couper la section, ne fait que la toucher au point A, il est évident que le segment E B A E sera égal au segment F D A F.

COROLLAIRE III.

104. De là il s'ensuit que l'on pourra toujours trouver dans une section conique deux segmens E B A E, F D A F, tels que chacun d'eux soit égal à un segment donné B A D. Car si l'on tire B F parallele à A D, & D E parallele à A B, les segmens A B A, D M F O D étant entre les mêmes paralleles A D, B F, aussi bien que les triangles B A D, A D F, seront * égaux:

* Art. 101. donc F D A F = B A D. On prouvera de la même maniere que E B A E = B A D.

THEOREME XX.

Fig. 78. 79. 80. 105. *Les secteurs* D C F, B C E *d'une ellipse ou hyperbole, terminés par des lignes tirées du centre aux intersections de deux paralleles* B D, E F, *avec la courbe, seront égaux.*

Car si l'on tire le diametre C A par les milieus H, K des paralleles B D, E F; & si les lignes C E, C F rencontrent B D, prolongée s'il est nécessaire, en *n* & *r*; il est évident que les espaces E B *n*, F D *r*, étant les différences entre les trapezes égaux E *n* H K, F *r* H K, & les segmens égaux E B H K, F D H K, sont égaux. Or comme les triangles C B *n*, C D *r*, ayant des bases égales B *n*, D *r*, & la même hauteur C H, sont aussi égaux, le secteur D C F sera égal au secteur B C E.

COROLLAIRE I.

Fig. 78. 80. 106. Si l'on suppose que la ligne B D se meut toujours parallelement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle devienne une tangente en A, il est évident que le secteur A C F sera égal au secteur A C E.

COROLLAIRE II.

107. De là il suit que si l'on tire le diametre C A par le milieu K de la ligne qui joint les jambes d'un secteur E C F, on aura le secteur E C A égal au secteur F C A.

COROLLAIRE III.

108. Si des points F, D, B, E, où les lignes qui terminent des secteurs égaux FCD, BCE, rencontrent la courbe d'une hyperbole, on tire des lignes paralleles à une des asymptotes CT, & rencontrant l'autre en G, H, K, L, on aura CG : CH :: CK : CL. Car les lignes tirées par les points D, B, & F, E, & qui rencontrent les asymptotes en Q, M, & P, N, seront * paralleles; & si l'on tire DS, FT, paralleles à l'asymptote CL, rencontrant l'autre en S, T, les triangles DQS, MBK, & FPT, NEL, seront semblables & égaux, puisque * PF = EN & QD = BM. C'est pourquoi TF : SD, ou CG : CH :: PT : QS, ou EL : BK :: * CK : CL, ou CG : CH :: CK : CL. *Fig.* 81. * *Art.* 101. * *Art.* 82. * *Art.* 80.

COROLLAIRE IV.

109. De là il suit que si les lignes CG, CH, CK, sont en progression géométrique, les secteurs FCD & DCB seront égaux. Car si l'on suppose dans la proportion précédente, que CH soit = CK, & que CL devienne = CK, on aura CG : CH :: CH : CK; & le secteur DCE deviendra le secteur BCD = DCF.

COROLLAIRE V.

110. Si dans une asymptote CN d'une hyperbole, on prend tant de parties CG, CH, CK, CL, &c. que l'on voudra, qui soient en progression géométrique; les secteurs correspondans FCD, DCB, BCE, &c. seront égaux. Car puisque ∺ CG : CH : CK, les secteurs FCD, DCB seront égaux; & parce que ∺ CH : CK : CL, les secteurs DCB, BCE, seront égaux, & ainsi à l'infini.

COROLLAIRE VI.

111. Par conséquent si CH est la premiere de deux moyennes proportionnelles entre CG & CL, le secteur FCD sera au secteur FCE comme 1 est à 3; & en général, si *m* est un nombre entier quelconque, & CH la premiere de tant de moyennes proportionnelles entre CG & CL qu'il y a d'unités dans $m - 1$, le secteur FCD sera au secteur FCE comme 1 est à *m*.

E

COROLLAIRE VII.

112. Si $CG : CH :: \overline{CK}^2 : \overline{CL}^2$, le secteur FCD sera au secteur BCE comme 2 est à 1. Car si CV est prise telle que ÷ CV : CK : CL, ou $CV \times CL = \overline{CK}^2$, & que l'on tire la ligne VO parallele à CT, rencontrant la courbe en O, le secteur OCB sera égal au secteur * BCE; ou en composant, OCE : BCE :: 2 : 1. Et comme $CG : CH :: \overline{CK}^2$ ou $CV \times CL : \overline{CL}^2 :: CV : CL$, les secteurs FCD, OCE seront * aussi égaux. Donc FCD : BCE :: 2 : 1.

* Art. 109.

* Art. 108.

Mais si $CG : CH :: \overline{CK}^3 : \overline{CL}^3$, le secteur FCD sera au secteur BCE comme 3 est à 1. Car si $CV \times \overline{CL}^2 = \overline{CK}^3$, le secteur OCB sera au secteur BCE comme 2 est à 1; ou en composant, OCE : BCE :: 3 : 1. Et à cause que $CG : CH :: \overline{CK}^3$ ou $CV \times \overline{CL}^2 : \overline{CL}^3 :: CV : CL$, les secteurs FCD & OCE seront égaux. Par conséquent OCE ou FCD : BCE :: 3 : 1.

En général, si m exprime un nombre entier quelconque, & si $CG : CH :: \overline{CK}^m : \overline{CL}^m$, on prouvera de la même maniere que FCD : BCE :: m : 1.

COROLLAIRE VIII.

113. Si $\overline{CK}^m : \overline{CL}^m :: \overline{CS}^n : \overline{CT}^n$, on aura BCE : DCF :: $n : m$. Car si $CV : CK :: \overline{CK}^m : \overline{CL}^m$, on aura * BCE : OCB :: $1 : m$, & OCB : DCF :: $n : 1$; *ex æquo*, BCE : DCF :: $n : m$.

* Art. 112.

COROLLAIRE IX.

114. Il est aussi évident que chaque trapeze hyperbolique DHKB est égal au secteur correspondant DCB. Car si l'on ôte la partie commune ACH des triangles égaux * BCK, DCH, & que l'on ajoute de part & d'autre l'espace curviligne ABD, on aura DHKB = DCB.

* Art. 86.

COROLLAIRE X.

115. De là il suit qu'il est évident que tout ce que nous avons dit à l'égard des secteurs hyperboliques doit aussi s'entendre des trapezes hyperboliques DHKB, qui leur sont égaux.

THEOREME XXI.

116. *S'il y a deux hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent le même centre* C *& le même demi-diametre* AC; *& si l'on tire du centre aux extrêmités d'une appliquée* PN, *deux lignes* CN, CM, *les secteurs* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *terminés par ces lignes & le demi-diametre de cette appliquée, seront entr'eux comme les conjugués* BC, DC *de ce diametre* AC. Fig. 82. 83.

Car puisque $\overline{PM}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{PN}^2 : \overline{DC}^2$, ou PM : PN :: BC : DC, comme cela arrive toujours, & que les triangles CPM, CPN, ayant la même base CP, sont comme leurs hauteurs PM, PN, ou comme BC, DC, il s'ensuit que CAM : CAN, ou CBM : CDN :: BC : DC.

DEFINITION 16.

Deux figures curvilignes sont appellées *semblables*, lorsqu'on peut toujours y inscrire deux polygones semblables.

COROLLAIRE.

117. De là il suit que les espaces contenus par des figures curvilignes semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car en concevant des polygones semblables inscrits dans ces figures d'un nombre infini de côtés, il est évident que le rapport de ces polygones peut être pris pour celui des figures mêmes.

THEOREME XXII.

118. *S'il y a deux hyperboles* BL, DN, *qui ayent le même centre* C, *& dont les deux demi-diametres* CB = a, CD = b, *soient proportionnels à leurs parametres* p, q; *& si par les points de rencontre* L, N *d'un demi-diametre quelconque avec les courbes, on tire deux appliquées* Lp, NP, *sur l'un des diametres que l'on voudra; les espaces* CBLp, CDNP, *terminés par les courbes, les coordonnées & les demi-diametres conjugués, seront entr'eux comme les quarrés des demi-diametres* CB, CD *paralleles à ces ordonnées.* Fig. 83.

Car puisque * $\frac{a}{p}\overline{Cp}^2 = \overline{pL}^2 - \overline{CB}^2$ & $\frac{b}{q}\overline{CP}^2 = \overline{PN}^2 -$ * Art. 39.

$\overline{CD}^2$, on aura $\frac{a}{p}\,\overline{Cp}^2 : \frac{b}{q}\,\overline{CP}^2$, ou $\overline{Cp}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{pL}^2 - \overline{CB}^2 : \overline{PN}^2 - \overline{CD}^2 :: \overline{pL}^2 : \overline{PN}^2$; & en divisant, $\overline{CB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{pL}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{CL}^2 : \overline{CN}^2$; par conséquent les lignes B L, D N seront toujours paralleles, & ainsi les hyperboles B L M, D N seront semblables : donc les secteurs C B L, C D N, aussi bien que les triangles semblables C p L, C P M seront comme les quarrés de C B & de C D; c'est-à-dire, C B L p : C D N P :: $\overline{CB}^2 : \overline{CD}^2$.

COROLLAIRE I.

Fig. 24. 119. Si du centre commun C aux deux hyperboles semblables A L, B N, on tire les deux demi-diametres C B, C N, à volonté, & par leurs intersections avec les courbes, les lignes A D, B E, L F, N G, paralleles à l'asymptote C S, & rencontrant l'autre en D, E, F, G, les trapezes hyperboliques D A L F, E B N G, seront aussi entr'eux comme * $\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$, ou comme $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$.

* Art. 114. 118.

COROLLAIRE II.

120. Si la ligne F L prolongée rencontre la courbe B N en M, & E B la courbe A L en K, on aura E K L F : E B M F :: $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$. Car F L × C F * = C D × D A, & F M × C F = C E × E B; donc F L × C F : F M × C F, ou F L : F M :: C D × D A : C E × E B. Or comme cela arrive toujours, & que les triangles C D A, C E B étant semblables, les produits de leurs côtés sont comme les quarrés de ceux qui sont homologues; il s'ensuit que E K L F : E B M F :: $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2$.

* Art. 80.

COROLLAIRE III.

121. Si $\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2 :: m : n$, & si les nombres m, n sont commensurables entr'eux, on pourra toujours trouver un espace hyperbolique R T V S qui soit égal à l'espace E B M F dans l'autre hyperbole, le point R étant donné. Car puisque E K L F : E B M F :: $m : n$, si l'on prend C S telle que * $\overline{CE}^n : \overline{CF}^n :: \overline{CR}^m : \overline{CS}^m$, la ligne S V parallele à R T déterminera l'espace demandé.

* Art. 113.

THEOREME XXIII.

122. *Si trois tangentes à une ellipse ou hyperbole se rencontrent l'une l'autre en* L, T, H, *& si d'un de ces points* T *on tire un diametre* T A, *& du sommet* A *une tangente* E F, *qui rencontre* H T, L T *en* F *&* E; *& si le diametre conjugué à* T A *rencontre aussi les tangentes* H T, L T *en* K, k, *on aura* K H : K F :: k E : k L. *Fig.* 85. 86.

Car si l'on tire des points H, L, les lignes H B, L D, paralleles à la tangente E F, lesquelles rencontrent T A en B & D, on aura C B : C A :: K H : K F, & C A : C D :: *k* E : *k* L. Or comme * C B : C A :: C A : C D, il s'ensuit que K H : K F :: *k* E : *k* L. * *Art.* 61.

2. *Si dans la parabole les trois tangentes rencontrent le diametre* T A *en* T, E, F, *& si des points touchans* m, N, M, *on tire les appliquées* m p, N Q, M P, *& par les points de rencontre* L, H *de deux de ces tangentes avec la troisiéme, les lignes* L D, H B, *paralleles à ces appliquées, on aura* 2 B H = Q N + p m, & 2 D L = Q N — P M. *Fig.* 87.

Car si P M $= y$, * A P = A E $= x$, Q N $= z$, A Q = A T $= u$, D L $= a$, & le parametre $= 1$, on aura P M : P E :: L D : D E $= \frac{2ax}{y}$, ou D E + E A = D A $= \frac{2ax}{y} + x$, & Q N : Q T :: D L : D T $= \frac{2au}{z}$, ou T A — T D = D A $= u - \frac{2au}{z} = \frac{2ax}{y} + x$, ou parce que $x = yy$, $u = zz$, $zz - 2az = 2ay + yy$. Par conséquent $zz - yy = 2ay + 2az$, & en divisant par $y + z$, il viendra $z - y = 2a =$ 2 D L. On prouvera de même que 2 B H = Q N + pm. * *Art.* 54.

COROLLAIRE I.

123. Si l'on tire dans l'ellipse & l'hyperbole une autre tangente $l\,h$, qui rencontre T K, T *k*, en l, h, on aura * K F : K l :: kh : k E; & comme on a aussi K H : K F :: *k* E : *k* L, on aura *ex æquo*, K H : K l :: kh : k L. *Fig.* 85. 86. * *Art.* 122.

COROLLAIRE II.

124. De là il suit que le diametre D B, qui divise par le milieu en u la diagonale L l du trapeze L H $l h$, dont les côtés touchent une section conique quelconque, divisera aussi la dia- *Fig.* 88. 89.

Fig. 88. gonale hH par le milieu en r. Car si l'on tire les lignes hb, HB, LD, ld, paralleles au diametre * Kk, & si $CK = Ck = a$, $DL = dl = b$, $BH = x$, $bh = y$, les paralleles LD, hb, kC, donneront $kh : kL :: Ck - bh : Ck - DL :: a - y : a - b$; & les paralleles ld, HB, KC, donneront $KH : Kl :: CK - BH : CK - dl :: a - x : a - b$. Et par conséquent puisque * $KH : Kl :: kh : kL$, on aura $a - x : a - b :: a - y : a - b$, ou $a - x = a - y$, ou $x = y$, $BH = bh$; & par conséquent $hr = rH$.

* Art. 122.

* Art. 123.

Fig. 89. 2. Si dans la parabole on tire par les points touchans les demi-ordonnées MP, nq, mp, NQ au diametre DQ, on aura * $2DL = qn - PM$, $2dl = QN - pm$, $2BH = QN + PM$, $2bh = qn + pm$; ainsi si $DL = dl$, c'est-à-dire $qn - PM = QN - pm$, ou $qn + pm = QN + PM$, on aura $BH = bh$; donc $hr = rH$.

* Art. 124. n. 2.

THEOREME XXIV.

Fig. 90. 125. *Si deux angles mobiles* BAK, BDK, *tournent autour de leurs points angulaires* A, D, *fixés dans un plan ; je dis que l'intersection* B *des jambes* AB, DB *de ces angles, décrira une section conique qui passera par les points* A & D, *pendant que l'intersection* K *des autres jambes* AK, DK, *décrira une droite* KF, *donnée de position, laquelle ne passera point par les points* A, D.

Soit supposé que les jambes AK, DK, passent par un point donné F de la ligne KF, & que C soit l'intersection des autres jambes. Que l'on tire les lignes CK, CS, de maniere que les angles ACR, DCS soient égaux aux angles AFK, DFK; cela posé, puisque les angles KAB, FAC sont égaux aussi bien que KDB, FDC, l'angle KAF sera égal à l'angle CAR, & KDF = CDB; ainsi les triangles AFK, ACR, & DFK, DCS seront semblables; c'est pourquoi, CR : FK :: AC : AF, & FK : CS :: DF : DC; & en multipliant par ordre, CR : CS :: AC × DF : AF × DC. Or comme les lignes AC, DF, AF & DC, sont données, le rapport de CR à CS sera aussi donné; & comme les angles DCS, ACR sont aussi donnés, le point B sera toujours dans la courbe d'une * section conique qui passe par les points A, C, D.

* Art. 98.

N. B. Lorsque la ligne FK passera par un des points fixes comme D, la jambe DK sera toujours placée sur cette ligne, & ainsi

l'autre jambe D B sera donnée de position, & par conséquent l'intersection B sera toujours dans la ligne droite D B.

Si les jambes d'un de ces angles tombent l'une sur l'autre, la proposition sera la même qu'auparavant.

COROLLAIRE I.

126. De là il s'ensuit que si la jambe A B tombe sur la ligne A D, la jambe D B deviendra une tangente à la section en D; & si la jambe D B tombe sur la ligne D A, la jambe A B deviendra une tangente en A, puisque dans l'un & l'autre cas ses jambes ne rencontrent la section que dans un seul point, & tombent entierement en dehors de la même.

COROLLAIRE II.

127. Si les jambes A K, D K, tombent sur la ligne D A, ensorte que les angles mobiles B A K, B D K deviennent les angles V A L, E D L, l'angle E fait par la rencontre des autres jambes, prolongées de l'autre côté des points A & D, sera égal à la différence des deux angles mobiles à deux angles droits. Car les quatre angles V A D, E A D, E D L, E D A, valent ensemble quatre droits, & les trois E A D, E D A, A E D, valent deux droits; donc en soustrayant les derniers des premiers, on aura V A D + E D L — E = à deux droits.

COROLLAIRE III.

128. Si l'on décrit la circonférence de cercle A G D H par les points fixes A, D, ensorte que le segment A G D du côté de la ligne K E, soit capable de contenir un angle égal à la différence des deux angles mobiles à quatre droits; & si les jambes A L, D F des angles mobiles passent par l'intersection G de la circonférence & du diametre H G, qui est perpendiculaire à la ligne K F; les deux autres jambes A X, D N seront paralleles à l'un des axes de la section. Car puisque les angles N D G, X A G, & G valent ensemble quatre angles droits, par construction, & les trois angles du triangle A G D en valent deux, les deux angles N D A, X A D vaudront aussi deux droits, & par conséquent les jambes N D, X A seront paralleles. Or si l'on joint les points de rencontre N, L, X, F, des jambes avec la courbe & la ligne K F, & le point H aux points fixes A & D par des droites, les triangles rectangles semblables Fig. 28

HAG, GTL, & HDG, GTF, donneront AG × GL = HG × GT = DG × GF. Et comme les côtés adjacens aux angles opposés en G sont proportionnels, les triangles AGF, DGL seront semblables ; ainsi les angles GAF, GDL, ou leurs égaux NAX, NDX, aussi bien que leurs alternes AND, DXA, seront égaux. C'est pourquoi la perpendiculaire QM, qui divise ND par le milieu, divisera de même AX ; & par conséquent sera l'un * des axes.

* Art. 73.

THEOREME XXV.

Fig. 92.

129. *Toutes choses étant de même que ci-dessus, je dis que dans l'ellipse & l'hyperbole les parties* HT, TG *du diametre* HG, *prolongé s'il le faut, terminées par la ligne* FK, *expriment le rapport entre cet axe, qui est parallele aux côtés* DN, AX, *& son parametre.*

Soit supposé que la jambe AB de l'angle mobile KAB soit perpendiculaire aux lignes AX, DN ; du point F soient tirées FV, FS, & du point K la ligne KR, perpendiculaires aux lignes KA, AL, & à DF prolongée. Cela posé, si TH $= a$, TG $= p$, TF $= r$, TL $= s$, LF $= c$, GF $= n$, GL $= m$, FK $= v$, AP $= d$, DP $= x$, PB $= y$, les triangles semblables GTF, KRF, GDH, donneront FR $= \frac{rv}{n}$, KR $= \frac{pv}{n}$, & GD $= \frac{ap - pp}{n}$. Ainsi DG + GF + FR = DR $= \frac{ap + rr + rv}{n}$, parce que $nn = rr + pp$; & à cause des triangles semblables DRK, DPB, nous aurons DR : RK :: DP : PB, ou $apy + rry + rvy = pvx$, & $v = \frac{apy + rry}{px - ry}$.

Or puisque les angles XAL, BAK, sont égaux, & que l'angle XAB est droit, par hypothese, l'angle KAG sera aussi droit ; ainsi les lignes KA, AH, seront une même ligne droite. C'est pourquoi les triangles semblables HTK, FVK, GTL & LSF donneront 1°. GL : LT :: KF : FV $= \frac{ap - rs}{m}$. 2°. GL : GT :: LF : FS = VA $= \frac{pc}{m}$. 3°. LT : TG :: HT : TK $= \frac{ap}{s}$. Ainsi TK − TF $= v = \frac{ap - rs}{s} = \frac{apy + rry}{px - ry}$, ou $apx - rsx = acy$, parce que $c = r + s$. Enfin les triangles semblables AVF, APN, donneront AV : VF :: AP : PN $= \frac{d}{pc}$

$\times \overline{ap - rs}$; c'eſt pourquoi $DPN = \frac{dx}{pc} \times \overline{ap - rs}$, ou $\frac{pc}{d} \times DPN = apx - rsx = acy$. Par conſéquent $DPN : APB :: a : p$.

COROLLAIRE I.

130. Lorſque la ligne KT tombera en dehors du cercle AGD, l'interſection B décrira la courbe d'une ellipſe. Car l'angle AKD étant toujours moindre que la différence entre la ſomme de deux angles mobiles & quatre angles droits, les jambes AB, DB ſe couperont toujours, en quelque endroit que le point K puiſſe tomber. Par conſéquent la courbe décrite par le point B rentrera en elle-même, & par conſéquent elle ſera une ellipſe.

2. Lorſque la ligne KT coupera le cercle AGD, l'interſection B décrira la courbe d'une des hyperboles oppoſées, parce que lorſque l'interſection K tombe ſur celle de la ligne KT & de la circonférence, les jambes AB, BD, deviennent paralleles *: c'eſt pourquoi chacune d'elles ne rencontrera la courbe que dans un point dans cette poſition; & comme il n'y a que les lignes qui ſoient paralleles aux deux aſymptotes d'une hyperbole, qui ne rencontrent une ſection conique que dans un point, n'étant point paralleles, il s'enſuit que le point B décrira la courbe d'une des hyperboles dans ce cas. * *Art.* 128.

3. Et lorſque la ligne KT ne fera que toucher le cercle AGD, l'interſection B décrira la courbe d'une parabole, puiſqu'il n'y a qu'une ſeule poſition des jambes AB, DB, dans laquelle elles ne rencontrent la courbe que dans un point.

N. B. L'axe parallele aux lignes AX, DN ſera toujours le premier, puiſqu'il ſera toujours plus grand dans l'ellipſe que ſon parametre, & il eſt toujours dans le même angle fait par les aſymptotes que les hyperboles oppoſées.

COROLLAIRE II.

131. Le rapport du premier axe à ſon parametre étant donné, on pourra décrire la courbe d'une ellipſe ou hyperbole par quatre points donnés A, B, D, E. Car que l'on en joigne trois, comme A, E, D, par des lignes droites, & que l'on décrive ſur AD, comme corde, un arc circulaire AHD, de l'autre côté des points A, D, à l'égard du point E, enſorte que le ſegment AHD puiſſe contenir l'angle AED; cela poſé, ſi l'on fait paſſer les jambes des angles BAK, BDK, égaux aux complemens VAD, LDE, *Fig.* 93.

des angles DAE, ADE, à deux droits, par le quatriéme point B, la ligne KT, tirée par l'interſection K de deux autres jambes; & tangente au cercle LTt, décrit du même centre C que le cercle AHD, & dont le rayon CT ſoit au rayon CG, comme * $a \pm p$ eſt à $a \mp p$, la ligne KT, dis-je, ſervira à décrire la courbe demandée.

* Art. 129.

Dans la parabole la ligne KT eſt tirée du point K tangente au cercle DGA.

N. B. Puiſqu'on peut toujours mener d'un point donné hors d'un cercle deux tangentes à ce cercle, il s'enſuit qu'on peut auſſi décrire les courbes de deux ſections coniques par quatre points donnés.

THEOREME XXVI.

Fig. 94.

132. *Les courbes de deux ſections coniques quelconques ne peuvent ſe couper que dans quatre points.*

Soient m, H, K, n, quatre points contigus, où les courbes nKFm & nKLHm ſe coupent; ſoient tirées les lignes mH, nK, leſquelles ſe rencontrent en T, & ſoit fait TH : Tm :: RH : Rm, & TK : Tn :: SK : Sn. Cela poſé, puiſque les parties d'une droite quelconque TE, terminées par le point T & les courbes, ſont toujours comme * celles de la même ligne terminées par les courbes & la ligne RS; & comme la ligne TE rencontre toujours les courbes en deux points L, F, d'un côté de la ligne RS, par hypotheſe, il s'enſuit qu'elle rencontrera auſſi toujours les courbes en deux points de l'autre côté.

* Art. 53.

PROBLEME IV.

Fig. 90.

133. *Décrire la courbe d'une ſection conique par cinq points* A, B, C, D, E, *donnés de maniere qu'on n'en puiſſe joindre que deux par une ligne droite.*

Ayant joint trois de ces points que l'on voudra, comme A, D, E, par des droites, & fait les angles BAK, CAF, chacun égal au complément VAD de l'angle DAE à deux droits, & les angles BDK, CDF, chacun égal au complément LDE de l'angle ADE, le point ou interſection B des jambes AB, DB des angles mobiles KAB, KDB, en tournant autour des points A, D, décrira la courbe demandée, pendant que l'interſection K des autres jambes AK, DK, décrit la droite * tirée par les points K, F.

* Art. 125.

AUTREMENT.

D'un de ces points donnés E, soient tirées les lignes E Q, E T, paralleles aux côtés A B, B C du trapeze formé par les lignes qui joignent les quatre autres points donnés A, B, C, D, lesquelles rencontrent les quatre côtés en R, Q, S, T: cela posé, si l'on tire du point C la ligne C *f* parallele à B A, & de son intersection *f* avec S T, la ligne *f r* parallele à T R, rencontrant E Q en *r*, l'intersection *d* des lignes C *f* & A *r* sera dans la courbe. Car à cause des paralleles T R, *f r*, on a E T: E R : : E *f*: E *r*; par conséquent le point *d* est dans la courbe d'une * section conique qui passe par les cinq points A, B, C, D, E. *Fig.* 95. * *Art.* 98.

Et si l'on tire A *e* parallele à B C, & par son intersection *u* avec E Q, la ligne *u g* parallele à R T rencontrant E T en *g*, le point d'intersection *e* des lignes C *g* & A *u* sera aussi dans la courbe. C'est pourquoi l'intersection O des lignes tirées par les milieux des paralleles A B, *d* C, & B C, A *e* sera le * centre: cela supposé: * *Art.* 36.

Si les lignes C B, C A, prolongées s'il le faut, rencontrent le diametre M *m*, auquel B A, *c d* sont ordonnées en *t* & P; & si O M = O *m* est prise moyenne proportionnelle entre O P & O *t*, les points M, *m*, seront dans * la courbe. On trouvera de la même maniere les sommets N, *n* du diametre N *n* conjugué à M *m*, & par conséquent on pourra décrire la courbe par *l'article* 43. * *Art.* 54. 58.

N. B. I. Lorsque M *t* > M P, la section sera une ellipse; lorsque M *t* < M P, une hyperbole; & lorsque M *t* = M P, elle sera une parabole.

II. Puisque la position de la ligne F K est déterminée par les intersections des jambes A K, D K, lorsque les autres A B, D B passent par les deux points donnés B & C, & puisque les angles mobiles sont déterminés par le moyen de trois autres points donnés A, D, E, il s'ensuit qu'une section conique ne peut passer que par cinq points donnés; & comme les courbes de deux sections ne se peuvent couper qu'en quatre * points, il suit aussi que l'on ne peut décrire qu'une seule courbe des sections coniques par cinq points donnés. *Fig.* 96. * *Art.* 132.

PROBLEME V.

Fig. 96. 97. 134. *Décrire la courbe d'une section conique par quatre points donnés* A, B, C, E, *& qui touche une droite* b T *donnée de position.*

Fig. 96. *Premier cas.* Supposé que le point touchant soit aussi un des points donnés C. Si l'on joint trois de ces points A, B, C, par des droites, & que l'on tire du quatriéme E les lignes S T, E Q, paralleles à B C, A B, lesquelles coupent les lignes B C, A C, A B, en Q, R, S, & la tangente en T: cela posé, si l'on prend dans S T, E Q, les points t, r, tels que E R : E T :: E r : E t, l'intersection d des lignes tirées par les points A, r & C, t, sera dans la * courbe; & par conséquent elle pourra être décrite par le moyen * des cinq points donnés A, B, C, d, E.

* Art. 98.
* Art. 133.

Fig. 97. *Deuxiéme cas.* Soit G le point de rencontre des deux lignes tirées par les quatre points donnés, & T; b leurs intersections avec la tangente. Si les rectangles A b B $= aa$, B G A $= bb$, E G C $= cc$, C T E $= dd$, le point D pris dans la tangente, tel que bD : D T :: $a : \frac{bd}{c}$, sera le point touchant. Car si la ligne T S parallele à A B, coupe la courbe en R, S, on aura * E G C : B G A :: C T E : R T S $= \frac{bbdd}{cc}$, & * b D : D T :: $\sqrt{AbB}\,(a) : \sqrt{RST}\,\left(\frac{bd}{a}\right)$.

* Art. 48.
* Art. 50.

N. B. Comme on peut prendre le point D, ou entre les points T, b, ou en dehors, excepté lorsque les rectangles A b B, R T S sont égaux, il s'ensuit que l'on peut décrire les courbes de deux sections coniques par quatre points donnés, & qui touchent une droite donnée de position.

PROBLEME VI.

Fig. 98. 135. *Décrire la courbe d'une section conique par trois points donnés* B, C, D, *& qui touche deux droites* A T, P T, *données de position.*

Soient tirées les lignes D C, C B par les points donnés, lesquelles rencontrent les tangentes en I, L, E, H, & soit K L : K I :: $\sqrt{CLD} : \sqrt{DIC}$, & E R : R H :: $\sqrt{CEB} : \sqrt{BHC}$, la ligne tirée par les points R, K, * déterminera les points touchans A, P. C'est pourquoi la courbe peut être décrite comme ci-dessus.

* Art. 65.

PROBLEME VII.

136. *Décrire la courbe d'une section conique par deux points donnés* D, E, *& qui touche trois droites* A T, T N, N C, *données de position.* Fig. 99.

Si la ligne qui passe par les points donnés rencontre les tangentes en L, P, F, & si K L : K F : : $\sqrt{ELD}$: $\sqrt{DFE}$, & F a : P a : : $\sqrt{DFE}$: $\sqrt{EPD}$, les points K, a seront ceux où la ligne D E * coupe les lignes qui joignent les points touchans B, A & A, C ; & si l'on tire une ligne du point K au point de rencontre N de deux tangentes, coupant la troisiéme en R, & que l'on fasse K R : K N : : R r : r N, le point r sera dans * la ligne A C. C'est pourquoi la ligne tirée par les points r & a, donnera les points touchans A, C, & la ligne tirée par les points K, A, donnera le point touchant B ; & par conséquent la courbe peut être décrite.

* Art. 65.
* Art. 65.

PROBLEME VIII.

137. *Décrire la courbe d'une section conique par un point donné* E, *& qui touche quatre droites* N T, T M, M H, H N, *données de position.* Fig. 100.

L'intersection (a) des diagonales H T, N M du trapeze formé par ces tangentes, sera la même que celle des lignes qui joignent les points touchans A, C, & B, D ; c'est pourquoi si la ligne tirée par ce point (a) & le point donné E, coupe trois de ces tangentes en L, P, F, & si $\overline{aF}^2 : \overline{aP}^2$: : S F E : E P S, le point S sera * dans la courbe. Mais si E L S : S F E : : $\overline{KL}^2 : \overline{KF}^2$, le point K sera dans la ligne qui joint les points touchans B, A, duquel tirant une ligne au point de rencontre N des tangentes N T, H N, rencontrant la tangente T M en R, & si K N : K R : : r N : r R, le point r sera * dans la ligne qui joint les points touchans A, C. Par conséquent la ligne tirée par les points r, a, donnera les points touchans A, C ; la ligne tirée par les points K & A donnera le point touchant B ; enfin la ligne tirée par les points B & a donnera le point touchant D.

* Art. 65.
* Art. 68.

PROBLEME IX.

Fig. 101. 138. *Décrire la courbe d'une section conique qui touche cinq droites* GH, HM, TK, MF, FG, *données de position.*

L'intersection *a* des diagonales GN, TF du trapeze GTNF, sera aussi l'intersection * des lignes tirées par les points touchans A, D & B, E; l'intersection *b* des diagonales GM, HF du trapeze GHMF, sera celle des lignes tirées par les points touchans A, C & B, E, & l'intersection *n* des diagonales GL, HK du trapeze GHLK, sera aussi celle des lignes tirées par les points touchans B, D & A, C. C'est pourquoi par le moyen des trois points donnés *a*, *b*, *n*, on pourra trouver les points touchans, & par conséquent décrire la courbe.

* Art. 67.

REMARQUE.

I. *Dans les cinq derniers problêmes, le centre ou foyer d'une section conique doit être pris pour deux points, & une asymptote pour deux tangentes. Par exemple, si les deux asymptotes* EN, BP *des hyperboles opposées* AQ, DR, *& la tangente* EF *sont données, il est visible que la tangente* EF *est parallele & égale au* * diametre conjugué du diametre* aA, *qui passe par le point touchant* A, *& par conséquent divise la tangente en deux également.*

Fig. 102. * Art. 81.

II. *Si un point* D *de la courbe & les asymptotes sont données, en tirant* DB *à volonté, qui rencontre les asymptotes en* N, B, *& en faisant* BR = DN, *le point* R *sera* * dans la courbe.*

* Art. 82.

III. *S'il y avoit trois points* Q, R, D *de la courbe, & l'asymptote* EN *donnés, en tirant deux lignes par ces points, lesquelles rencontrent l'asymptote donnée en* L, N, *& en faisant* BR = DN, & QP = DL, *les points* P, B *seront dans l'autre asymptote, laquelle est par conséquent donnée de position.*

Fig. 95. IV. *Si le centre* O *& trois points* A, B, C *de la courbe d'une ellipse ou hyperbole sont donnés; soit tiré le diametre* Mm *par le milieu de la ligne* AB *qui joint deux de ces points, & soient joints les points* A, C, *& le reste pourra s'achever selon l'article 133.*

Fig. 99. V. *Si le centre* O, *le point* m *de la courbe, & deux tangentes* TA, TB *sont donnés, il est évident que la ligne* AB, *qui joint les points touchans* A, B, *est ordonnée au diametre* TO, *& donnée de position. Car que l'on prenne le segment circulaire* atb

capable de contenir l'angle ATB, *& que l'on fasse l'angle* dab *égal à l'angle* QTB; *cela posé, si du point de rencontre* d *de la ligne* ad *& de la circonférence on tire la ligne* dt *par le milieu* q *de la ligne* ab, *les triangles* ATB, atb, & QTB, qtb *seront semblables; & par conséquent* bq : qt :: BQ : QT. *Cela supposé,*

Si l'on tire un diametre par le point donné m, *& que l'on trouve* * *le point* K, *où ce diamètre rencontre la ligne* BA, *on n'aura qu'à tirer la ligne* KB *parallele à la ligne donnée de position, ou ce qui est la même chose, faire ensorte que l'angle* TQA *soit égal à l'angle* tqa, *pour avoir les points touchans* A & B. * Art. 136.

VI. *Enfin si le centre* O *& trois tangentes* AT, TN, NC *sont données, il est évident que les rapports des côtés de chaque triangle* ABT, BCN *&* ABC *sont donnés, puisque les lignes* AB, AC, BC *sont, par la précédente, paralleles à des lignes données de position. C'est pourquoi si* $BT = x$, $BN = a - x$, $AB = \frac{bx}{a}$, $BC = \frac{ac - cx}{a}$, & $AB : BC :: d : n$, *ou* $bnx = acd - cdx$, *on aura* $x = \frac{acd}{bn + cd}$. *La valeur de* x *donnera le point touchant* B, *par le moyen duquel on trouvera les deux autres* A & C.

LEMME I.

139. *Si l'angle* mtn, *& le rapport des sinus* ds, dr *de deux parties* mtd, dtn *de cet angle sont donnés, la ligne* td *sera donnée de position.* Fig. 103.

Car si l'on tire *tc* perpendiculaire sur la subtendante *mn* de l'angle donné, les triangles semblables *mct*, *msd*, & *nct*, *nrd* donneront $tc : tn :: dr : dn$, & $tc : tn$ ou $tm :: ds : dm$. C'est pourquoi $dr : dn :: ds : dm$; par conséquent le rapport des lignes *md*, *dn* étant donné, aussi bien que la ligne *nm*, la ligne *td* sera donnée de position.

LEMME II.

140. *Trois points* A, B, C *étant donnés, en trouver un quatrième* D *tel que les différences des lignes* AD, BD, CD *soient données.* Fig. 104.

Soient $BD = u$, $AD = c + u$, $CD = d + u$, $AB = a$, $BC = b$; & soient prises $BP = \frac{aa - cc}{2a}$, $BQ = \frac{bb - dd}{2b}$, &

des points P, Q, D, soient tirées PS, DF, & QR, DE perpendiculaires, & DS, DR paralleles aux lignes AB, BC. Cela posé, si $DS = FP = x$, $DR = EQ = y$, BF sera $= x - \frac{aa+cc}{2a}$, $BE = y - \frac{bb+dd}{2b}$; & à cause des triangles rectangles AFD, BFD, & CED, BED, on a $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2AB \times BF$, ou $çu = ax$, & $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + 2BC \times BE$, ou $du = by$. En faisant évanouir u, on aura $bcy = adx$; & par conséquent puisque le rapport des lignes DS (x) DR (y) est donné, la ligne tirée par le point de rencontre T des lignes PS & QR, au point D, sera donnée de position.

Si la ligne TD coupe la ligne CB en a, les triangles semblables TQa, TRD donneront aQ (n) : aT (m) :: DR ($y = \frac{du}{b}$) : $DT = z = \frac{dmu}{nb}$. Par conséquent si la ligne rX est tirée telle que rT : rx :: dm : bn, la ligne BD tirée du point B parallele à xr, rencontrera la ligne TD au point cherché D.

PROBLEME X.

Fig. 105. 141. *Le foyer* F *& les trois points* N, L, M *de la courbe d'une section conique étant donnés, trouver l'axe & l'autre foyer* f.

* Art. 14. Puisqu'on a toujours * $fM \pm FM = Aa = fN \pm FN = fL \pm FL$, il est évident que les différences des lignes tirées des trois points donnés N, L, M au foyer cherché f, sont données; il s'ensuit qu'en trouvant le foyer f par le lemme précédent, on n'aura qu'à tirer une ligne par ces foyers, laquelle étant $= fM \pm FM$, sera l'axe demandé.

AUTREMENT.

Si l'on joint le foyer donné aux points donnés par des droites, & si l'on prend dans NM, NL prolongées, les points P & D, tels que FN : FM :: NP : MP, & FN : FL :: ND : LD, la ligne FB perpendiculaire à la ligne tirée par les points P, D, sera l'axe.

Car en tirant les lignes NK, LQ, MH, perpendiculaires à DP, les triangles semblables DQL, DKN, & PHM, PKN donneront ND : LD :: NK : LQ, comme FN : FL par construction, & NP : MP :: NK : MH :: NF : MF. C'est pourquoi

pourquoi le point B represente ici le point * E dans les figures 1. 2. 3 ; & par conséquent si l'on fait QL : LF :: BA : AF, on aura * le sommet A du premier axe ; & ainsi on peut achever la construction selon l'article cinquiéme. * Art. 3. 4. * Art. 4.

COROLLAIRE I.

142. Si au lieu de trois points il y avoit deux points & une tangente, ou un point & deux tangentes données, il est évident que l'autre foyer & le premier axe peuvent être trouvés de la même maniere que ci-dessus. Qu'il y ait, par exemple, deux points & une tangente donnés.

Si l'on tire du foyer donné F, la ligne FD perpendiculaire à la tangente DI donnée, & si l'on prend DL = DF, la ligne Lf sera égale * au premier axe ; c'est pourquoi sa différence à une autre ligne, tirée d'un point donné de la courbe au foyer cherché, sera donnée. Fig. 102. * Art. 15.

Mais s'il y avoit trois tangentes EM, HN, DI données ; du foyer donné F soient tirées les lignes FM, FD, FN perpendiculaires à ces tangentes : le centre C du cercle dont la circonférence passe par les trois points M, D, N, sera aussi le centre * de la section. * Art. 27.

COROLLAIRE II.

143. La ligne FP, qui joint le foyer & le point de rencontre P des droites MN & BP, divisera le complément EFM de l'angle NFM (fait par les lignes tirées des points M, N au foyer F) à deux droits en deux également. Car si l'on tire MT parallele à NE, rencontrant FP en T, on aura PM : PN :: MT : NE :: * MF : NF. Donc MT = FM. Par conséquent l'angle MFT est égal à l'angle MTF, & celui-ci égal à son alterne EFT. Fig. 103. * Art. 141.



SECTION II.

DES SECTIONS CONIQUES

CONSIDÉRÉES DANS LE SOLIDE.

DEFINITIONS.

Fig. 113. 1. SI une ligne droite K Y, tirée par un point fixe K, pris hors d'un plan dans lequel est décrite la circonférence Y x X y d'un cercle, est indéfiniment prolongée vers le haut, & tourne autour de cette circonférence, chaque surface décrite dans ce mouvement par les parties de la ligne K Y, séparée par le point K, est nommée *surface conique*, & les deux ensemble *surfaces coniques opposées*.

2. Le point fixe K, qui est commun aux deux surfaces, est nommé le *sommet*; & le cercle Y x X y, la *base*.

3. Le solide renfermé entre la base Y x X y & la surface entre la base & le sommet, est appellé *cone*.

4. Toute ligne K Y tirée du sommet K à un point Y de la circonférence de la base, est appellée *côté* du cone.

5. La ligne tirée du sommet au centre du cercle de la base, est nommée l'*axe* du cone.

6. Le cone est appellé *droit* ou *oblique*, selon que l'axe est perpendiculaire ou oblique à la base.

Fig. 112. 113. 114. 7. Si un plan K D d passe par le sommet du cone, parallele à une section M A N du cone & d'un plan, la ligne indéfinie D d, formée par la rencontre du plan K D d avec celui de la base, est appellée *directrice*.

N. B. Nous ne considérons ici que les sections qui se font avec le cone droit & un plan.

8. Si la directrice D d tombe en dehors de la base du cone, la section * M A N a, est appellée *ellipse*; si D d coupe la base, elle est appellée * *hyperbole*; & si D d touche la base, on la nomme * *parabole*.

* *Fig.* 112. * *Fig.* 113. * *Fig.* 114.

Fig. 113. La section $n\,a\,m$ du plan hyperbolique & la surface opposée du cone, est appellée *hyperbole opposée* à la premiere M A N.

9. Une ligne droite tirée dans le plan d'une section conique, qui ne rencontre la section que dans un point, & qui étant prolongée ne coupe ni ne tombe en dedans de la section, est appellée *tangente*.

COROLLAIRE I.

144. Il est évident par la génération du cone, que toutes sections K D, K *d* d'un plan qui passe par le sommet K du cone avec sa surface, sont des lignes droites. *Fig.* 113.

COROLLAIRE II.

145. Tous les côtés du cone rencontrent le plan elliptique, puisqu'ils rencontrent tous le plan K D *d* en K, qui lui est parallele, & qui passe par le sommet K; ce qui montre que l'ellipse rentre en elle-même. *Fig.* 112.

COROLLAIRE III.

146. Tous les côtés du cone, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan hyperbolique, excepté les deux K D, K *d*, qui passent par les points de rencontre de la directrice & la circonférence de la base, puisqu'ils rencontrent tous le plan D K *d*, qui lui est parallele au point K. *Fig.* 113.

De plus, les côtés de la partie du cone K *d* Y D rencontrent la courbe hyperbolique N A M, & les côtés prolongés de la partie K *d* X D rencontrent la courbe *n a m* hyperbolique opposée. De là on voit que les hyperboles opposées s'étendent à l'infini.

COROLLAIRE IV.

147. Enfin tous les côtés du cone, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan parabolique, excepté K D qui passe par le point touchant D de la directrice & de la base; puis ils rencontrent tous le plan K D *d*, qui lui est parallele, au sommet K. Ce qui fait voir que la parabole s'étend à l'infini. *Fig.* 114.

LEMME III.

148. *Si un plan* E F G H *tourne autour de la ligne* E F *comme axe, ses intersections* G H, g h, *avec un autre plan* A B, *seront toujours des lignes droites.* *Fig.* 107. 108.

I. *Si l'axe* E F *est parallele au plan* A B, *toutes les intersec-* *Fig.* 107.

tions GH, gh *de ces plans seront paralleles à l'axe* EF, *& par conséquent paralleles entr'elles.*

Fig. 108. II. *Mais si l'axe* EF *n'est pas parallele au plan* AB, *les intersections* GH, gh *se rencontreront toujours dans le même point* G *où l'axe* EF, *prolongé s'il le faut, rencontre ce plan.*

Cela est si évident par soi-même, qu'il ne faut point de démonstration.

LEMME IV.

Fig. 109. 110. 149. *Si dans un rayon* CA *d'un cercle prolongé s'il le faut, on prend* ÷ CB : CA : CS, *& si la ligne* DB *est tirée perpendiculaire sur* CA; *je dis que la ligne* ab *qui joint les points touchans de deux tangentes tirées d'un point quelconque de la ligne* DB, *passera toujours par le point* S.

Car tirant par le centre C la ligne CD au point de rencontre de ces tangentes, qui coupent *ab* en P, on aura à cause des triangles rectangles semblables, CBD, CPS; CP : CS :: CB : CD, ou $CS \times CB = \overline{CA}^2 = CP \times CD$. Donc, &c.

LEMME V.

Fig. 111. 150. *Si les lignes* Da, Db *touchent un cercle en* a *&* b, *& si du point* D *de leur rencontre on tire une ligne* DY, *qui rencontre la circonférence en* X, Y, *& la ligne* ab *en* S, *je dis que* DX : DY :: SX : SY.

Par les points Y, X soient tirées les lignes Y*y*, X*x*, paralleles à *ab*, lesquelles rencontrent la courbe en *y*, *x*, & la tangente D*a* en E & F : cela posé, la ligne tirée par les points *x*, *y* passera aussi par le point D; c'est pourquoi DE : DF :: EX : FY :: E*x* : F*y*, ou $\overline{DE}^2 : \overline{DF}^2 :: xEX = \overline{aE}^2 : yFy = \overline{aF}^2$; ainsi DE : DF :: *a*E : *a*F, par conséquent DX : DY :: SX : SY.

THEOREME XXVII.

Fig. 115. 116. 151. *Si deux droites* MN, mn *terminées dans une section conique sont paralleles à deux autres droites* KD, Kd *données de position; je dis que les rectangles* MPN, mPn *faits de leurs parties terminées par la section & leur intersection, sont toujours dans un rapport donné.*

Les plans qui passent par les paralleles KD, MN, & K*d*, *mn*, forment deux droites YXD, *yxd* dans le plan de

la base ; les droites KMY, KNX, & Kmy, Knx dans la surface du cone, & leur commune section la droite KPS, laquelle rencontre le plan de la base au même point S que les droites YXD, yxd se coupent. Cela posé, si l'on tire par le point S la ligne RV dans le plan YKD, parallele à MN, & ru dans le plan yKd, parallele à mn, & que l'on fasse DK $= a$, $dK = b$, YD $= y$, DX $= x$, $yd = z$, & $dx = v$, les triangles semblables KPM, KSR, & KPN, KSV, aussi bien que KPm, KSr, & KPn, KSu donneront $\overline{KP}^2 : \overline{KS}^2 ::$ MPN : RSV :: $mPn : rSu$. Et à cause des paralleles KD, RV, on a YS : RS :: YD (y) : DK (a), & SX : SV :: DX (x) : DK (a) ; & en multipliant par ordre, YSX : RSV :: $xy : aa$, ou RSV $= \frac{aa}{xy} \times$ YSX. On trouvera de même que $rSu = \frac{bb}{vz} \times ySx$. C'est pourquoi MPN : mPn :: $\frac{aa}{xy} \times$ YSX : $\frac{bb}{vz} \times ySx$. Or comme les lignes dK (b), DK (a), aussi bien que les points d, D sont donnés, & que par la propriété du cercle les rectangles YSX, ySx sont égaux, & les rectangles YDX (xy), ydx (vz) demeurent toujours les mêmes en quelques endroits que les lignes DY, dy soient tirées, il s'ensuit que le rectangle MPN est au rectangle mPn dans le rapport donné de $\frac{aa}{xy}$ à $\frac{bb}{vz}$.

COROLLAIRE I.

152. Il est évident que si dans l'hyperbole la ligne MN devient parallele à un des côtés du cone qui passe par l'intersection de la directrice avec la circonférence de la base, ou dans la parabole au côté * KD, qui passe par le point touchant de la directrice & de la circonférence ; cette ligne MN ne rencontrera la courbe de la section que dans un point M, & le rectangle mPn sera alors à MP, multiplié par une constante, dans un rapport donné. Fig. 117. * Fig. 114.

Car si l'on tire par le point P la ligne ab dans le plan YKX parallele à YX, & le reste étant comme auparavant, on aura $mPn : aPb :: rSu :$ YSX, ou parce que * $rSu = \frac{bb}{vz} \times ySx$, & YSX $= ySx$ par la propriété du cercle, cette proportion deviendra $mPn : aPb :: \frac{bb}{vz} \times ySx : ySx :: bb : vz$; mais la ligne Pb est donnée, puisque MP est parallele à KX, & que aP * Art. 151.

eſt toujours comme PM; par conſéquent les rectangles mPn, $MP \times Pb$ ſont dans un rapport donné.

COROLLAIRE II.

Fig. 115. 116. 117. 153. Si l'on ſuppoſe que le plan $ymKdx$ tourne autour de Kd comme un axe, il eſt évident que toutes les ſections mn de ce plan avec le plan MmN parallele à l'axe Kd, ſeront toujours paralleles * entr'elles; & toutes les ſections dy dans le plan de la baſe du cone, paſſeront toujours * par le point d. Et lorſque le plan $ymKdx$ ne fera que toucher le cone aux côtés KY, KX, la ſection mn deviendra les tangentes Me, Nf.

* Art. 148. n. 1.
* Art. 148. n. 2.

COROLLAIRE III.

154. De là il ſuit que ſi le plan YKX paſſe par les points touchans Y, X des tangentes tirées du point d à la baſe du cone, la ligne mn ſera toujours diviſée en deux également en P par la ligne MN, en quelqu'endroit que le plan $ymKdx$ puiſſe paſſer. Car on aura * $yS : yd :: xS : xd$, & * $yS : yd :: rS : Kd$, de même $xS : xd :: Su : Kd$. Donc puiſque $rS = Su$, & que ru, mn ſont paralleles, il s'enſuit que $mP = Pn$.

* Art. 150.
* Art. 151.

COROLLAIRE IV.

Fig. 115. 116. 155. Si dans l'ellipſe & l'hyperpole le point angulaire d du plan $ymKdx$ ſe meut le long de la directrice Dd, il eſt évident que la ligne Kd demeurera toujours parallele au plan MmN de la ſection, & la ligne YX, qui joint les points touchans des tangentes, tirée du point d à la baſe du cone, paſſera toujours par un * point donné. C'eſt pourquoi le plan YKX tournera autour d'une ligne comme un axe, laquelle par conſéquent diviſera toujours MN en * deux également, puiſque $DX : DY :: SX : SY$.

* Art. 149.
* Art. 154.

COROLLAIRE V.

* Art. 154. 156. Puiſque la ligne MP diviſe toujours * les paralleles mn en deux également, il s'enſuit qu'elle eſt un diametre. D'où l'on voit *que tous les diametres d'une ellipſe ou hyperbole ſe diviſent l'un l'autre en deux également dans un même * point, lequel eſt par conſéquent le centre; & que tous les diametres de la parabole ſont paralleles au côté* KX *du cone qui paſſe par le point touchant* X *de la directrice* dX, *& par conſéquent ils ſont tous paralleles entr'eux.*

Fig. 115. 116. 117.
* Art. 155.

THEOREME XXVIII.

157. *Si l'on coupe un cylindre droit* A b *par un plan oblique* Fig. 118.
BMAN, *la section* BMAN *sera une* ellipse.

Car si deux paralleles quelconques MN, *mn* terminées dans la section, sont coupées par une troisiéme ligne AB, aussi terminée dans la section aux points P, *p*, les plans qui passent par ces lignes perpendiculairement à la base, formeront dans la surface les paralleles A*a*, B*b*, M*s*, *mr*, N*y*, *nx*; & dans la base les paralleles *rx*, *sy*, & la ligne *ab*; & leurs sections communes, les lignes *pu*, PV. Cela posé, on aura à cause des paralleles, 1°. *a*V : *au* :: AP : A*p*; 2°. *b*V : *bu* :: PB : B*p*; & en multipliant par ordre, *a*V*b* : *aub* :: APB : A*p*B. On prouvera de la même maniere que *s*V*y* : *rux* :: MPN : *mpn*. Or par la propriété du cercle *a*V*b* = *s*V*y*, & *aub* = *rux*. Par conséquent APB : A*p*B :: MPN : *mpn*. Donc, &c.

Par ce que nous venons de dire des propriétés principales des sections coniques par le moyen du cone, & desquelles on peut d'une maniere fort aisée déduire les autres par maniere de corollaires, sans en considérer davantage le solide, il est aisé de voir l'avantage que la considération du cone auroit au-dessus de celle dont nous nous sommes servis dans la premiere section, si ce n'étoit la difficulté qu'on a de se représenter dans l'imagination les différentes sections du cone.





LIVRE SECOND.

DES FLUXIONS.

SECTION I.

Comme il eſt néceſſaire pour l'intelligence de ce qui ſuit, de bien entendre les opérations des quantités algebriques qui ont des expoſans généraux, on a donné quelques régles générales ſur ce ſujet, afin de ne rien omettre de ce qui pourroit être utile pour bien entendre les principes fondamentaux des Fluxions que l'on ne ſçauroit ſe rendre trop familier.

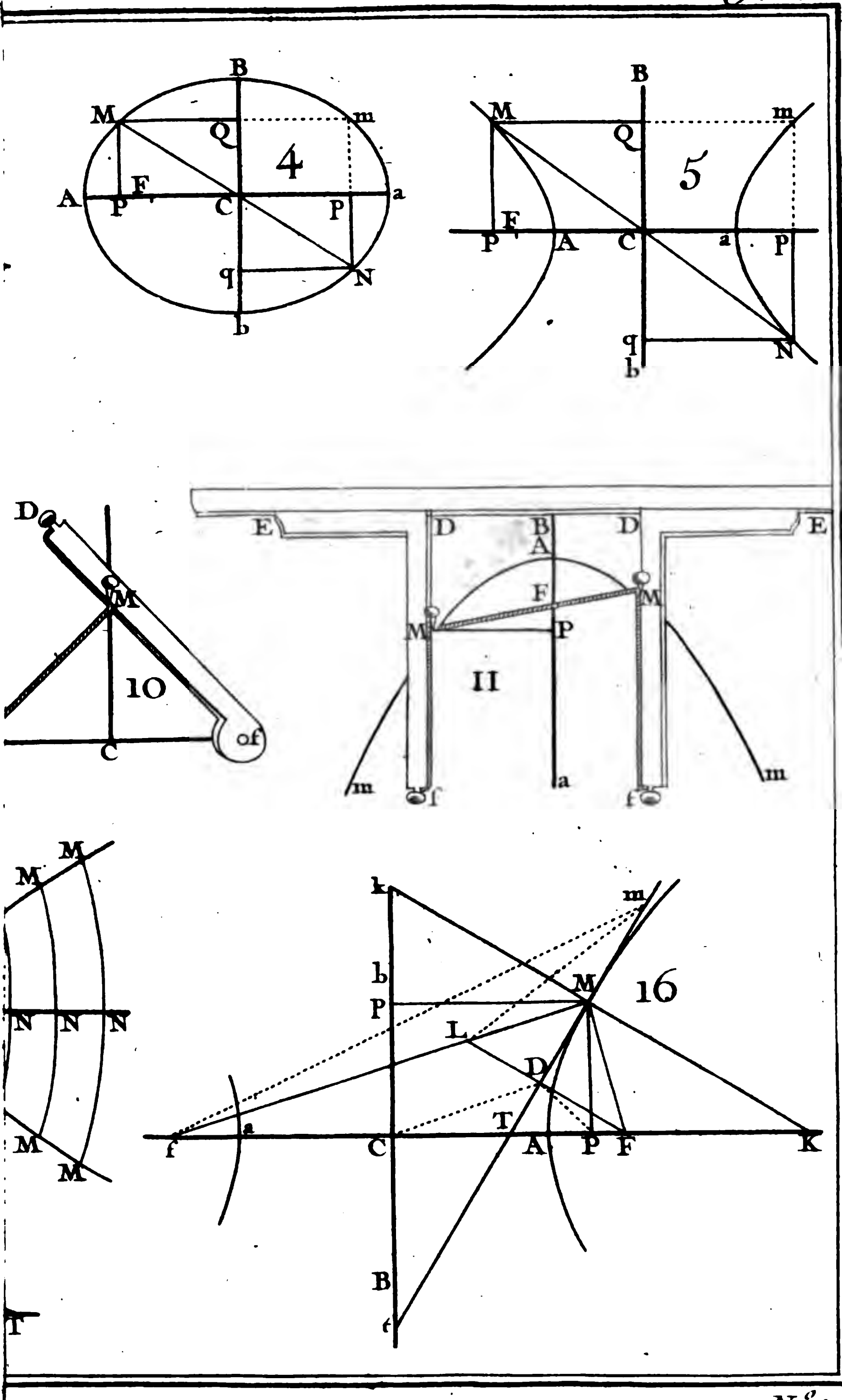
Regle premiere.

Le produit de a^4 multiplié par a^2 eſt $a^{4+2} = a^6$; celui de $\overline{a+x}^3$ par $\overline{a+x}^2$ eſt $\overline{a+x}^{3+2} = \overline{a+x}^5$; celui de $a^2 \times \overline{a+x}^4$ par $a^3 \times \overline{a+x}^2$ eſt $a^{2+3} \times \overline{a+x}^{4+2} = a^5 \times \overline{a+x}^6$. En général le produit de a^m multiplié par a^n eſt a^{m+n}; celui de $\overline{a+x}^m$ par $\overline{a+x}^n$ eſt $\overline{a+x}^{m+n}$; & celui de $a^m \times \overline{a+x}^m$ par $a^n \times \overline{a+x}^n$ eſt $a^{m+n} \times \overline{a+x}^{m+n}$. Ce qui eſt évident par la compoſition des puiſſances, puiſqu'en multipliant $\overline{a+x}^m$ par $\overline{a+x}^n$, on ne fait autre choſe que d'augmenter l'expoſant m de tant d'unités que l'expoſant n en contient.

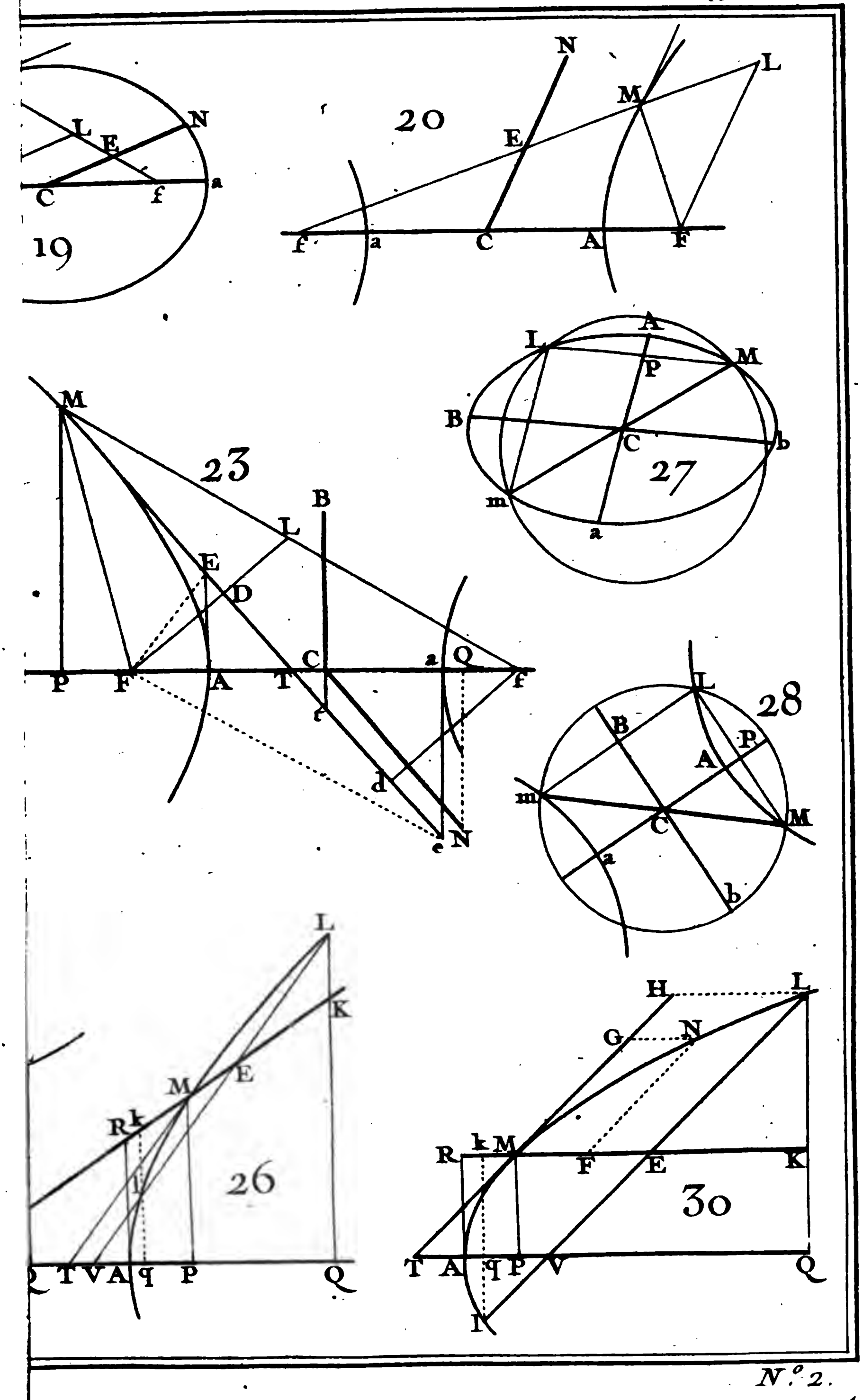
Regle seconde.

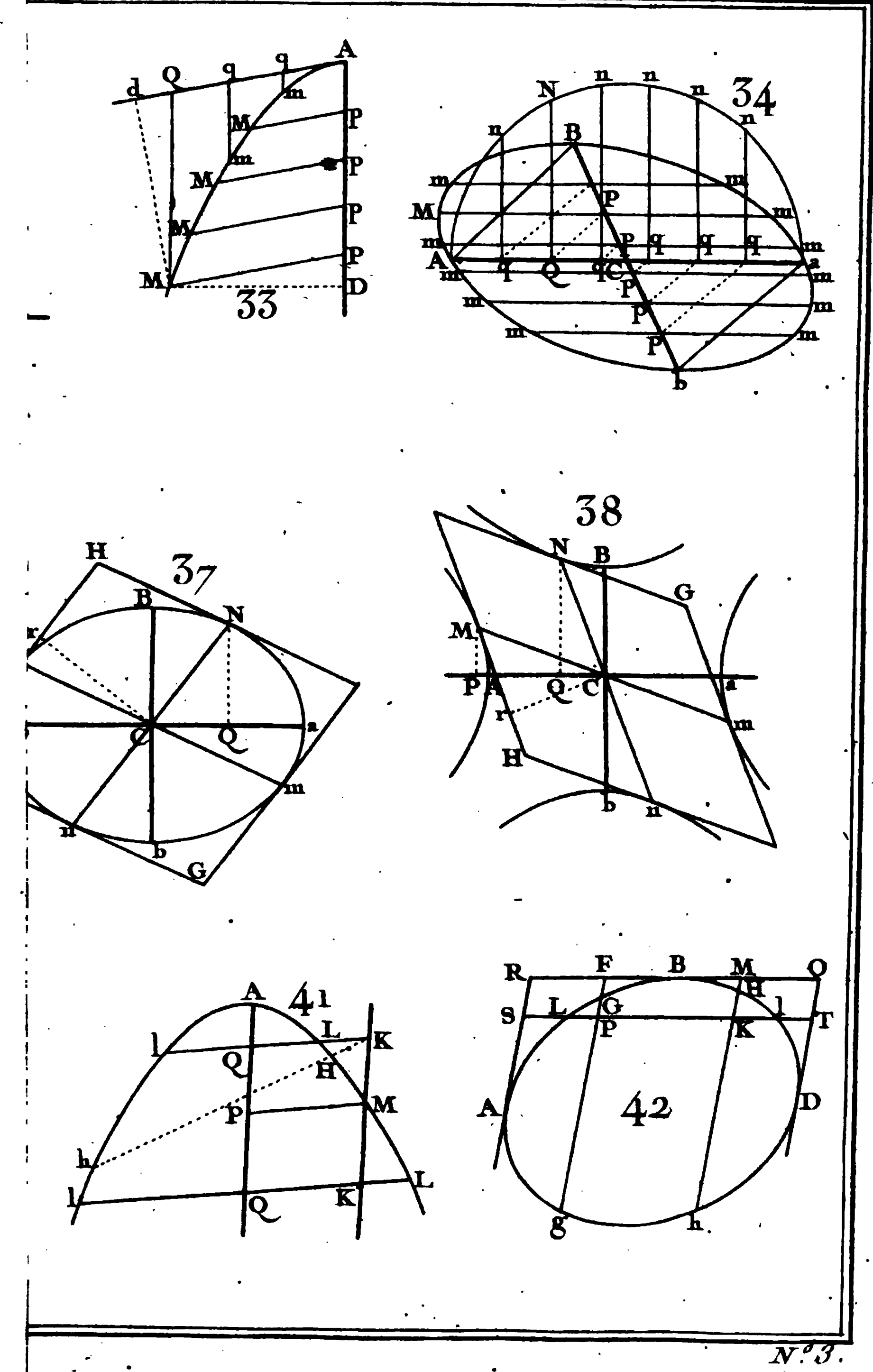
Le quotient a^4 diviſé par a^2 eſt $a^{4-2} = a^2$; celui de $\overline{a+x}^6$ diviſé par $\overline{a+x}^3$ eſt $\overline{a+x}^{6-3} = \overline{a+x}^3$. En général le quotient de a^m diviſé par a^n eſt a^{m-n}; celui de $\overline{a+x}^m$ par $\overline{a+x}^n$

eſt



B
M
m
Q
4
A
P
F
C
p
a
q
N
b
B
M
m
Q
5
P
F
A
C
a
p
q
N
b
D
M
10
C
f
E
D
B
D
E
A
F
M
M
P
11
m
f
a
f
m
M
M
N
N
N
M
M
k
m
b
M
16
P
L
D
T
f
a
C
A
P
F
K
B
t
T


19
L
E
N
C
f
a
20
N
L
M
E
f
a
C
A
F
A
L
M
P
B
C
b
27
m
a
M
23
B
L
E
D
P
F
A
T
C
a
Q
f
t
d
e
N
L
28
B
P
A
m
C
M
a
b
L
K
M
E
R
k
26
T
V
A
q
P
Q
H
L
G
N
R
k
M
F
E
K
30
T
A
q
P
V
Q
I


33
34
37
38
41
42

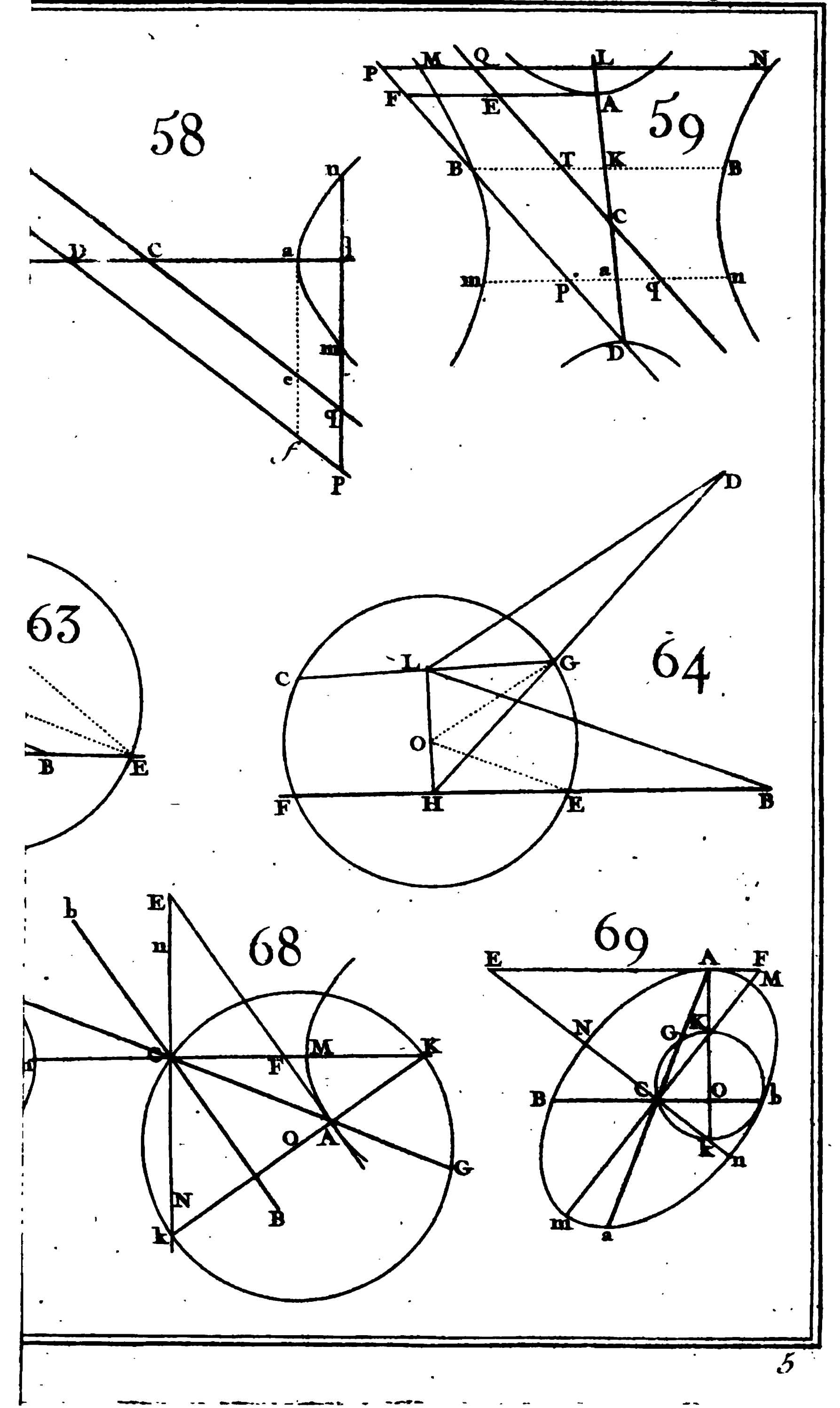
45

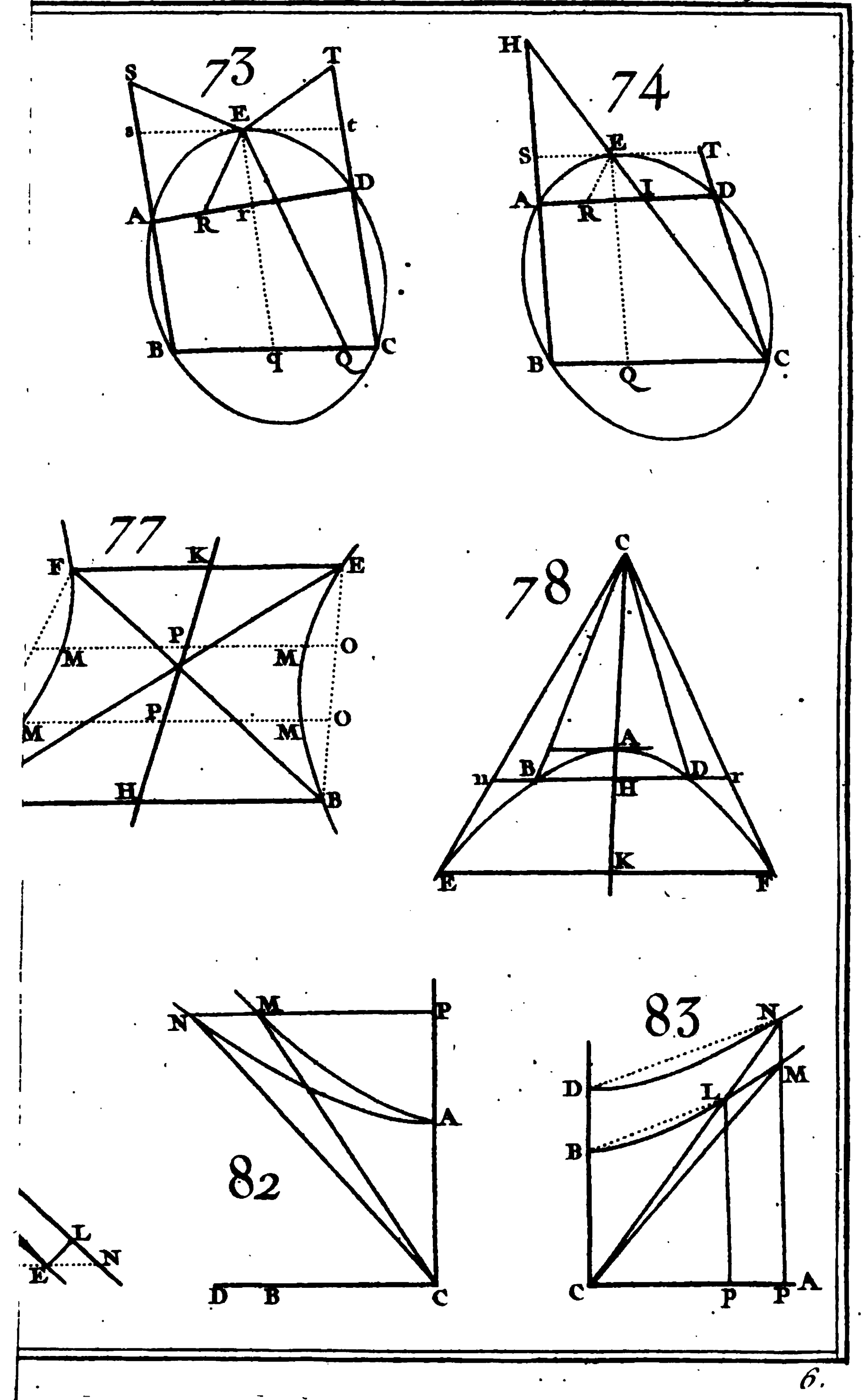
46

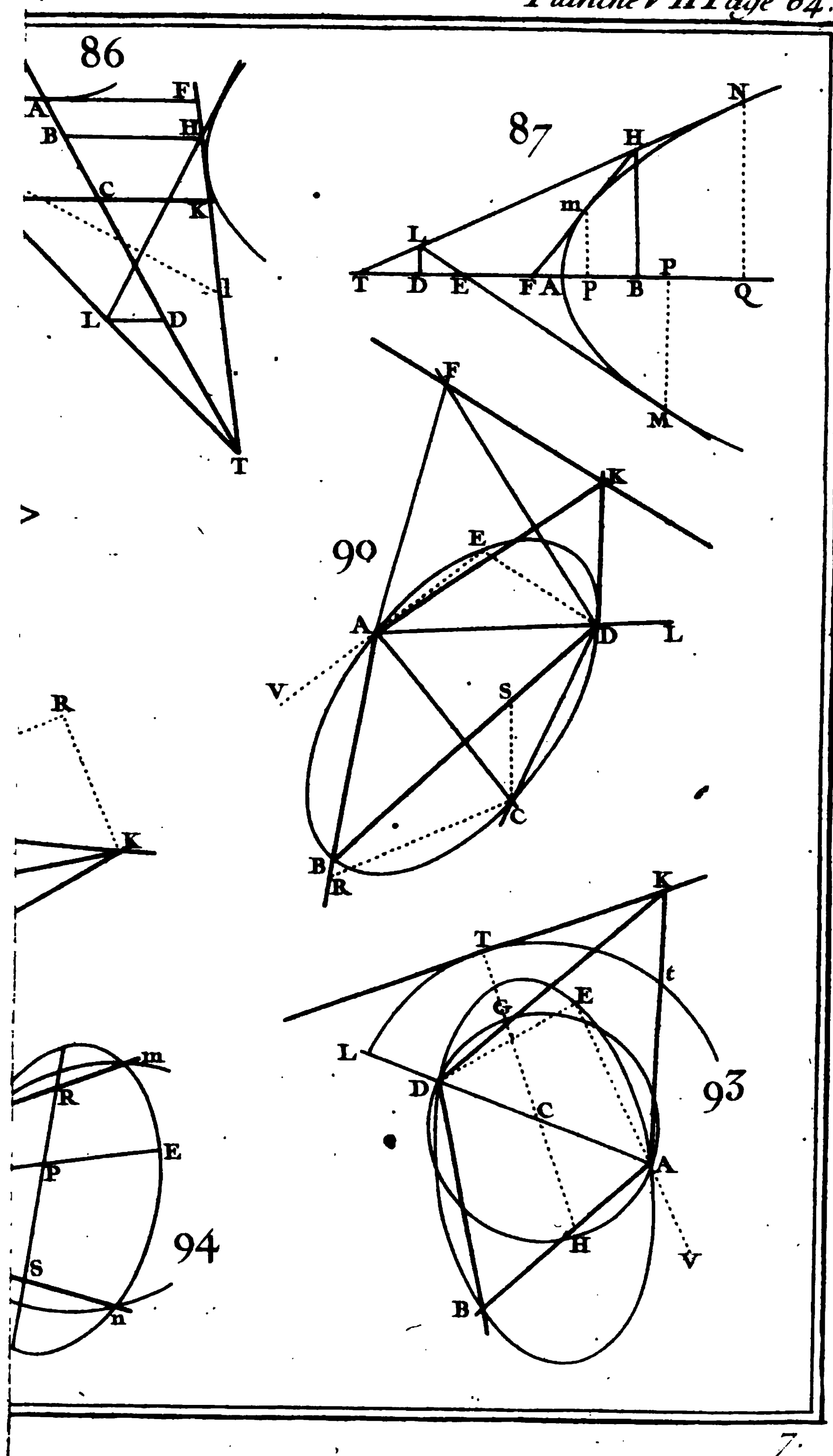
50

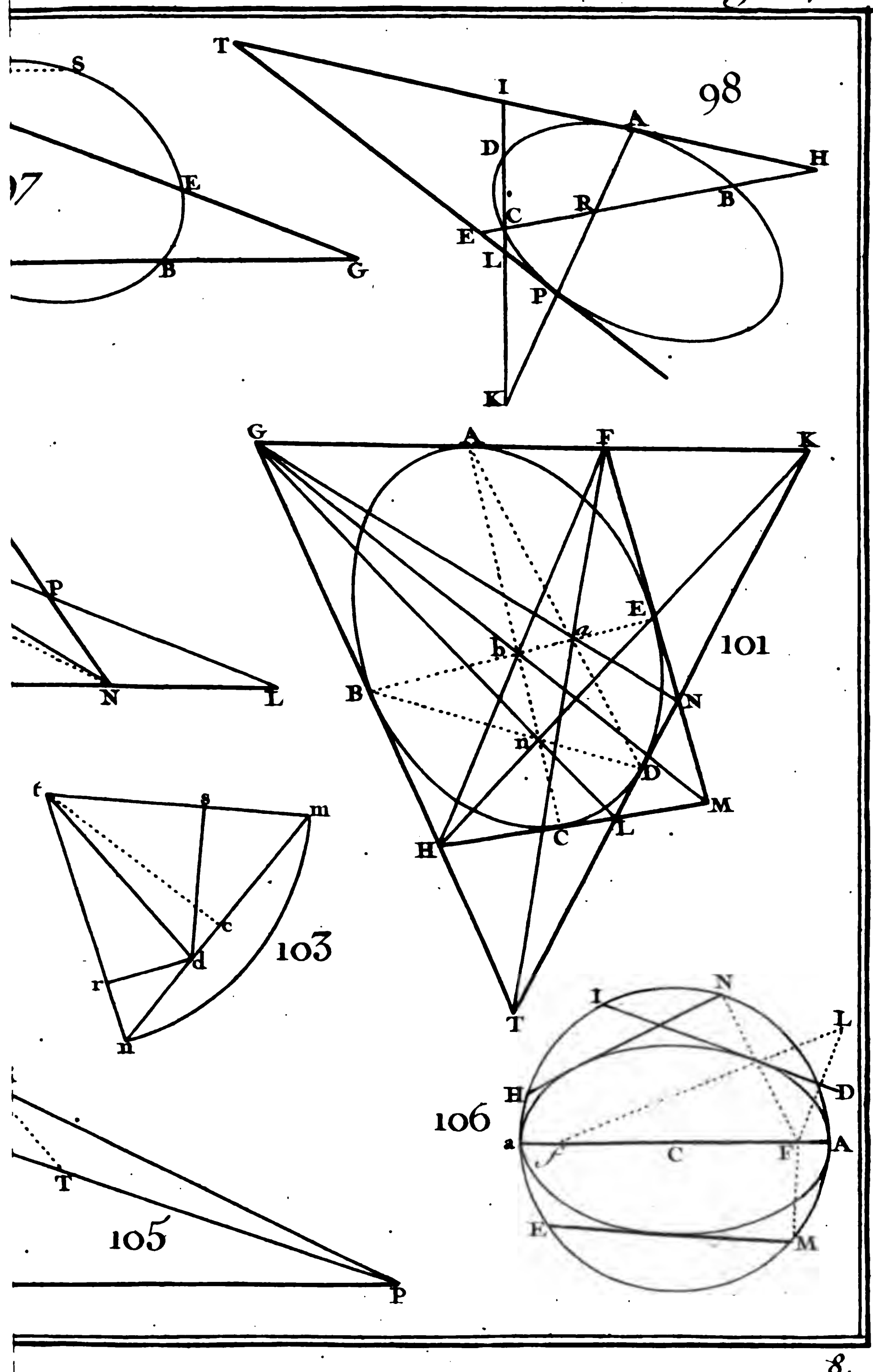
55



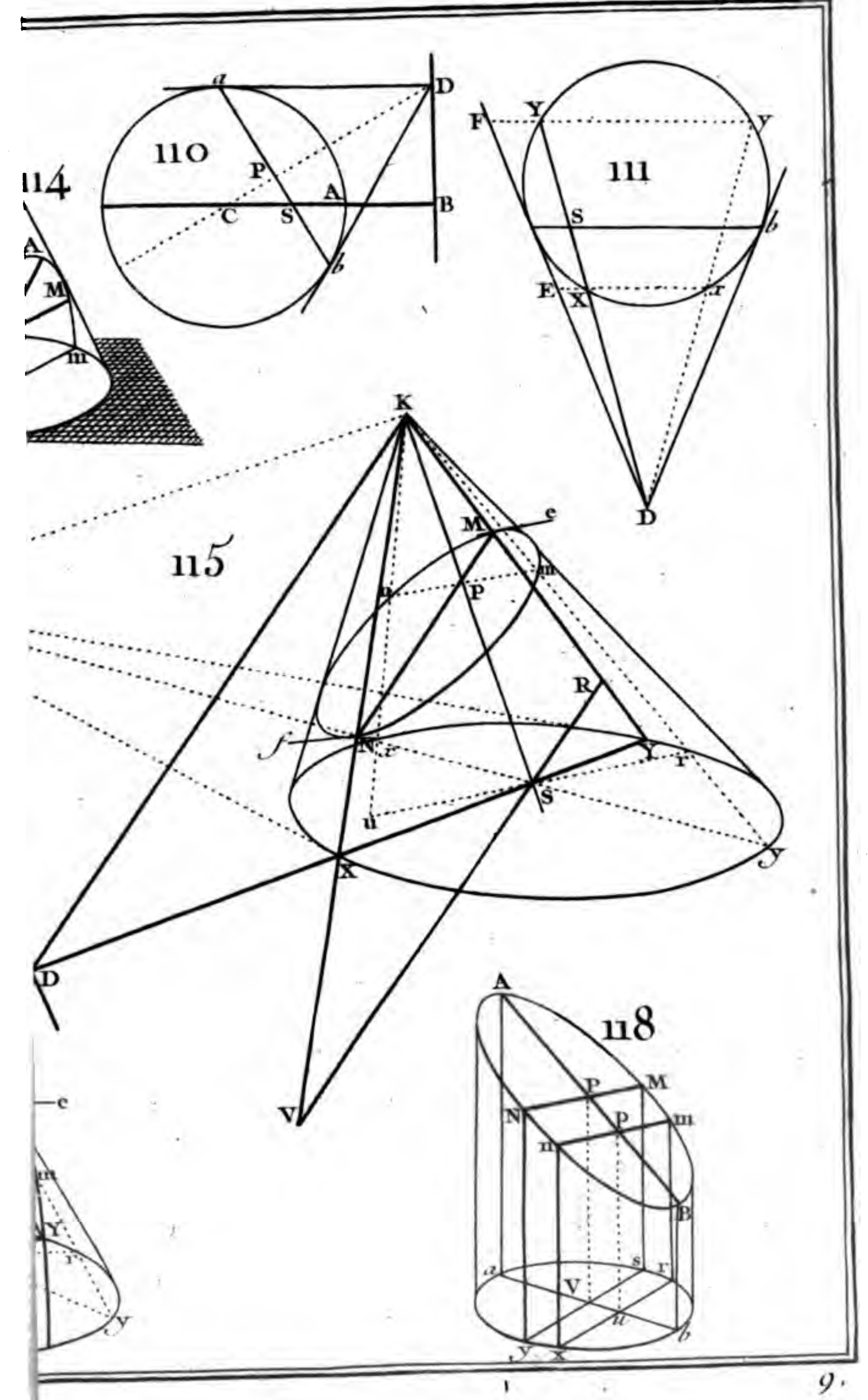

58
59
63
64
68
69


73
S T E s t D A R r B q Q C
74
H E S T A R I D B Q C
77
F K E P M M O P M M O H B
78
C A B D n r H K E F
82
N M P A D B C
83
N D L M B C P P A
L N E


86
A
F
B
H
C
K
l
L
D
T
87
N
H
m
L
T
D
E
F
A
P
B
P
Q
M
F
K
90
E
A
D
L
V
S
C
B
R
R
K
K
T
t
G
E
L
93
D
C
A
H
V
B
m
R
E
P
94
S
n



S
97
E
B
G
T
I
98
A
D
H
C
R
B
E
L
P
K
G
A
F
K
P
E
a
b
101
N
L
B
N
n
D
t
s
m
M
H
C
L
c
103
d
r
n
T
N
I
L
H
D
106
a
f
C
F
A
T
105
E
M
P


110
a
D
P
A
C
S
B
b
111
F
Y
Y
S
b
E
X
r
D
114
A
M
m
K
M
e
115
m
n
P
R
f
N
r
Y
r
S
u
X
Y
D
V
A
118
P
M
N
P
m
n
B
a
s
r
V
u
b
y
X
e
m
Y
r
Y

est $\overline{a+x}^{m-n}$; enfin le quotient de $x^m \times \overline{a+x}^m$ divisé par $x^n \times \overline{a+x}^n$ est $x^{m-n} \times \overline{a+x}^{m-n}$. Ce qui est l'inverse de la régle précédente.

Regle troisieme.

De là on aura $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, & $\frac{1}{\overline{a+x}^n} = \overline{a+x}^{-n}$; car si l'on suppose $m = 0$, a^{m-n} deviendra a^{-n}, de même $\overline{a+x}^{m-n}$ deviendra $\overline{a+x}^{-n}$. D'où il suit que $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; de même $\sqrt[3]{a+x} = \overline{a+x}^{\frac{1}{3}}$, & en général $\sqrt[n]{a+x} = \overline{a+x}^{\frac{1}{n}}$. Car en élevant chaque membre de l'équation $\sqrt[n]{a+x} = \overline{a+x}^{\frac{1}{n}}$ à la puissance n, on aura $\sqrt[n]{\overline{a+x}^n} = \overline{a+x}^{\frac{n}{n}}$, ou $\overline{a+x}^1 = a+x$.

LEMME I.

158. Si l'on multiplie une suite $a^n + ba^{n-1} + bba^{n-2} + b^3 a^{n-3} +$ &c. formée par un binome $a+b$, dont l'exposant du premier terme a diminue, & celui du second b augmente chacun d'une unité dans chaque terme, par la différence $a-b$, le produit sera $= a^{n+1} - b^{n+1}$. Car on aura $a^{n+1} - ba^n + ba^n - bba^{n-1} + bba^{n-1} - b^{n+1}$.

Corollaire.

159. De là il suit que si l'on divise un binome tel que $a^n - b^n$, par la différence $a-b$ des termes, le quotient sera composé d'autant de termes positifs que l'exposant n contient d'unités, & le plus grand exposant du premier terme a, sera $n-1$. Par exemple $a^3 - b^3$ divisé par $a-b$, donnera $aa+ab+bb$, & $a^4 - b^4$ divisé par $a-b$, donnera $a^3 + aab + abb + b^3$; & ainsi des autres.

LEMME II.

160. *Si deux puissances dont le rapport & les directions sont exprimées par les côtés* BA, DA *d'un parallelogramme, agissent en même tems uniformément sur un point* a *sans pesanteur ; je dis que ce point* a *parcourera par ce mouvement composé la diagonale* CA *prolongée.* Fig. 118. n. 2.

I

Fig. 118. *n.* 2. Car que l'on ſuppoſe que la ligne A L ſe meut le long de B A prolongée parallelement à A D, avec une vîteſſe égale à celle que la puiſſance exprimée par B A imprimeroit au point *a* ſi elle agiſſoit ſeule ſur lui, & qu'en même tems ce point *a* s'avance dans A L avec une vîteſſe égale à celle que la puiſſance exprimée par D A lui imprimeroit ſi elle agiſſoit ſeule. Cela poſé, il eſt évident que le point *a* aura la même vîteſſe & ſuivra la même direction, dans cette ſuppoſition, que ſi les deux puiſſances agiſſoient en même tems ſur lui. Mais lorſque la ligne A L aura parcouru la longueur A F, le point *a* ſera avancé dans la ligne A L de F en G, enſorte que A F ſera à F G, comme la force B A eſt à la force D A ou C B. Car les eſpaces parcourus dans le même tems ſont comme les cauſes ou forces motrices. Donc les deux triangles C B A, A F G ſont ſemblables; & B A F étant une même ligne droite, C A G ſera auſſi une même droite. Or comme cela arrive toujours, il s'enſuit que le point *a* parcourt la diagonale C A prolongée.

COROLLAIRE I.

161. Si la vîteſſe du point *a* dans la direction D A diminuoit lorſqu'il eſt arrivé en G, il eſt évident qu'au lieu de ſuivre ſa premiere direction A G vers I, il en prendra une autre G H entre A I & A K. Car comme il parcoureroit l'eſpace K I avec la vîteſſe imprimée par D A, il parcourera un eſpace K H moindre par une vîteſſe moindre; & ſi la vîteſſe dans la direction D A diminuoit encore, lorſque le point *a* eſt arrivé en H, il eſt manifeſte qu'il prendroit encore une autre direction H N qui ſeroit entre G H & A K.

Enfin ſi la vîteſſe dans la direction D A diminuoit continuellement en chaque inſtant, le point *a* décriroit une ligne courbe qui ſeroit concave vers A K.

COROLLAIRE II.

162. Tant que le rapport de deux puiſſances qui agiſſent en même tems ſur un corps eſt conſtant, ce corps parcourera une ligne droite. Mais ſi ce rapport eſt variable, il parcourera un polygone ou une ligne courbe, ſelon que la variation eſt interrompue ou continuelle.

COROLLAIRE III.

163. Ayant la direction du corps & celles des deux puissances motrices dans une place donnée, on aura aussi le rapport des vîtesses imprimées par ces puissances dans cette place, soit que ce rapport ait varié auparavant ou non. Car si la direction du point *a*, lorsqu'il est arrivé en G, est dans A G, il est évident qu'il continuera dans la même direction & avec la même vîtesse avec laquelle il est arrivé en ce point, à moins que le rapport ne vienne à changer, & par conséquent les vîtesses seront entr'elles comme les côtés du triangle A F G fait sur les directions des puissances motrices & sur celle du point *a* en G.

LEMME III.

164. *Si deux puissances agissent par un mouvement continuel sur un point* a, *l'une constante & dans la direction* A P, *& l'autre variable & dans la direction* A E, *ensorte qu'il décrive la courbe* A M : *je dis que la vîtesse avec laquelle ce point* a *arrive en une place* M *dans la direction* A P, *est à la vîtesse dans la direction* A E *ou* P M, *comme la soutangente* T P *est à l'appliquée* P M. Fig. 119.

Si le point *a* continuoit à se mouvoir uniformément avec la vîtesse avec laquelle il est arrivé en M, au lieu de continuer dans la courbe M *n*, il décrira * la droite M N tangente en M. * Art. 162.
Car si le mouvement dans la direction A E est retardé, la courbe sera concave * vers A P ; & si l'on tire les lignes L *p*, N *q*, de * Art. 161.
part & d'autre de P M, paralleles à A E, lesquelles rencontrent la courbe en *m*, *n*, la ligne M N en L, N, & la parallele E M à A P en F & *r* ; cela posé, pendant que le point *a* se meut de F en M, & de M en *r*, dans la direction A P d'un mouvement uniforme, il passera de *m* en F, & de *r* en *n* dans la direction A E d'un mouvement retardé. Or comme la vîtesse dans la direction A E est plus grande en *m* qu'en M, & moindre en *n* qu'en M, par supposition ; l'espace *m* F sera plus grand, & *n r* moindre que les espaces L F, N *r*, que le point *a* décriroit uniformément dans le même tems, avec la vîtesse qu'il a en M. Or comme cela arrive toujours de quelque maniere qu'on puisse tirer ces lignes de part & d'autre, il s'ensuit que la ligne T M N est située du même côté de la courbe A M *n*, & ne la rencontre qu'au seul point M ; & par conséquent elle est tangente en ce point.

Donc puisque la direction du point a en M est dans la tangente M T, il s'ensuit que sa vîtesse dans la direction A P est à celle dans la direction A E, comme la soutangente * T P est à l'appliquée P M.

* Art. 163.

COROLLAIRE.

165. Puisque le point a décrit la courbe A M par le mouvement composé, imprimé par les deux forces qui agissent selon les directions A E, A P, la vîtesse en M dans la direction T M, peut être prise pour celle avec laquelle le point a décrivant la courbe, arrive en M. Car il est évident que tant plus ce mouvement composé est grand ou moindre dans des tems égaux, le point a décrira des parties de cette courbe qui seront aussi plus grandes ou moindres.

N. B. Quoique nous ayons supposé que la vîtesse dans la direction A P est uniforme, elle peut néanmoins varier selon une loi quelconque, aussi bien que celle dans la direction A E, puisqu'on prouvera toujours la même chose que ci-dessus.

DEFINITIONS.

1. La vîtesse avec laquelle le point a arrive en M dans la direction A P, ou avec laquelle la ligne A E arrive dans la position P M, est appellée la *fluxion* de l'abscisse A P.

2. La vîtesse avec laquelle ce point avançant dans la ligne A E ou P M, arrive en M, est nommée la *fluxion* de l'appliquée P M.

3. Et la vîtesse en M dans la direction T M, est appellée la *fluxion* de la courbe A M.

4. En général la *fluxion* de toute quantité variable quelconque, est égale à la somme des produits des quantités génératrices, chacune multipliée par sa vîtesse.

Et réciproquement ces quantités produites par ce mouvement, sont nommées les *Fluentes* de ces fluxions.

N. B. Nous exprimerons généralement dans la suite les quantités constantes par les premieres lettres de l'alphabet, comme a, b, c, d, e, &c. les variables par les dernieres, comme s, t, v, x, y, z, &c. & leurs fluxions par les mêmes lettres avec des points dessus, comme $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

PROBLEME I.

166. *Trouver la fluxion de* yy.

Si l'on suppose que la nature de la courbe AM soit telle qu'en faisant $AP = x$, $PM = y$, $x = yy$ soit son équation, laquelle est comme on voit à la parabole ordinaire dont le parametre est $= 1$. Or on a prouvé * que la soutangente TP, de la parabole est $= 2x$, ou $= 2yy$, à cause que $x = yy$. C'est pourquoi $TP\,(2yy) : PM\,(y) :: {}^{*}\dot{x} : \dot{y}$, ou $\dot{x} = 2y\dot{y}$; & par conséquent $2y\dot{y}$ est la fluxion demandée de yy. * Art. 23. * Art. 164.

PROBLEME II.

167. *Trouver la fluxion de* y^3.

Soit $Ap = x$, $pm = y$, $Aq = u$, $qn = z$, & soit $x = y^3$ l'équation de la courbe AM: on aura aussi $u = z^3$, & $u - x = z^3 - y^3 = {}^{*}\overline{z-y} \times \overline{zz + zy + yy}$. Si à présent la ligne mn rencontre AP en t, on aura $qn - pm\,(z-y) : qp\,(u-x) :: pm : pt :: 1 : zz + zy + yy$. Or si l'on suppose que les lignes pm, qn tombent sur PM, il est évident que tm tombera sur la tangente TM, & pt deviendra $=$ PT. Donc puisque $y = z$ dans ce cas, la proportion ci-dessus se changera en la suivante $PM : PT :: 1 : 3yy :: {}^{*}\dot{y} : \dot{x}$, ou $\dot{x} = 3yy\dot{y}$; & par conséquent $3yy\dot{y}$ sera la fluxion cherchée. * Art. 158. * Art. 164.

En général soit proposé de trouver la fluxion de y^m.

La même chose étant supposée que ci-dessus, on aura $x = y^m$, $u = z^m$, & $u - x = z^m - y^m = \overline{z - y} \times (z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2 z^{m-3} + \&c.)$ continuée * à m termes: c'est pourquoi $pm : pt :: 1 : z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2 z^{m-3} + \&c.$ Et lorsque la ligne mt devient la tangente MT, on aura $z = y$, & $my^{m-1} = {}^{*} z^{m-1} + yz^{m-2} + y^2 z^{m-3} + \&c.$ Donc $PM : PT :: 1 : my^{m-1} :: \dot{y} : \dot{x}$, ou $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$. Et par conséquent $m\dot{y}y^{m-1}$ sera la fluxion demandée. * Art. 159. * Art. 159.

COROLLAIRE I.

168. De là il suit que la fluxion de $dz^{\frac{n}{m}}$ est $\frac{nd}{m}\dot{z}z^{\frac{n}{m}-1}$. Car si l'on suppose $z^{\frac{n}{m}} = x$, on aura $z^n = x^m$, dont la fluxion est $n\dot{z}z^{n-1}$,

$= m\dot{x}x^{m-1}$, ou $n\dot{z}z^{-1} = m\dot{x}x^{-1}$, parce que $z^n = x^m$, ou en multipliant le premier membre par $\frac{d}{m}z^{\frac{n}{m}}$, & le second par son égal $\frac{d}{m}x$, $\frac{nd}{m}\dot{z}z^{\frac{n}{m}-1} = d\dot{x}$.

Corollaire II.

169. La fluxion de $d\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}}$ sera $\frac{d}{p}fn\dot{z}z^{n-1}\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}-1}$.

Car en supposant $\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}} = x$, on aura $e+fz^n = x^p$, dont la fluxion est * A $fn\dot{z}z^{n-1} = p\dot{x}x^{p-1}$; mais comme $\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}} = x$, & $e+fz^n = x^p$, on aura $\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}-1} = x^{1-p}$; donc en multipliant le premier membre de l'équation A, par $\frac{d}{p}\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}-1}$, & le second par son égal $\frac{d}{p}x^{1-p}$, on aura $\frac{dfn}{p}\dot{z}z^{n-1}\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{p}-1}$ ($= d\dot{x}$) pour la fluxion demandée.

* Art. 167.

On trouvera de la même maniere que la fluxion de $d\times\overline{e+fz^n}^{\frac{q}{p}}$, est $\frac{dqfn}{p}\dot{z}z^{n-1}\times\overline{e+fz^n}^{\frac{q}{p}-1}$.

PROBLEME III.

Fig. 120.

170. *Trouver la fluxion de* yz.

Soit A le sommet commun aux deux courbes AM, & AN, dont les propriétés soient telles que les rectangles $pm\times pn$, $qr\times qs$, soient toujours égaux aux abscisses correspondantes Ap, Aq, multipliées par quelque constante $= 1$. Donc si A$p = x$, $pm = y$, $pn = z$, A$q = r$, $qr = u$, $qs = v$, on aura $x = yz$, $r = uv$, & $r - x = uv - yz$. Cette derniere égalité peut être changée en celle-ci: $1 = \frac{u+y}{2}\times\frac{v-z}{r-x} + \frac{v+z}{2}\times\frac{u-y}{r-x}$. Si à présent les lignes rm, sn rencontrent le diametre AP en t & u, on aura $qr - pm\,(u-y) : pq\,(r-x) :: pm\,(y) : pt$, ou $\frac{u-y}{r-x} = \frac{y}{pt}$; de même $\frac{v-z}{r-x} = \frac{z}{pu}$. En substituant ces valeurs dans la derniere équation, elle deviendra celle-ci: $1 = \frac{uz+yz}{2pu} + \frac{vy+zy}{2pt}$. Or si l'on suppose que les lignes rt, su tombent sur les tangentes MT, NV, on aura $y = u$, $z = v$, $pu =$ PV, $pt =$ PT; & par conséquent la derniere équation de-

viendra $\frac{y\dot{z}}{PV}+\frac{z\dot{y}}{PT}=1$, ou $y\dot{z}+z\dot{y}=\dot{x}$, parce que * $\frac{z}{PV}=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, & $\frac{y}{PT}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. * Art. 164.

On peut prouver cela d'une autre maniere plus simple ; car la fluxion de y^2+z^2, est $y\dot{y}+z\dot{z}$ selon ce qu'on vient de prouver, & comme la fluxion de $y+z$ est $\dot{y}+\dot{z}$, celle de $\overline{y+z}^2$, sera $\overline{2\dot{y}+2\dot{z}}\times\overline{y+z}$; car si l'on suppose $y+z=x$, la fluxion de cette égalité sera $\dot{y}+\dot{z}=\dot{x}$, & en multipliant ces égalités ensemble & leurs produits par 2, on aura $\overline{2\dot{y}+2\dot{z}}\times\overline{y+z}=2x\dot{x}$. Or $2x\dot{x}$ est la fluxion de xx égal à $\overline{y+z}^2$; par conséquent $\overline{2\dot{y}+2\dot{z}}\times\overline{y+z}$ est la fluxion de $\overline{y+z}^2$, ou de $yy+2yz+zz$; mais si l'on soustrait la somme des fluxions $2y\dot{y}+2z\dot{z}$ des quarrés $yy+zz$, de la fluxion $2y\dot{y}+2y\dot{z}+2z\dot{y}+2z\dot{z}$, de $\overline{y+z}^2$, la différence $2y\dot{z}+2z\dot{y}$ sera la fluxion de $2yz$, ou $y\dot{z}+z\dot{y}$ celle de yz, comme auparavant.

En général soit proposé de trouver la fluxion de $y^m z^n$.

La même chose étant supposée comme ci-dessus, on aura $r-x=u^m v^n-y^m z^n$, ou $1=\frac{u^m+y^m}{2}\times\frac{v^n-z^n}{r-x}+\frac{v^n+z^n}{2}\times\frac{u^m-y^m}{r-x}$. Mais $v^n-z^n=$ * $\overline{u-z}\times(v^{n-1}+zv^{n-2}+z^2v^{n-3}+$ &c. continué à n termes, & $u^m-y^m=\overline{u-y}\times(u^{m-1}+yu^{m-2}+y^2u^{m-3}+$ &c.) continué à m termes. Donc $1=\frac{u^m+y^m}{2}\times\frac{v-z}{r-x}\times(v^{n-1}+zv^{n-2}+z^2v^{n-3}+$ &c.) $+\frac{v^n+z^n}{2}\times\frac{u-y}{r-x}\times(u^{m-1}+yu^{m-2}+y^2u^{m-3}+$ &c.) ou à cause que $\frac{v-z}{r-x}=\frac{z}{pu}$, & $\frac{u-y}{r-x}=\frac{y}{pt}$; cette derniere équation deviendra $1=\frac{u^m+y^m}{2}\times\frac{z}{pu}\times(v^{n-1}+yv^{n-2}+$ &c.) $+\frac{v^n+z^n}{2}\times\frac{y}{pt}\times(u^{m-1}+yu^{m-2}+$ &c.) Mais lorsque les lignes rt, su tombent sur les tangentes MT, NV, on aura $y=u$, $z=v$, $pu=PV$, $pt=PT$, $\frac{z}{pu}=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, & $\frac{y}{pt}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Par conséquent la derniere équation deviendra $1=y^m\times\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\times nz^{n-1}+z^n\times\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\times my^{m-1}$, ou $\dot{x}=n\dot{z}y^m z^{n-1}+m\dot{y}z^n y^{m-1}$. * Art. 159.

COROLLAIRE I.

171. De là il suit que la fluxion de $dz^{-\frac{n}{m}}$ est $-\frac{dn}{m}\dot{z}z^{-\frac{n}{m}-1}$.

Car si l'on suppose $x = z^{-\frac{n}{m}}$, on aura $x^m = z^{-n}$, ou $x^m z^n =$
* Art. 170. 1, dont la fluxion est * $m z^n \dot{x} x^{m-1} + n x^m \dot{z} z^{n-1} = 0$, ou $m\dot{x}x^{-1} + n\dot{z}z^{-1} = 0$, (à cause que $x^m z^n = 1$) : d'où l'on tire $\dot{x} = -\frac{n}{m} x\dot{z}z^{-1}$; ou en mettant la valeur $z^{-\frac{n}{m}}$ de x, & en multipliant par d, $d\dot{x} = -\frac{dn}{m}\dot{z}z^{-\frac{n}{m}-1}$ sera la fluxion demandée.

COROLLAIRE II.

172. La fluxion de $dz^m \times \overline{e+fz^n}^p$, est $dm\dot{z}z^{m-1}\times\overline{e+fz^n}^p + dpfn\dot{z}z^{m+n-1}\times\overline{e+fz^n}^{p-1}$. Car en supposant $\overline{e+fz^n}^p = x$, on aura $z^m\times\overline{e+fz^n}^p = xz^m$, dont la fluxion du second membre xz^m sera A $\dot{x}z^m + mxz^{m-1}\dot{z}$; & la fluxion de $\overline{e+fz^n}^p = x$, sera $pfn\dot{z}z^{n-1}\times\overline{e+fz^n}^{p-1} = \dot{x}$; & par conséquent en substituant les valeurs de x & de $\dot{x}$ dans la fluxion A, & en multipliant par d, on aura $dm\dot{z}z^{m-1}\times\overline{e+fz^n}^p + dpfn\dot{z}z^{m+n-1}\times\overline{e+fz^n}^{p-1}$ pour la fluxion de dxz^m, ou de son égal $dz^m\times\overline{e+fz^n}^p$.

COROLLAIRE III.

173. La fluxion de xyz sera $\dot{x}yz + \dot{y}xz + \dot{z}xy$. Car si $xy = u$, on aura $xyz = uz$, dont la fluxion du second membre uz sera A $\dot{u}z + \dot{z}u$; & celle de $xy = u$, sera $\dot{x}y + \dot{y}x = \dot{u}$; & en substituant les valeurs de u & de $\dot{u}$ dans la fluxion A, elle deviendra $\dot{x}yz + \dot{y}xz + \dot{z}xy$, qui étant la fluxion de uz, elle sera aussi celle de son égale xyz.

N. B. On auroit pû trouver la fluxion de xyz par *l'article* 170, en supposant autant de courbes qu'il y a de quantités variables; mais comme le grand nombre de courbes est trop embarrassant, on a mieux aimé se servir de la maniere précédente.

Régles générales pour trouver les fluxions.

I. D'une quantité telle que z^m, élevée à une puissance quelconque m, positive ou négative, entiere ou fractionaire.

*Multipliez l'exposant * par cette quantité, changez une de ses dimensions en fluxion, & vous aurez la fluxion demandée* $m\dot{z}z^{m-1}$. * Art. 167.

II. D'un produit $z^n y^m$ de deux quantités élevées à des puissances quelconques.

*Multipliez alternativement la fluxion de l'une par la quantité de * l'autre, la somme de ces produits* $z^n \times m\dot{y}y^{m-1} + y^m \times n\dot{z}z^{n-1}$ *sera la fluxion cherchée.* * Art. 170.

III. D'un binome $\overline{e+fz^n}^p$, élevé à une puissance quelconque.

*Multipliez le produit de l'exposant du binome par la fluxion de la quantité sous le signe par le binome, après avoir diminué son exposant d'une unité, & le * produit* $p \times fn\dot{z}z^{n-1} \times \overline{e+fz^n}^{p-1}$ *sera la fluxion cherchée.* * Art. 169.

IV. D'un produit $z^m \times \overline{e+fz^n}^p$ d'une quantité quelconque multipliée par un binome, l'un & l'autre élevés à une puissance quelconque.

*Multipliez 1°. la fluxion de la quantité hors du signe par le binome; 2°. la fluxion du binome par la quantité hors du signe, & la somme de ces * produits* $m\dot{z}z^{m-1} \times \overline{e+fz^n}^p + z^m \times pfn\dot{z}z^{n-1} \times \overline{e+fz^n}^{p-1}$ *sera la fluxion demandée.* * Art. 171.

REMARQUE I.

On a trouvé la fluxion d'un yy par le moyen de la parabole ordinaire, & de là on a déduit la fluxion d'un rectangle yz dont les côtés sont variables: cela étant supposé, on peut trouver la fluxion d'une quantité élevée à une puissance quelconque, ou du produit de plusieurs quantités multipliées ensemble par le calcul ordinaire, sans avoir recours à des courbes ou autres principes, comme on va voir par quelques exemples.

Soit y^3 dont on veut trouver la fluxion; en supposant $yy = z$, ce qui donne $y^3 = yz$; & comme la fluxion de $yy = z$, est $2y\dot{y} = \dot{z}$, en mettant les valeurs de z & de $\dot{z}$ dans la fluxion $\dot{y}z + y\dot{z}$ du rectangle yz, qu'on a trouvée ci-dessus, on aura

$yy\dot{y} + 2yy\dot{y}$, ou $3yy\dot{y}$ pour la fluxion de yz, ou de son égale y^3; puisque les quantités sont égales, leurs fluxions doivent être égales aussi.

Si l'on veut avoir la fluxion de y^4, on supposera $y^3 = z$, dont la fluxion est $3yy\dot{y} = \dot{z}$, & $y^4 = yz$; en mettant la valeur de z & de $\dot{z}$ dans la fluxion $\dot{y}z + y\dot{z}$ du rectangle yz, on aura $\dot{y}y^3 + 3\dot{y}y^3$, ou $4\dot{y}y^3$ pour la fluxion de yz, ou de son égale y^4.

De là il est aisé de voir que si n est un nombre entier & positif, que la fluxion de y^n est $n\dot{y}y^{n-1}$, c'est-à-dire la fluxion d'une quantité élevée à une puissance quelconque entiere & positive, est égale au produit de l'exposant de la fluxion de cette quantité, & de la quantité donnée dont l'exposant est diminué d'une unité.

La fluxion de yyz, en supposant $yy = x$, sera $2y\dot{y}z + yy\dot{z}$, par la méthode ci-dessus; & la fluxion de y^3z sera $3\dot{y}y^2 + zy^3$; & en général la fluxion de zy^n sera $\dot{z}y^n + nz\dot{y}y^{n-1}$; & celle de z^ny^m sera $n\dot{z}y^m z^{n-1} + m\dot{y}z^ny^{m-1}$.

De là on peut trouver la fluxion de $y^{\frac{n}{m}}$, dont l'exposant est une fraction positive; car si l'on suppose $y^{\frac{n}{m}} = x$, on aura $y^n = x^m$, dont la fluxion est $n\dot{y}y^{n-1} = m\dot{x}x^{m-1}$, ou en mettant la valeur de x & de x^m, il viendra $\frac{n}{m}\dot{y}y^{\frac{n}{m}-1} = \dot{x}$ pour la fluxion cherchée.

De même la fluxion de $y^{-\frac{n}{m}}$, dont l'exposant est négatif & fractionaire, sera $-\frac{n}{m}\dot{y}y^{-\frac{n}{m}-1}$. Car si $y^{-\frac{n}{m}} = x^{-1}$, on aura $x = y^{\frac{n}{m}}$, comme ci-dessus.

Regle generale.

La fluxion d'une quantité telle que y^n, dont l'exposant est un nombre fini quelconque, entier ou rompu, positif ou négatif, sera $n\dot{y}y^{n-1}$.

Remarque II.

Fig. 119. I. Puisqu'on a toujours $nq - mp : qp :: pm : pt$, & lorsque les appliquées pm, qn tombent sur PM, la ligne pt devient égale à la soutangente PT; & cette soutangente étant à

l'appliquée P M, comme la fluxion de l'abscisse A P est à la fluxion de l'appliquée P M, il est évident que le rapport avec lequel les différences $nq - mp$, & qp deviennent nulles, est précisément égal à celui qui est entre les fluxions des coordonnées A P & P M. D'où l'on pourroit aisément déduire la méthode du Calcul différentiel de M. Leibnitz, aussi bien que celle des premieres & dernieres raisons du Chevalier Newton.

II. Quand nous disons, par exemple, que $m\dot{y}y^{m-1}$ exprime la fluxion de y^m, cette expression ne seroit pas juste, si on ne sous-entendoit quelqu'autre fluxion; car nous ne connoissons les vîtesses que par comparaison : c'est pourquoi le sens dans lequel on doit entendre les fluxions, est en imaginant la quantité proposée égale à quelque variable, comme x; & on aura $\dot{x}:\dot{y}::my^{m-1}:1$; & par conséquent on sous-entend toujours la fluxion $\dot{x}$ de la variable x que l'on suppose être égale à la quantité proposée.

III. Puisque dans l'application des fluxions l'on ne se sert que des rapports des vîtesses avec lesquelles les quantités variables x, y, z, &c. sont supposées être engendrées dans le même tems; & comme on peut exprimer ces rapports par de telles lignes qui augmentent ou diminuent dans la même proportion que ces vîtesses, il s'ensuit qu'on peut concevoir les vîtesses avec lesquelles ces lignes sont décrites dans le même tems, comme les fluxions des premieres $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, &c. ou comme les fluxions secondes de x, y, z, &c. Et de même les vîtesses avec lesquelles les lignes qui expriment les rapports des fluxions secondes sont décrites, comme les fluxions des fluxions secondes, ou comme les fluxions troisiémes de x, y, z, &c. & ainsi de suite à tant de degrés subordonnés de fluxions que ces rapports variés.

On marquera les fluxions secondes par deux points, comme $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, &c. & les troisiémes par trois, comme $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$, & ainsi du reste.

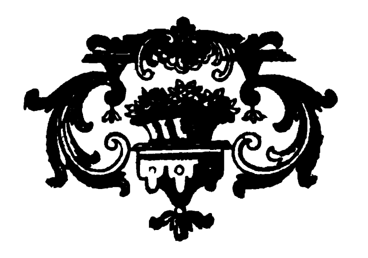
Pour éclaircir ce que nous venons de dire des fluxions secondes & troisiémes par un exemple; supposons que l'abscisse A P *Fig. 119.* soit toujours à l'appliquée P M, comme le degré de vîtesse exprimée par $\dot{x}$ est au degré de la vîtesse contemporaine exprimée par $\dot{y}$; & soit le rapport de ces fluxions $\dot{x}$, $\dot{y}$ exprimé par une équation quelconque, afin qu'on puisse décrire la courbe A M. Cela posé, la fluxion $\ddot{x}$ de $\dot{x}$, ou la fluxion seconde de x, sera à la fluxion $\ddot{y}$ de $\dot{y}$, ou la fluxion seconde de y, comme la sou-

tangente TP est à l'appliquée PM. C'est pourquoi si $\dot{x} = y^3$, on aura $TP = 3\dot{x} = 3y^3$; & par conséquent $TP : PM :: 3y^3 : y :: \ddot{x} : \ddot{y}$, ou $\ddot{x} = 3yy\ddot{y}$. D'où l'on peut conclure *qu'il faut faire les mêmes raisonnemens & les mêmes calculs pour trouver les fluxions secondes, troisiémes, &c. que pour trouver les premieres.*

Fig. 131. IV. La maniere de trouver les fluxions étant connue ou supposée, il sera aisé de trouver les soutangentes TP des courbes, aussi bien que les subperpendiculaires PK, lorsque les appliquées PM sont perpendiculaires sur le diametre AP. Car

* Art. 164. puisque * $\dot{y} : \dot{x} :: PM\ (y) : PT = \frac{y\dot{x}}{\dot{x}}$, & $TP : PM :: PM : PK = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$, on n'a qu'à substituer au lieu de $\dot{x}$, ou de $\dot{y}$, sa valeur prise dans la fluxion de l'équation de la courbe, on aura des expressions pour ces lignes, qui ne renferment aucunes fluxions.

Mais si l'on suppose $\dot{y} = y$ dans l'expression de la soutangente, on aura $TP = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = y\dot{x}$. C'est pourquoi, si l'on prend la fluxion de l'abscisse comme à l'ordinaire, & qu'au lieu de celle de l'ordonnée, on multiplie seulement par son exposant, la fluxion de l'abscisse sera égale à la soutangente cherchée. Soit par exemple $x = y^m$ l'équation de la courbe, on aura $\dot{x}my^m = mx = TP$. Si $axy + y^3 = x^3 + bbx$ est l'équation, on aura $a\dot{x}y + axy + 3y^3 = 3xx\dot{x} + bb\dot{x}$, & $TP = \frac{axy + 3y^3}{3xx + bb - ay}$.



SECTION II.

De la maniere de trouver les plus grands *&* *les* moindres.

DEFINITION.

SOit la courbe M E m, dont les appliquées sont paralleles entr'elles, telle que pendant que l'abscisse A P augmente continuellement, l'appliquée P M augmente aussi jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à un certain point D, & après diminue continuellement; ou au contraire, si elle diminue continuellement jusqu'à un certain point & augmente ensuite, l'appliquée D E est appellée un *plus grand* ou un *moindre*. *Fig.* 121.122.

COROLLAIRE.

174. De là il suit que si l'appliquée P M est exprimée par une ou plusieurs quantités variables, telle que A P, & des constantes, il est évident 1°. que si pendant que A P augmente continuellement, P M commence de zero à augmenter aussi sans diminuer, ou commence de l'infini à diminuer sans augmenter, l'expression ne contiendra aucun plus grand ni moindre. *Fig.* 121.123.

2°. Si P M commence depuis zero à augmenter pendant un certain tems, & diminue après cela continuellement, l'expression contiendra un plus grand D E; & au contraire, si P M commence de l'infini à diminuer pendant un certain tems, & ensuite augmente continuellement, l'expression contiendra un moindre. *Fig.* 122.124.

3°. Enfin si P M commence depuis zero à augmenter pendant un certain tems jusqu'à ce qu'elle devienne D E, & après cela diminue jusqu'à ce qu'elle devienne F G, & ensuite augmente encore une fois, & ainsi alternativement, l'expression contiendra des plus grands & des moindres. *Fig.* 125.

La même chose arrive si P M commence de l'infini à diminuer pendant un certain tems, & après cela augmente & diminue alternativement. *Fig.* 126.

Dans le premier cas du nombre 3°. le premier D E sera un plus grand, le second F G un moindre, le troisiéme H I un *Fig.* 125.

plus grand, le quatriéme K L un moindre, &c. Dans le deuxiéme cas, le premier * D E sera un moindre, le second F G un plus grand, le troisiéme H I un moindre; & ainsi de suite alternativement dans les deux cas, tant de fois que l'expression contiendra des plus grands & des moindres.

* Fig. 126.

N. B. Ce que nous venons de dire est vrai dans tous les cas possibles, en observant seulement que le moindre entre deux plus grands devient quelquefois zero, & le plus grand entre deux moindres infini, ce qu'on peut toujours distinguer par la nature de l'expression.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 121. 122. 175. *La nature de la courbe* M E m *étant donnée, trouver sa plus grande ou moindre* appliquée *; ou, ce qui est la même chose, une expression étant donnée, trouver ses* plus grands *& ses* moindres.

Il est évident que lorsque l'appliquée P M devient la plus grande ou la moindre D E, la tangente M T deviendra ou parallele à l'abscisse A B, comme dans les figures 121, 122, ou parallele à l'appliquée P M, comme dans les figures 123, 124. C'est pourquoi la fluxion de l'appliquée P M devient zero dans le premier cas, & infinie dans le second à l'égard de la fluxion de l'abscisse A P; par conséquent en supposant la valeur de la fluxion de l'appliquée égale à zero ou à l'infini, on trouvera une valeur pour A P, telle que D E soit un plus grand ou un moindre.

REMARQUES.

I. En supposant l'appliquée P M constante, on aura la même chose qu'en supposant sa fluxion égale à zero.

II. Si l'expression fluxionaire est une fraction, le numerateur étant fait égal à zero, donnera la valeur demandée de A P, lorsque la tangente M T est parallele à A P; & au contraire le dénominateur étant fait égal à zero, donnera la valeur demandée de A P, lorsque la tangente est parallele à P M, puisque la fluxion de l'appliquée sera $= 0$ dans le premier cas, & $= \infty$ dans le second.

EXEMPLE I.

176. *Diviser une ligne* A B = a, *de telle maniere que le produit* $\overline{AD}^m \times \overline{DB}^n = x^m \times \overline{a-x}^n$ *soit un plus grand.* Fig. 117.

Soit D E = y, & $y = x^m \times \overline{a-x}^n$, l'équation de la courbe A E B. La fluxion * $m\dot{x}x^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n\dot{x}x^m \times \overline{a-x}^{n-1}$ étant supposée = o, & divisée par $\dot{x}x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}$, donnera $ma - mx - nx = o$, ou A D = $x = \frac{am}{m+n}$. * Reg. 4.

Il est évident que si m & n sont des nombres positifs, y sera toujours un plus grand; car si $x = o$, ou $= a$, y sera égal à zero. Donc * y = D E sera un plus grand. * Art. 174. n. 2.

Mais si n est négatif & moindre que m, l'équation $x = \frac{ma}{m+n}$, donnera $x > a$, & par conséquent l'équation $y = x^m \times \overline{a-x}^n$, deviendra alors $y = x^m \times \overline{x-a}^{-n}$; & lorsque $x = a$, ou $= \infty$, y sera infini. Et par conséquent D E = y * sera un moindre. * Art. 174. n. 3.

Dans ce dernier cas l'énoncé du problême sera ainsi : *soit* A B *continuée en* D, *ensorte que* $\overline{AD}^m \times \overline{DB}^{-n}$ *soit un* moindre.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{4}{27}a^3$ = à un plus grand.

Si $m = 2$, $n = 3$, on aura $x = \frac{2}{5}a$, & $y = \frac{108}{3125}a^5$ = à un plus grand.

Si $m = 3$, $n = -2$, on aura $x = 3a$, & $y = \frac{27}{4}a$ = à un moindre.

EXEMPLE II.

177. Diviser une ligne a en trois parties A = x, B = y, C = $a - x - y$, telle que que le produit M. $x^m y^n \times \overline{a-x-y}^r$ soit un plus grand.

La fluxion du produit M, en prenant y constante, sera $m\dot{x}y^n x^{m-1} \times \overline{a-x-y}^r - r\dot{x}x^m y^n \times \overline{a-x-y}^{r-1} = o$, qui étant divisée par $\dot{x}y^n x^{m-1} \times \overline{a-x-y}^{r-1}$, donnera $m\overline{a-x-y} - rx = o$, ou $\frac{ma - my}{m+r} = x$. Cette valeur de x

étant ſubſtituée dans M, donnera $y^n \times \overline{a-y}^{m+r}$, en omettant les quantités conſtantes ; la fluxion de cette derniere quantité étant diviſée par $\dot{y}y^{n-1} \times \overline{a-y}^{m+r-1}$, donnera $na - ny - my - ry = 0$, ou $y = \frac{na}{m+n+r}$. D'où en ſubſtituant cette valeur dans celle de x & de C, on trouvera $A = \frac{ma}{m+n+r}$, $B = \frac{na}{m+n+r}$, $C = \frac{ra}{m+n+r}$.

Si l'on veut diviſer une ligne a *en quatre parties* $A = x$, $B = y$, $C = z$, $D = a - x - y - z$, *telle que le produit* $x^m y^n z^r \times \overline{a-x-y-z}^s$ *ſoit un plus grand ;* on trouvera en faiſant $m + n + r + s = u$, que $A = \frac{ma}{u}$, $B = \frac{na}{u}$, $C = \frac{ra}{u}$, $D = \frac{sa}{u}$.

D'où l'on peut conclure en général que ſi l'on veut diviſer une ligne a en tant de parties A, B, C, D, E, &c. que l'on voudra, telle que le produit de leurs puiſſances, dont les expoſans ſoient m, n, r, s, t, &c. ſoit un plus grand, en nommant la ſomme des expoſans u, on aura $A = \frac{ma}{u}$, $B = \frac{na}{u}$, $C = \frac{ra}{u}$, $D = \frac{sa}{u}$, $E = \frac{ta}{u}$, &c. *Ce qui fait voir que ces parties ſont entr'elles comme les expoſans de leurs puiſſances.*

Il faut remarquer en général que lorſqu'il y a pluſieurs inconnues qui dépendent l'une de l'autre comme dans le dernier cas, il faut les ſuppoſer l'une après l'autre conſtantes, & mettre les valeurs qu'on a trouvées dans la premiere expreſſion juſqu'à ce qu'il n'y en ait qu'une, & alors on trouve la quantité cherchée comme à l'ordinaire.

EXEMPLE III.

178. *De tous les cylindres qu'on puiſſe inſcrire dans une ſphere, trouver le plus grand.*

Fig. 118. Soit A M *m a* la moitié d'un grand cercle de la ſphere ; P M, *p m* deux appliquées égales ; ſi $CA = Ca = a$, $CP = Cp = x$, il eſt évident que $Pp \times \overline{PM}^2 = 2x \times \overline{aa - xx}$ ſera comme ce cylindre. Donc la fluxion $2aa\dot{x} - 6xx\dot{x} = 0$ donne $CP = x = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$.

Si de tous les cylindres qu'on peut inſcrire dans une ſphere, on veut avoir celui dont la ſurface convexe ſoit la plus grande, on aura $Pp \times PM = 2x \times \sqrt{aa - xx}$ pour le plus grand, dont

dont la fluxion $2\dot{x}\sqrt{aa-xx} - \frac{2xx\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}} = 0$ donne CP $= x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

EXEMPLE IV.

179. *De tous les cones qu'on peut inscrire dans une sphere ; trouver le plus grand.*

Il est évident que $Ap \times \overline{pm}^2 = \overline{a+x} \times \overline{aa-xx}$ sera comme ce cone : donc la fluxion $aa\dot{x} - xx\dot{x} - 2ax\dot{x} - 2xx\dot{x} = 0$ donnera CP $= x = \frac{1}{3}a$.

Si de tous les cones qu'on peut inscrire dans une sphere on veut celui de la plus grande surface, on aura $Am \times pm = \sqrt{2aa+2ax} \times \sqrt{aa-xx}$ pour le plus grand, dont la fluxion $\frac{a\dot{x}\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{2aa+2ax}} - \frac{x\dot{x}\sqrt{2aa+2ax}}{\sqrt{aa-xx}} = 0$, donne $aa - 2ax - 3xx = 0$, ou CP $= x = \frac{1}{3}a$. Ce qui fait voir que ces deux cones sont égaux.

EXEMPLE V.

180. *Entre tous les cones ou pyramides qui ont la même solidité, trouver celui de la moindre surface convexe.*

Soit y le rayon de la base, x la hauteur, $y\sqrt{yy+xx}$ sera comme la surface, dont la fluxion $\dot{y}\sqrt{yy+xx} + \frac{yy\dot{y}+yx\dot{x}}{\sqrt{yy+xx}} = 0$, donne $2yy\dot{y} + xx\dot{y} + x\dot{x}y = 0$. Or si a exprime la solidité donnée, on aura $a = xyy$, dont la fluxion $\dot{x}yy + 2y\dot{y}x = 0$, ou $\dot{x}y = -2\dot{y}x$, & cette valeur de $\dot{x}y$ étant substituée, donne $2yy = xx$. D'où l'on voit que le quarré du rayon de la base doit être double du quarré de la hauteur.

PROBLEME I.

181. *Etant donné un corps dur* p *avec sa vîtesse* v, *& celle* u *d'un corps indéterminé* z, *qui se rencontrent dans des directions directement opposées, l'on demande la plus grande force de* z *après le choc.*

Soit x la vîtesse commune après le choc, on aura par les loix du mouvement $xp + xz = pv - zu$, ou $x = \frac{pv-zu}{p+z}$;

ainsi $zx = \frac{pvz - zzu}{p+z}$ sera la force du corps z après le choc, dont la fluxion $\frac{pv\dot{z} - 2z\dot{z}u}{p+z} - \frac{pvz\dot{z} + z^2u\dot{z}}{p+z^2} = 0$, donnera $ppv - 2puz - zzu = 0$; d'où l'on tire $z = p\sqrt{\frac{v+u}{u}} - p$. Et en mettant cette valeur dans celle de x & de zx, on aura $x = \sqrt{vu+uu} - u$, & $zx = pv + 2pu - 2p\sqrt{vu+uu}$.

Si l'on suppose que les corps vont du même côté, on aura $xz = \frac{pv + zu}{p+z}$; d'où l'on voit qu'en changeant seulement le signe de u, on aura $z = p\sqrt{\frac{u-v}{u}} - p$, $x = u - \sqrt{uu - vu}$, & $zx = pv - 2pu + 2p\sqrt{uu - vu}$.

COROLLAIRE.

182. De là il suit que si les vîtesses v & u sont égales, on aura lorsque les corps se meuvent dans des directions opposées, $z = p\sqrt{2} - 1$, $x = v\sqrt{2} - 1$, & $zx = p \times \overline{3v - 2v\sqrt{2}}$. Ce qui fait voir que si deux corps p & z se choquent dans des directions opposées avec des vîtesses égales, le plus grand p imprimera la plus grande force possible au plus petit z, si $p : z :: 1 : \sqrt{2} - 1$.

REMARQUE.

Par le moyen de cet exemple on pourra donner la plus grande perfection qui soit possible aux machines qui servent à battre ou à enfoncer des corps. Car comme les vîtesses sont comme les produits des longueurs des bras de leviers, ces leviers étant donnés, on pourra déterminer le rapport entre la force motrice p & le fardeau mû z, par le moyen de l'équation $z = p\sqrt{\frac{v+u}{u}} - p$; & au contraire le rapport entre la force motrice p & le fardeau z étant donné, on pourra déterminer la vîtesse ou le produit des longueurs des bras de leviers, par le moyen de la même équation. On pourra de même connoître le degré de perfection d'une machine déja exécutée.

PROBLEME II.

183. *Dans un triangle donné* A B C, *trouver un point* O *tel que la somme des lignes tirées de ce point aux points angulaires, soit un* moindre. Fig. 128. n. 2.

Concevez un arc de cercle E O F décrit du centre A par le point cherché O. Cela posé, si B O $= y$, O C $= z$, A O $= a$, on aura $a + y + z =$ à un moindre; donc $\dot{y} = -\dot{z}$. Ainsi si l'on prend la partie O t de la tangente en O, pour la fluxion de l'arc de cercle, les parties O b, O c des lignes C O, B O, terminées par les lignes $t\,b$, $t\,c$ tirées perpendiculaires sur C O & B O, exprimeront les fluxions $-\dot{z}$, $\dot{y}$, qui par conséquent sont égales, & par conséquent l'angle b O $t =$ l'angle c O t; & ces angles étant ajoutés aux angles droits t O a, F O a, donneront l'angle A O B égal à l'angle A O C. On prouvera de la même maniere en concevant un arc de cercle décrit du centre C par le point O, que les angles C O A, C O B sont égaux; par conséquent chacun des angles est de 120 degrés.

PROBLEME III.

184. *Dans un quadrilatere donné* A B C D, *trouver un point* O *tel que la somme des lignes tirées de ce point aux quatre points angulaires, soit un* moindre. Fig. 128. n. 3.

Soit $t\,u$ une tangente à l'ellipse décrite des foyers A, B, par le point cherché O, & dont le premier axe soit $=$ A O $+$ O B. Cela posé, puisque la somme des lignes A O, O B, est constante par construction, la fluxion de D O $+$ O C sera $= 0$; donc parce que nous avons dit dans le problême ci-dessus, les angles t O D, u O C doivent être égaux; & par la nature de l'ellipse les angles A O t, B O u sont aussi égaux, & par conséquent l'angle A O D est égal à l'angle B O C. On prouvera de la même maniere que l'angle D O C est égal à l'angle A O B; par conséquent les lignes D O, O B ne sont qu'une même ligne droite, aussi bien que A O & O C. D'où l'on voit que le point O est le point d'intersection des deux diagonales A C & B D.

On peut démontrer ceci d'une maniere plus simple par la Géometrie ordinaire; car si l'on tire d'un point quelconque z pris dans la figure, des lignes aux angles A, B, C, D, il est clair que la ligne A C est plus courte que la somme des lignes tirées de A à z, & de C à z, de même la ligne B D est plus courte que la som-

me des lignes tirées des points B & D au point z; par conséquent la somme des diagonales AC, BD, est moindre que la somme des lignes tirées d'un point quelconque z aux quatre angles.

PROBLEME IV.

185. *Trouver la plus grande superficie que deux droites* AC, BC *données avec une autre quelconque peuvent contenir.*

Fig. 128. n. 4. Il est évident que le triangle ACB sera le plus grand, lorsque l'angle ACB que les deux droites données font entr'elles, est droit, puisqu'il sera toujours plus grand que tout autre triangle ACD, dont le côté CD est = CB, & dont l'angle ACD est plus grand ou moindre qu'un droit.

PROBLEME V.

186. *Trouver la plus grande superficie qui puisse être contenue dans un nombre de lignes quelconques données & une indéterminée.*

Fig. 128. n. 5. Je dis que si les droites AB, BC, CD, DE, EF, données sont inscrites dans un demi-cercle dont le diametre AF soit l'indéterminé, elles contiendront la plus grande superficie possible.

Car nous venons de prouver que la plus grande superficie que deux droites données & une indéterminée puissent contenir, est lorsque ces droites font un angle droit entr'elles; ainsi à moins que les angles ABF, ACF, ADF, AEF soient droits, ces triangles pourroient être augmentés sans changer le reste de la figure. Car si quelque angle comme C du triangle FCA, étoit plus grand ou moindre qu'un angle droit, ce triangle pourroit être augmenté, & ainsi toute la figure, en tournant le triangle ABC dans le plan de la figure autour du centre C; car ni ce triangle, non plus que le trapeze CDEF, ne seroient par là diminués. Donc, &c.

PROBLEME VI.

Ce problême a été résolu le premier par M. Simpson.

187. *L'on demande la plus grande superficie qui puisse être terminée par quatre droites données.*

Même Fig. Puisque la superficie ABCDEFA est la plus grande qui puisse être terminée par ces six droites, une de ses parties, comme ABCD, terminée par quatre droites, sera aussi la plus

grande qu'elles puissent contenir, autrement toute la figure pourroit être augmentée, ce qui est contraire à ce que nous avons prouvé. Par conséquent la plus grande superficie qui puisse être contenue par un nombre quelconque de droites données, est celle dont la figure est inscrite dans un cercle; par conséquent si le nombre de ces droites étoit infini, on les pourroit considérer comme la circonférence même. Ainsi le cercle est la plus grande figure de toutes celles qui sont terminées par des lignes de même longueur.

Si l'on tire AL, CN perpendiculaires sur CB, prolongée, & sur AD, & si $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BL = x$, on aura $a : x :: c : \frac{cx}{a} = DN$, parce que les angles ABL, ADC ont chacun pour mesure la moitié de l'arc ABC. Or le triangle ABC donne $\overline{AC}^2 = aa + bb + 2bx$, & le triangle ACD, donne $\overline{AC}^2 = cc + dd - \frac{2cdx}{a}$. D'où l'on tire $x = \frac{cc + dd - aa - bb}{2ab + 2cd} \times a$. Par le moyen de cette valeur de x, on peut déterminer la figure demandée.

De ce que nous venons de dire à l'égard de la maniere de trouver les plus grands & les moindres, il sera aisé au lecteur de l'appliquer à d'autres exemples, selon qu'il en trouvera l'occasion; & comme nous donnons plusieurs problêmes sur ce sujet à la fin de ce Traité, nous n'insisterons pas davantage là-dessus.



SECTION III.

De la maniere de trouver les rayons *des développées.*

LEMME I.

Fig. 129. 188. *Si une ligne droite* C A *tourne autour du centre* C, *ensorte que le point fixe* A *décrive un arc de cercle* A M, *pendant que le point mobile* B *décrit une courbe quelconque* B N; *je dis que les vîtesses angulaires des points* A, B, *en* M, N, *dans des directions perpendiculaires sur* C M, *seront comme les rayons* C M, C N.

Soient M T, N V des tangentes en M & N, & N u perpendiculaires sur C M. Cela posé, la vîtesse du point N dans la direction de la tangente N V est équivalente aux vîtesses dans les directions V u, N u, dont la premiere V u est celle avec laquelle le point N avance ou recule du centre C dans la direction C B; & la seconde N u, celle avec laquelle ce point tourne. C'est pourquoi, puisque M T parallele à N u exprime la vîtesse angulaire du point A en M, on aura C N : C M :: N u : M T.

AUTREMENT.

Soient M P, N Q perpendiculaires sur C A, & du point m pris à volonté dans la tangente V N, soient tirées mn, mr perpendiculaires sur Q N, & C N prolongées; la premiere étant prolongée, rencontre C N en s: cela posé, si N m exprime la fluxion de la courbe B N, $-mn$ exprimera celle de C Q, * & N n celle de Q N; & enfin mr exprimera la vîtesse angulaire du point N. Ainsi si C Q $= x$, Q N $= y$, C P $= u$, P M $= z$, C N $= n$, $mr = q$, C A $= r$, on aura N $n = \dot{y}$, $mn = -\dot{x}$; & les triangles semblables C Q N, N ns donneront N Q (y) : C Q (x) :: N n ($\dot{y}$) : $ns = \frac{x\dot{y}}{y}$; ainsi $ns + nm = \frac{x\dot{y}}{y} - \dot{x}$. Et les triangles semblables C Q N, mrs donnent C N (n) : Q N (y) :: ms $\left(\frac{x\dot{y}}{y} - \dot{x}\right)$: mr (q), ou $nq = x\dot{y} - y\dot{x}$. Enfin les triangles semblables C Q N, C P M donnent C Q (x) : Q N (y) ::

* *Art.* 64.

CP (u) : PM $(\sqrt{rr-uu})$, ou $\frac{y}{x} = \frac{1}{u}\sqrt{rr-uu}$, dont la fluxion sera $\frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{xx} = \frac{rr\dot{u}}{uuz}$, parce que $z = \sqrt{rr-uu}$. En mettant au lieu de $\dot{y}x - \dot{x}y$ sa valeur nq, on aura $\frac{nq}{xx} = \frac{rr\dot{u}}{uuz}$, ou $\frac{q}{x} = \frac{r\dot{u}}{uz}$, à cause que $n : x :: r : u$. Donc CQ (x) : CP (u), ou CN : CM :: $q : \frac{r\dot{u}}{z}$. Or PM (z) : CM (r) :: PT $(\dot{u})$: TM $=$ $\frac{r\dot{u}}{z}$ $=$ à la fluxion de l'arc AM. Donc, &c.

COROLLAIRE.

189. De là il suit que si le point C décrit la courbe CO dans le tems que le point B décrit la courbe BN, & A l'arc du cercle AM, & si OX est perpendiculaire, & Xt parallele à CM, & la derniere rencontrant VN en u, on aura Xu : Xt, ou ON : OM :: la différence Vu entre les vîtesses angulaires des points O & N est à la différence entre les vîtesses angulaires Tt des points O & N. *Fig.* 130.

N. B. On considérera toujours ci-après la vîtesse d'un point quelconque d'une ligne qui se meut d'un mouvement angulaire dans une direction perpendiculaire à cette ligne, comme une *vîtesse circulaire*, c'est-à-dire comme la vîtesse de ce point, s'il décrivoit un arc de cercle.

DEFINITION.

Si l'on conçoit qu'une courbe BDF, toujours concave vers le même côté, soit enveloppée par un fil ABDF, dont l'un des bouts étant fixé en F, l'autre A commence à se mouvoir depuis la position AB de la tangente en B, pour se desengager de la courbe BDF, ce point A décrira une courbe AMN. Cela posé, *Fig.* 131.

La courbe BDF est appellée la *développée* de la courbe AMN; & les parties BA, DM, FN du fil entre les points touchans B, D, F, & le point décrivant A, sont nommées les *rayons de la développée*, *ou rayons de la courbure*.

COROLLAIRE I.

190. Puisque AB + l'arc BD = DM, & AB + l'arc BDF = FN, il s'ensuit que la différence entre les rayons BA, DM, est toujours égale à l'arc BD de la développée,

terminé par les points touchans de ces rayons ; de même l'arc BDF est $= FN - BA$.

COROLLAIRE II.

191. Il est évident que chaque rayon DM de la développée, est perpendiculaire à la tangente MT, qui passe par le point décrivant M. Car si la direction de la force qui fait que le point A a décrit la courbe AMN, faisoit un angle obtus DMT avec DM, la partie DM du fil ne sera pas tendue, & ainsi le point M ne seroit pas dans la courbe ; & au contraire si l'angle DMT étoit aigu, il y auroit une partie de cette force détruite par la trop grande tension du fil ; & le point A ne décriroit la courbe qu'avec la partie de cette force qui agiroit dans une direction perpendiculaire à DM. Donc, &c.

COROLLAIRE III.

192. Puisque la même droite TM touchera le cercle décrit du centre D avec un rayon égal à DM, aussi bien que la courbe AM, il s'ensuit que la vitesse du point A en M dans la direction de la tangente, sera égale à celle avec laquelle ce point décriroit d'un mouvement uniforme un arc de cercle avec le rayon DM, dans le même tems que ce point décrit l'arc AM.

COROLLAIRE IV.

193. A cause que la courbure des cercles diminue en même proportion que les rayons augmentent, il s'ensuit que la courbure en M sera à celle en N comme le rayon FN de la développée est au rayon DM de la même. Par conséquent les courbures seront toujours réciproquement proportionnelles aux rayons des développées en ces points.

PROBLÈME GENERAL.

Fig. 131. 194. *La nature de la courbe* AM *étant donnée, trouver le rayon* DM *de la développée mené par un point donné* M *de la courbe.*

I. Soient les ordonnées paralleles entr'elles & perpendiculaires sur AP. Si la partie M*m* de la tangente exprime la fluxion de l'arc AM, & K*k* celle de la ligne AK, & que l'on tire K*n* perpendiculaire, & *kn* parallele à KM, en nommant $AP = x$,

PM

P M $=y$, P K $=r$, K M $=c$, & K $k=q\dot{x}$ (q eſt une indéterminée), les triangles ſemblables M P K , K n k donneront K n $=\frac{yq\dot{x}}{c}$ pour la * vîteſſe circulaire du point K à l'égard du rayon D K. Or comme P M (y) : K M (c) :: T P : T M :: * $\dot{x}$: M $m=\frac{c\dot{x}}{y}=$ à la vîteſſe circulaire * du point M à l'égard du rayon D M, il ſuit que D M : D K (:: $\frac{c\dot{x}}{y}:\frac{yq\dot{x}}{c}$) :: cc : qyy, & en diviſant, D M : K M (c) :: $cc : cc-qyy$: d'où l'on tire A, D M $=\frac{c^3}{cc-qyy}$

* Art. 188.
* Art. 164. 165.
* Art. 189.

II. Si à préſent les ordonnées ou rayons P M partent tous du même point P, ſoient tirées P S & K P reſpectivement perpendiculaires ſur la tangente M T & ſur P M ; & ſoit D M le rayon cherché de la développée. Si M m exprime la fluxion de la courbe N M, S s celle de P S, ou la vîteſſe circulaire du point S à l'égard du rayon M S, & $\dot{x}$ la vîteſſe circulaire du point M à l'égard du rayon P M, en nommant comme auparavant P M $=y$, P K $=r$, K M $=c$, P S $=v$, on aura T M : P M :: * M m ($\dot{z}$) : $\dot{y}$ :: P M (y) : M S $=\frac{y\dot{y}}{\dot{z}}$. Or à cauſe de l'angle droit D M S & conſtant, le mouvement angulaire des lignes D M, M S ſera égal ; on aura donc D M : M S $\left(\frac{y\dot{y}}{\dot{z}}\right)$ :: $\dot{z}$: $\dot{v}$, ou D M $=\frac{y\dot{y}}{\dot{v}}$. Or puiſque T M : T P :: * $\dot{z}$: $\dot{x}$ :: P M (y) : P S $=v$ $=\frac{y\dot{x}}{\dot{z}}$, dont la fluxion eſt $\dot{v}=\frac{\dot{x}\dot{y}\dot{z}+\ddot{x}y\dot{z}-\dot{x}y\ddot{z}}{\dot{z}^2}$. Par conſéquent D M $=\frac{y\dot{y}\dot{z}^2}{\dot{x}\dot{y}\dot{z}+\ddot{x}y\dot{z}-\dot{x}y\ddot{z}}$, qui eſt une formule générale dans laquelle il n'y a aucune fluxion ſuppoſée conſtante. En ſuppoſant y égale à l'infini, on aura D M $=\frac{\dot{y}\dot{z}^2}{\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z}}$, pour le cas où les ordonnées ſont paralleles entr'elles.

Fig. 132.
* Art. 64. 65.
* Art. 64. 65.

COROLLAIRE I.

195. A cauſe des triangles ſemblables K P M, P M S, on a K M (c) : P M (y) :: P M (y) : P S $=v=\frac{yy}{c}$, dont la fluxion ſera en ſuppoſant $\dot{c}=t\dot{y}$, $\dot{v}=\frac{2cy\dot{y}-tyy\dot{y}}{cc}$. Donc B. D M $=\frac{y\dot{y}}{\dot{v}}=\frac{cc}{2c-ty}$ pour la figure 132, & C, D M $=\frac{cc}{c-ty}$ pour la figure 131. Car lorſque le point M tombe ſur le ſommet A, y ſera $=0$, & D M devient $=$ K M dans ce cas.

M

2. Mais le triangle rectangle KPM donne $cc = rr + yy$: si $\dot{r} = s\dot{y}$, on aura $ct\dot{y} = rs\dot{y} + y\dot{y}$, parce que $\dot{c} = t\dot{y}$, ou $t = \frac{rs + y}{c}$. Cette valeur de t étant substituée dans B, C, donnera D, $DM = \left(\frac{c^3}{2cc - rsy - yy}\right) = \frac{c^3}{cc + rr - rsy}$, & E, $DM = \left(\frac{c^3}{cc - rsy - yy}\right) = \frac{c^3}{rr - rsy}$.

COROLLAIRE II.

Fig. 131. 132. 196. Si l'on tire du point D la ligne DE perpendiculaire sur PM, prolongée s'il le faut, on aura KM : DM : : PK : ED : : MP : ME. Les différentes valeurs qu'on trouvera des lignes ED, ME, par le moyen de cette proportion, & des différentes valeurs de DM, étant posées par ordre aussi bien que celles de DM, on aura :

Fig. 131.

$$DM = \frac{c^3}{cc - qyy} = \frac{cc}{c - ty} = \frac{c^3}{rr - rsy} = \frac{\dot{y}\dot{x}^2}{\dot{x}\dot{x} - \dot{x}\ddot{x}} \quad Kk = \dot{x}q.$$

$$\text{I.} \quad ME = \frac{ccy}{cc - qyy} = \frac{cy}{c - ty} = \frac{ccy}{rr - rsy} \qquad \dot{c} = t\dot{y}.$$

$$DE = \frac{ccr}{cc - qyy} = \frac{cr}{c - ty} = \frac{cc}{r - sy} \qquad r = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}} \quad \dot{r} = s\dot{y}.$$

Fig. 132.

$$DM = \frac{c^3}{cc + rr - rsy} = \frac{cc}{2c - ty} = \frac{y\dot{y}\dot{x}^2}{x\dot{y}\dot{y} + \ddot{x}y\dot{x} - \dot{x}y\ddot{x}} = \frac{y\dot{y}}{v},$$

$$\text{II.} \quad ME = \frac{ccy}{cc + rr - rsy} = \frac{cy}{2c - ty}.$$

$$DE = \frac{ccr}{cc + rr - rsy} = \frac{cr}{2c - ty}. \; KM = c. \; PK = r, \; PS = u.$$

---

* *Art.* 180. $\dot{x} + \dot{r} = q\dot{x}$, $\dot{r} = s\dot{y}$, $\dot{c} = t\dot{y}$, & * $\dot{x}r = y\dot{y}$.

Il ne s'agit plus que de déterminer une des quantités q, s, ou t, telle que l'on voudra, par le moyen de l'équation particuliere de chaque courbe, pour avoir le rayon demandé de sa développée.

REMARQUES.

I. Comme on n'a trouvé qu'une seule valeur pour chaque rayon de la développée, il s'ensuit que chaque courbe ne peut avoir qu'une seule développée ; & si la courbe est géométrique, sa développée le sera aussi, & de plus rectifiable ; car on pourra toujours trouver dans ce cas une expression pour son rayon, délivrée de toutes fluxions ou indéterminées.

II. Lorsque le point M tombe sur le point A, ou lorsque y Fig. 131.
$= o$, on aura $DM = c = \frac{cc}{r}$, ou $r = c$. Donc le rayon de la développée sera dans ce cas égal à la superpendiculaire PK. Et lorsque $y = o$, dans la figure 132, on aura $DM = \frac{c^3}{cc + rr} = \frac{1}{2} c$; ainsi $c = r$, & le rayon de la développée sera encore égal à la superpendiculaire PK.

EXEMPLE I.

197. Soit AM la parabole dont $2px = yy$ est l'équation, Fig. 133.
on aura $2p\dot{x} = 2y\dot{y}$, ou $p = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}} = r$. Donc $\dot{r} = o$, & * * Art. 195.
$s = o$. Ainsi * $DE = \frac{cc}{r - sy} = \frac{cc}{r} = p + 2x$, parce que * Tab. I. n. 2.
$cc = rr + yy = pp + 2px$. Lorsque le point M tombe en A, on aura $DM = AB = p$.

Pour trouver la nature de la développée BD, soit tirée DF (z) perpendiculaire sur AK : cela posé, on aura AP + (ED) $PF = p + 3x$, & $AF - AB = BF\ (u) = 3x$; de même $ED - PK = KF = 2x$. Par conséquent $PK\ (p) : PM\ (y) :: KF\ (2x) : DF = z = \frac{2xy}{p}$, ou $pzz = \frac{4x^2y^2}{p} = 8x^3$, & $u^3 = 27x^3 = \frac{p}{8} 27 zz$: donc $8u^3 = 27pzz$ sera l'équation cherchée, qui est celle de la seconde parabole cubique.

EXEMPLE II.

198. Soit MN une hyperbole équilatere, & $1 = xy$ son Fig. 134.
équation, à l'égard des asymptotes, dont la fluxion sera $\dot{x}y + x\dot{y} = o$; ce qui donne $-y^3 = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}} = r$, & ainsi $-3yy\dot{y} = \dot{r} =$ * $s\dot{y}$, ou $-3yy = s$. C'est pourquoi * DE $\left(\frac{cc}{r - sy}\right)$ * Tab. I. * Ibid.

$= \frac{cc}{-2r}$, parce que $-y^3 = r$. Par conséquent si $PF = \frac{1}{2}KT$, la droite FD perpendiculaire sur CP, déterminera le rayon DM demandé, puisque $\div$ PK : KM : KT. La valeur négative $\frac{cc}{-2r}$ montre que le point M tombe entre les points D & K.

EXEMPLE III.

Fig. 133. 134. 199. Soit $x = y^m$ l'équation, qui est celle de toutes les paraboles, si m est positive; ou de toutes les hyperboles, si m est négative, dont la fluxion $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$ donnera $\frac{y\dot{y}}{\dot{x}} = r =$ $\frac{1}{m}y^{2-m}$, & ainsi $\frac{2-m}{m}\dot{y}y^{1-m} = \dot{r} = s\dot{y}$.* Donc $s = \overline{2-m}$ $\times\frac{r}{y}$, parce que $r = \frac{1}{m}y^{2-m}$; c'est pourquoi * DE $\left(\frac{cc}{r-sy}\right) =$ $\frac{cc}{\overline{m-1}\times r}$. Par conséquent si $PF = \frac{1}{m-1}KT$, la droite FD perpendiculaire à PK, déterminera le rayon DM demandé de la développée.

* Art. 195. n. 2.
* Tab. I.

EXEMPLE IV.

Fig. 135. 136. 200. Soit la courbe AM une ellipse ou hyperbole dont l'équation est $\pm yy = p - puu$, l'axe étant $= 2$; on aura PK $= r = {}^* pu$; donc $CK = u \mp pu$, &* $q\dot{u} = \dot{u} \mp p\dot{u}$, ou $q = 1 \mp p$; par conséquent * $DM = \frac{c^3}{cc - qyy} = \frac{c^3}{cc - yy \mp pyy}$ $= \frac{c^3}{pp}$, parce que $cc - yy = rr = ppuu$, & $\pm pyy = pp$ $- ppuu$; ce qui donne cette construction. Soit DM prise égale à la quatriéme continuelle proportionnelle au demi-parametre du premier axe & à la perpendiculaire KM, le point D sera dans la développée.

* Art. 10. n. 2.
* Art. 194. n. 1.
* Tab. I.

Fig. 135. Lorsque le point M tombe au sommet A, DM deviendra $= AB = r = pu = p$, parce que u sera alors $= 1$; & lorsque le point M tombe au sommet b du second axe de l'ellipse, DM deviendra $= {}^* \frac{y}{p} = \frac{b}{p}$; ou à cause que $bb = p \times 1$, $= \frac{1}{b}$ c'est-à-dire égale au parametre du demi second axe.

* Art. 19.

AUTREMENT.

Fig. 135. n. 2. Soit la courbe AM une ellipse ou hyperbole, P un des foyers, on aura * $\frac{by}{\sqrt{2ay \mp yy}} = v$, dont la fluxion est $\frac{aby\dot{y}}{\overline{2ay \mp yy}^{\frac{3}{2}}}$

* Art. 28.

$= \dot{v}$, & * $DM = \frac{y\dot{y}}{\dot{v}} = \frac{\overline{2ay \mp yy}^{\frac{3}{2}}}{ab}$; ce qui donne cette conſtruction. Soit priſe dans le diametre MC, la partie ME égale à la moitié de ſon parametre, la perpendiculaire ED ſur MC rencontrera la développée en D. Car ſi l'on tire Cr perpendiculaire à la tangente, on aura * $Cr = \frac{ab}{\sqrt{2ay \mp yy}}$, & le diametre conjugué de MC (n) ſera * $= \sqrt{2ay \mp yy}$; ainſi ME $= \frac{2ay \mp yy}{n}$; & à cauſe des paralleles Cr, DM, on a Cr $\left(\frac{ab}{\sqrt{2ay \mp yy}}\right)$: CM (n) :: ME $\left(\frac{2ay \mp yy}{n}\right)$: MD $= \frac{\overline{2ay \mp yy}^{\frac{3}{2}}}{ab}$. * Art. 194. n. 2. * Art. 18. * Art. 18.

EXEMPLE V.

201. Soit AM la logarithmique, dont la propriété eſt telle qu'en tirant une perpendiculaire MP ſur l'aſymptote FK & une tangente MT, la ſoutangente PT $= 1$, eſt toujours de même. C'eſt pourquoi $1 : y :: \dot{x} : \dot{y}$, ou $y\dot{x} = \dot{y}$; ainſi $r = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$ $= \dot{y}y$, & $\dot{r} = 2y\dot{y} = s\dot{y}$, * ou $s = 2y$; & par conſéquent * DE ou PF $= \frac{cc}{r - sy} = \frac{cc}{-r}$, à cauſe que $r = yy$. Fig. 137. * Art. 195. n. 2. * Tab. I.

EXEMPLE VI.

202. Soit PFM la ſpirale logarithmique, dont la nature eſt que l'angle TMP fait par la tangente & le rayon tiré du pole P au point touchant eſt toujours donné. Fig. 138.

Par le pole P ſoit tirée TK perpendiculaire à PM; puiſque les angles du triangle MPK ſont donnés, le rapport entre les côtés PM & PK, ſera auſſi donné. C'eſt pourquoi, ſi PK $=$ $r = my$, on aura * $\dot{r} = s\dot{y} = m\dot{y}$, ou $s = m$: donc * DM $= \frac{c^3}{cc + rr - rsy} = c = $ MK, (parce que $r = my$.) * Art. 195. n. 2. * Tab. II.

Il eſt évident que la développée KP de MFP eſt une ſpirale ſemblable & égale à la premiere; car puiſque les angles PKM, PMT ſont égaux, & que PM étant à TM :: $\dot{y} : \dot{z}$, la ſpirale PFM ſera égale en longueur à la tangente MT, auſſi bien que la ſpiale KP l'eſt à la ſienne. Donc, &c.

EXEMPLE VII.

203. Soit PFM une des ſpirales entre un nombre infini qui peuvent être formées dans le ſecteur circulaire PANB, & Fig. 139.

dont la nature eſt que le rayon $\overline{PN}^m$ (1) eſt à ſa partie $\overline{PM}^m$ (y^m) terminée par la ſpirale, comme l'arc ANB (a) eſt à ſa partie AN (z) terminée par ce rayon.

Ainſi $a\,y^m = z$ ſera l'équation de cette ſpirale : or le rayon
* Art. 188. PM (y) étant au rayon PN (1) comme la vîteſſe circulaire * $\dot{x}$ du point M eſt à la vîteſſe circulaire $\dot{z}$ du point N, on aura $y\,\dot{z} = \dot{x}$. Cette valeur étant ſubſtituée dans la fluxion $m\,a\,\dot{y}\,y^{m-1} = \dot{z}$ de l'équation ci-deſſus, donnera $m\,a\,\dot{y}\,y^m = \dot{x}$. Donc PK
* Art. 195. n. 2. $= r = \frac{y\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{ma}y^{1-m}$, & $\frac{1-m}{ma}\,\dot{y}\,y^{-m} = \dot{r} = s\,\dot{y}$, * ou $s =$
* Tab. II. $\frac{1-m}{ma}y^{-m} = \frac{\overline{1-m}\,r}{y}$, & par conſéquent * ME $\left(\frac{ccy}{cc+rr-rsy}\right)$ $= \frac{ccy}{yy+\overline{m-1}\,.\,rr}$, parce que $cc = rr + yy$; & par conſéquent ſi TP $+ \overline{m+1}$ PK : TK :: PM : ME, la perpendiculaire ED ſur PM déterminera le rayon DM demandé.

EXEMPLE VIII.

Fig. 140. 204. Soit PFMB la ſpirale réciproque, dont la nature eſt que le produit d'un arc circulaire AN (z) décrit du pole P comme centre, & terminé par le premier PA & tout autre rayon PN, multipliée par la partie PM (y) de ce rayon, terminée par la ſpirale, eſt toujours de même.

Soit l'arc AB, entre le premier rayon AP & la ſpirale $= n$, & PN $= a$, on aura $y\,z = n\,a$ pour l'équation dont la fluxion eſt $-\dot{z} = \frac{na\dot{y}}{yy}$. Or le rayon PM eſt au rayon PN, comme la vî-
* Art. 188. teſſe circulaire * $\dot{x}$ du point M eſt à la vîteſſe circulaire $-\dot{z}$ du point N : donc $-\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{y} = \frac{na\dot{y}}{yy}$, ou $y\,\dot{x} = n\,\dot{y}$; ainſi $\frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$
* Art. 195. n. 2. $= r = \frac{yy}{n}$, & * $\dot{r} = \frac{2y\dot{y}}{n} = s\,\dot{y}$, ou $\frac{2y}{n} = s$. C'eſt pourquoi *
* Tab. II. ME $= \left(\frac{ccy}{cc+rr-rsy}\right) = \frac{cc}{y}$, parce que $\frac{yy}{n} = r$, & $cc - rr = yy$.

Si l'on ſuppoſe dans l'article précédent $m = -1$, la valeur de MF $= \frac{ccy}{yy+\overline{m+1}\,.\,rr}$, deviendra auſſi $= \frac{cc}{y}$, & l'équation $a\,\dot{y}\,y^m = \dot{x}$, deviendra $a\,\dot{y} = y\,\dot{x}$, qui eſt celle de la ſpirale réciproque.

SECTION IV.

De la maniere de trouver les caustiques *par réfraction & par réfléxion.*

DEFINITION.

SI les directions d'un nombre infini de rayons, tel que F A, F M, qui partent tous d'un même point lumineux F, se changent par la rencontre d'une courbe A M N, en s'approchant ou en s'éloignant de la perpendiculaire D M sur la courbe, de telle maniere que le sinus D E de l'angle de l'incidence D M E soit au sinus D B de l'angle de réfraction D M B dans la raison donnée de m à n; la courbe K L H, que tous ces rayons touchent, ou leurs prolongemens A H, M L, est nommée la *caustique par réfraction.* *Fig.* 141. 142.

COROLLAIRE.

205. Soit la caustique H L K la développée de la courbe A Q, & du point F comme centre soit décrit l'arc de cercle A P, le rayon Q L, plus la partie L H de la caustique, sera toujours * = A H; & si la partie M m de la tangente en M exprime la fluxion de la courbe A M, & que M f, M g soient perpendiculaires, & mf, mg paralleles aux rayons d'incidence F M, & de réfraction M L, fm exprimera la fluxion de P M = F M — F A, & mg la fluxion de Q M, = A H — M L — L H. Or à cause des triangles semblables M fm, M E D, & M gm, M B D, on a fm : D E :: M m : D M, & gm : D B :: M m : D M; *ex æquo*, fm : gm :: m : n :: D E : D B. Par conséquent ces fluxions étant dans un rapport constant, les fluentes seront aussi dans le même rapport, c'est-à-dire $\frac{n}{m}$ P M = Q M = A H — L H — L M : d'où l'on tire H L = A H — L M — $\frac{n}{m}$ P M. *Fig.* 141. * *Art.* 190.

Il y a plusieurs cas, selon que le rayon d'incidence F A est plus grand ou moindre que F M, & le rayon de réfraction A H s'en- *Fig.* 142.

veloppe autour, ou se développe de la courbe H L; mais on prouvera toujours que la différence entre les rayons d'incidence est toujours à la différence entre les rayons de réfraction plus la partie de la caustique entre ces rayons, comme m est à n.

Si l'on suppose que la distance entre le point lumineux F & la courbe A M soit infinie, les rayons F A, F M seront paralleles; on aura toujours $LH = AH - ML - \frac{n}{m} PM$; & l'arc A P deviendra une droite dans ce cas.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 141. 206. *La nature de la courbe* A M *& le point lumineux* F *étant donnés, déterminer la longueur du rayon de réfraction* M L *tiré par un point donné.*

Soit D M le rayon de la développée, & $ME = a$, $MB = b$, $FM = y$, $Mf = \dot{x}$, on aura à cause de la ressemblance des triangles, $ME\ (a) : MB\ (b) :: Mf\ (\dot{x}) : Mg = \frac{b\dot{x}}{a}$, & le rayon

* Art. 188. $FM\ (y)$ sera au rayon $FE\ (y + a)$, comme la vîtesse * circulaire $Mf\ (\dot{x})$ du point M est à la vîtesse circulaire $Ee = \frac{\dot{x}y + \dot{x}a}{y}$, ou fluxion de D E, laquelle est à la fluxion Bb de D B, comme m est à n, c'est-à-dire $Bb = \frac{n\dot{x}y + na\dot{x}}{my}$. Or le rayon L M est au rayon L B comme la vîtesse circulaire $Mg\ \left(\frac{b\dot{x}}{a}\right)$ du point M est à la vîtesse circulaire Bb du point B; & en divisant, $LM : BM\ (b) :: \frac{b\dot{x}}{a} : \frac{b\dot{x}}{a} - \frac{n\dot{x}y - na\dot{x}}{y}$; d'où l'on tire $LM = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette construction.

Fig. 143. Soit fait l'angle E D C égal à l'angle B D M, & soit pris dans le rayon d'incidence F M la partie $MK = \frac{aa}{y}$; cela posé, si $CK : CE :: MB : ML$, le point L sera dans la caustique par réfraction. Car à cause de la ressemblance des triangles $DB : DE :: n : m :: MB : CE = \frac{bm}{n}$; ainsi $CE - ME = CM = \frac{bm - an}{n}$, & $CM - MK = CK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; par conséquent $CK : CE :: MB : LM$, puisque $CK \times LM = CE \times MB$.

Lorsque C K $\left(\frac{bmy - any - aan}{ny}\right)$ est négatif, le rayon

LM

L M le sera aussi; d'où il suit que si le point M tombe entre les points B & L, le point C tombera entre les points K & E.

Si le point lumineux F est du côté de E, ou, ce qui est la même chose, si la courbe A M est concave vers le point F, alors y changera de positive en négative, & par conséquent L M $= \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$, & la construction demeurera la même.

Si l'on suppose y infinie, c'est-à-dire que les rayons d'incidence F M, F A soient paralleles, on aura L M $= \frac{bbm}{bm - an}$, parce que le terme aan deviendra $= 0$, à l'égard des autres où y se trouve : or comme M K $= \frac{aa}{y}$, & devient $= 0$, dans ce cas on n'a qu'à faire C M : C E :: M B : L M, pour avoir le rayon demandé.

Si la courbe A M devenoit une droite, le rayon D M de la développée deviendroit infinie, aussi bien que M E (a), & M B (b), & par conséquent L M sera alors $= \frac{bbmy}{aan}$; car les termes bmy, any seront zero à l'égard de aan. C'est pourquoi en faisant C K $= \frac{aa}{y}$, le reste de la construction demeurera la même.

COROLLAIRE.

207. Si le point E tombe de l'autre côté de D M à l'égard du point B, & que D E $=$ D B, on aura $m = n$, & L M $= \frac{ay}{2y + a}$, parce que a sera ici négative & égale b. La courbe L H est alors nommée la *caustique par réfléxion*. Fig. 143.

Si y devient infinie, c'est-à-dire si les rayons d'incidence F M sont paralleles entr'eux, on aura L M $= \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$ M E, à cause que a est $= 0$ par rapport à y. D'où il suit que si deux points de ces trois F, D, L sont donnés, le troisiéme pourra être déterminé.

EXEMPLE I.

208. Soit la courbe A M la parabole ordinaire, & le point lumineux F son foyer, il est manifeste que les rayons réfléchis L M seront tous paralleles à l'axe A F; c'est pourquoi L M $\left(\frac{ay}{2y + a}\right)$ sera infinie dans ce cas, & ainsi $a = 2y$. Par con- Fig. 144.

séquent si $ME = 2MF$, la perpendiculaire ED à ME déterminera le rayon DM de la développée.

EXEMPLE II.

Fig. 145. 209. Soit la courbe AM une ellipse, & le point lumineux F un de ses foyers, les rayons de réflexion LM passeront tous par l'autre foyer f. C'est pourquoi si $Mf = z = \frac{ay}{2y - a}$, on

Fig. 146. aura $ME = a = \frac{2yz}{y + z}$. Mais si la courbe AM est une hyperbole, & le point lumineux F son foyer, alors les rayons LM prolongés de l'autre côté de la courbe, passeront par l'autre foyer f; c'est pourquoi z sera ici négative, c'est-à-dire $-z = \frac{ay}{2y - a}$, ou $ME = a = \frac{2yz}{y - z}$. Par conséquent si l'on prend dans les deux cas ME, une quatriéme proportionnelle à la moitié

* Art. 14. du premier axe * Aa $(y \pm z)$, & aux rayons d'incidence FM (y), & de réflexion Mf (z), la perpendiculaire ED à ME, déterminera le rayon DM de la développée.

Fig. 144. 145. 146. Il est évident que la ligne tirée du point K perpendiculaire sur MK, rencontrera ME au point cherché E; car si vous imaginez une ligne Ka tirée du point K perpendiculaire sur MF,

* Art. 32. on aura * $Ma = p$, & $MK = \frac{b}{a}\sqrt{yz}$: donc à cause des triangles rectangles semblables MaK, MKE, on aura Ma $(p = \frac{bb}{a})$: MK $(\frac{b}{a}\sqrt{yz})$ :: MK $(\frac{b}{a}\sqrt{yz})$: $ME = \frac{yz}{a} = \frac{2yz}{y \pm z}$.

PROBLEME.

Fig. 147. 210. *Etant donnée la courbe* HL *& le point lumineux* F, *trouver la courbe* AM, *dont* HL *soit la caustique par réfraction.*

Du point lumineux F soit tirée la tangente FH à HL, dans laquelle soit pris le point A pour un de ceux de la courbe cherchée, & dans toute autre tangente comme LM à HL soit pris $LK = \frac{n}{m}FA + AH - LH$; & si après avoir joint les points F, K, on fait $Km = n$, $mf = m$, la ligne FM tirée parallele à fm, rencontrera LM dans un point M de la courbe cherchée. Car Km (n) : mf (m) :: KM : FM, ou $KM =$

$\frac{n}{m}$ FM; ainsi (KM + LM) = $\frac{n}{m}$ FM + LM = LK, = $\frac{n}{m}$ FA + AH — LH, par hypothese. Donc ($\frac{n}{m}$ FM — $\frac{n}{m}$ FA) = $\frac{n}{m}$ FM = AH — LH — LM; par conséquent * la courbe AM décrite ainsi, sera la courbe demandée. * *Art.* 205.

Si les rayons d'incidence FM sont paralleles entr'eux, il faudra prendre LK = AH — LH, K*m* = *n*, & du point *m* tirer la ligne *mf* parallele à AH & = *m*; & du point de rencontre P, de la ligne K*f*, & de la perpendiculaire AP sur AH, la ligne PM, parallele à AH, dont son intersection M avec LM sera dans la courbe demandée. Car *mf* (*m*) : K*m* (*n*) :: PM : KM = $\frac{n}{m}$ PM, & (KM + LM) = LK = $\frac{n}{m}$ PM + LM = AH — LH, par hypothese, ou $\frac{n}{m}$ PM = AH — LH — LM. *Fig.* 148.

COROLLAIRE.

211. Il est évident que la courbe AM change sa figure selon que le point A est pris plus proche ou plus loin du point lumineux F, parce que la valeur de LK change. Par conséquent la même courbe HL peut être la caustique par réfraction à un nombre infini de courbes. *Fig.* 147. 148.

PROBLEME.

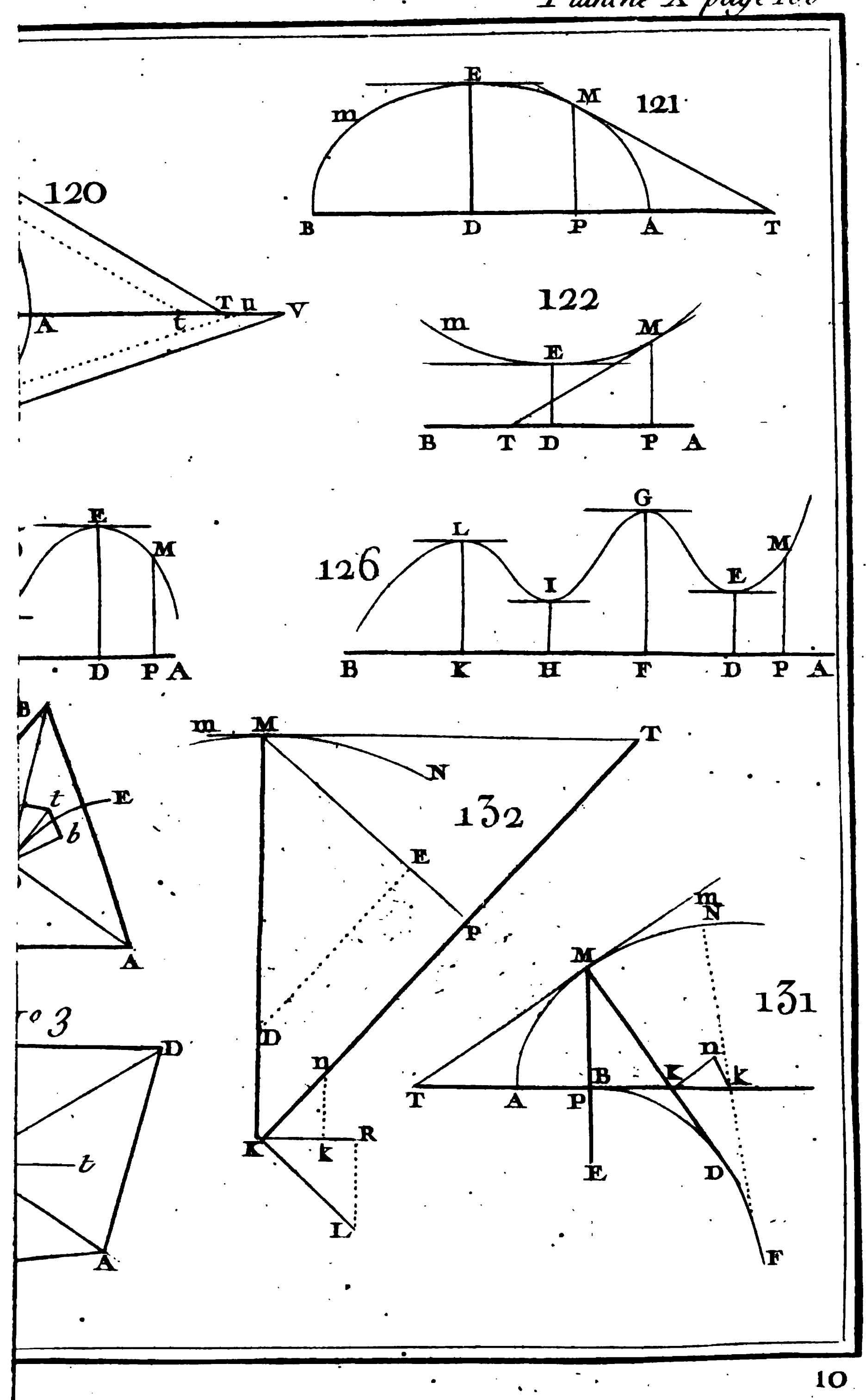
212. *La courbe* AM *& le point lumineux* F *étant donnés, trouver une autre courbe* BN, *telle qu'elle fasse que les rayons de réfraction* MN *passent tous par un point donné* D *dans la tangente* HA *qui passe par le point lumineux* F. *Fig.* 149.

Il est évident que si l'on considere le point D comme le point lumineux de la courbe BN, dont DN soient les rayons d'incidence, & dont les rayons de réfraction tombent sur les rayons de réfraction NM de la courbe AM, la courbe HL sera la caustique par réfraction à toutes les deux. Donc si des points F, D, comme centres, on décrit les arcs circulaires AP, BQ, on aura $\frac{n}{m}$ PM = AH — LH — LM, & $\frac{n}{m}$ QN = BH — LH — LN; la différence de ces deux équations sera $\frac{n}{m}$ PM — $\frac{n}{m}$ QN = AB — MN, parce que AH — BH = AB, & LM —

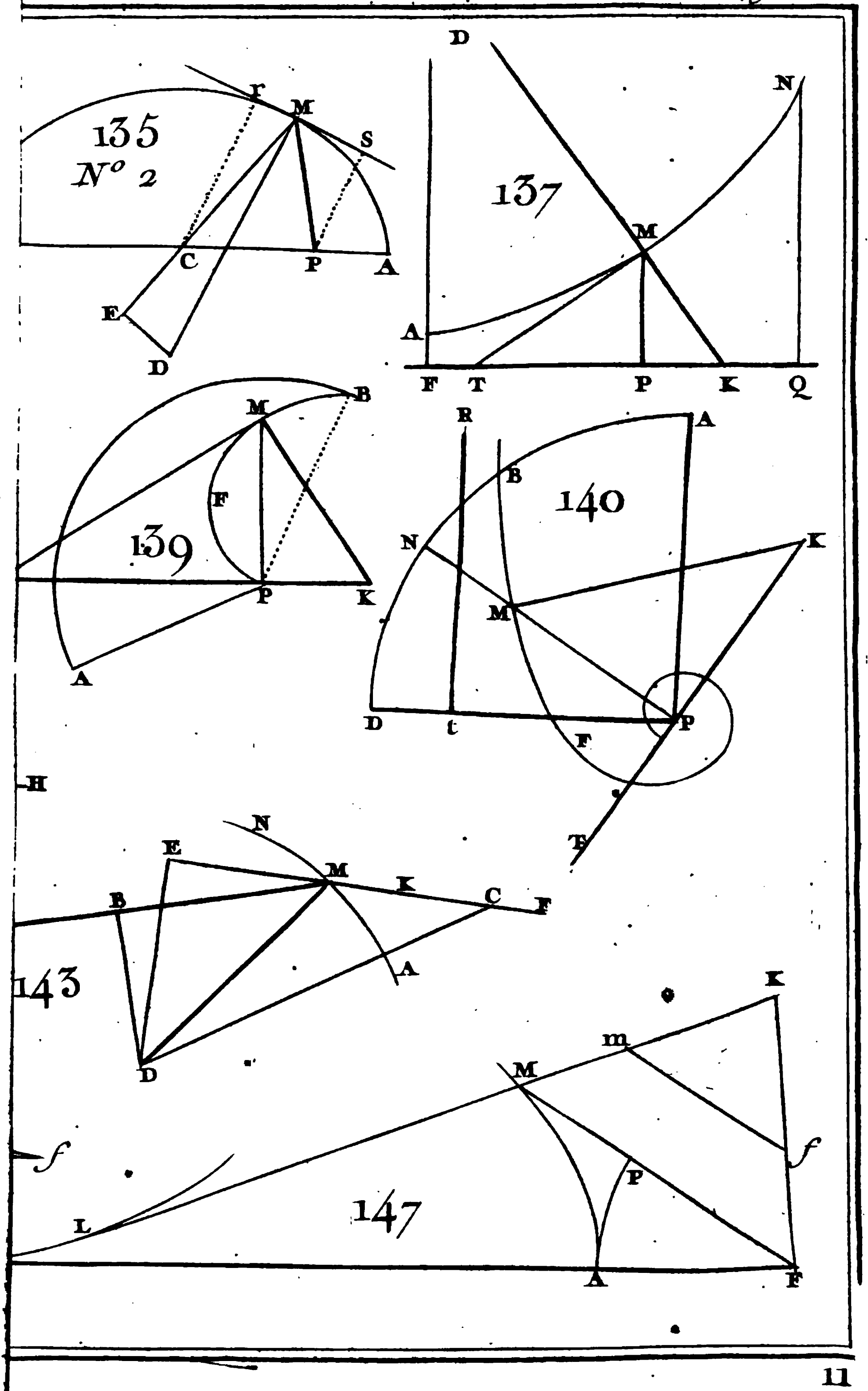
LN = MN. C'est pourquoi si de l'autre côté du point M à l'égard du point N on prend MK $= \frac{n}{m}$ BD — AB + $\frac{n}{m}$ PM, & que l'on trouve le point N par le probleme précédent, tel que NK soit $= \frac{n}{m}$ ND, il sera un point de la courbe demandée. Car (NK — MN) (MK) $= \frac{n}{m}$ ND — MN $= \frac{n}{m}$ BD — AB + $\frac{n}{m}$ PM, ou $\frac{n}{m}$ PM — $\frac{n}{m}$ QN = AB — MN, puisque ND — BD = QN.

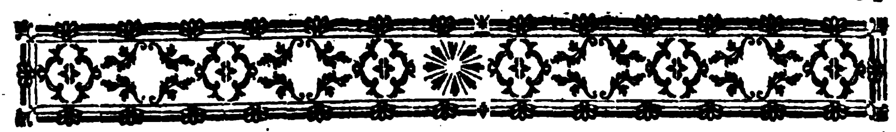
Si les rayons d'incidence FM de la courbe donnée AM étoient paralleles entr'eux, la construction seroit la même; & si les rayons d'incidence DN de la courbe demandée devoient être paralleles au lieu de se réunir dans un point, il faudra prendre MK $= \frac{n}{m}$ PM — AB, & NK $= \frac{n}{m}$ NQ, le point N sera dans la courbe demandée. Car (NK — NM) (MK) $\frac{n}{m}$ NQ — NM $= \frac{n}{m}$ PM — AB, ou $\frac{n}{m}$ PM — $\frac{n}{m}$ NQ = AB — NM. Si la valeur de MK étoit négative, il faudroit prendre le point K du même côté du point M que le point M.





121
m
E
M
B
D
P
A
T
120
A
t
T
n
V
122
m
M
E
B
T
D
P
A
E
M
D
P
A
126
L
I
G
E
M
B
K
H
F
D
P
A
B
t
E
b
A
M
m
N
T
132
E
P
D
n
K
k
R
L
m
N
M
131
n
T
A
B
P
K
k
E
D
F
D
t
A


135
N° 2
r
M
S
C
P
A
E
D
137
D
N
M
A
F
T
P
K
Q
139
M
B
F
P
K
A
140
R
A
B
N
K
M
D
t
F
P
T
H
143
N
E
M
K
C
F
B
A
D
147
K
m
M
f
f
P
L
A
F



LIVRE TROISIÉME.

DES FLUENTES.

SECTION I.

LA méthode par laquelle on trouve les fluentes eſt d'une étendue ſi vaſte, que ſi on vouloit entreprendre d'en expliquer tous les différens cas, un volume entier ne ſuffiroit pas. C'eſt pourquoi on a cru n'en devoir donner d'abord que quelques régles auſſi générales que le ſujet le permet, afin de ne point ennuyer le lecteur par la trop grande multiplicité, en réſervant une explication plus ample pour la fin de ce Traité ; & pour une plus grande facilité de réſoudre les queſtions, on a donné des Tables contenant les fluentes les plus néceſſaires, par le moyen deſquelles on peut diſtinguer d'un coup d'œil ſi la fluente d'une fluxion qui peut être comparée avec quelques-unes des formules qui y ſont contenues, peut être trouvée en un nombre fini de termes, ou ſi elle peut être réduite à la quadrature des ſections coniques, ce qui eſt d'une grande utilité dans la ſolution des problemes.

Enſuite pour faire voir l'utilité & l'étendue de ces régles, on les applique à la rectification des lignes courbes, à la meſure des ſuperficies, ſurfaces & ſolides des figures, à trouver leur centre de gravité, d'oſcillation & de percuſſion, dont on donne auparavant des formules générales des fluxions de chacune, leſquelles on tâche de démontrer d'une maniere claire & évidente, afin de ne rien laiſſer à deviner au lecteur.

Or comme la méthode par laquelle on trouve les fluentes eſt l'inverſe de celle par laquelle on trouve les fluxions, il s'enſuit que la fluente de $d\dot{z}z^{m}$ eſt $\frac{d}{m+1}z^{m+1}$; celle de $d\dot{z}z^{n-1}\times$

$\overline{e+fz^n}^m$ est $\frac{d}{fn,\, m+1} \times \overline{e+fz^n}^{m+1}$, & celle de $m z^n \dot{y} y^{m-1} + n y^m \dot{z} z^{n-1}$ est $y^m z^n$. Car si l'on prend les fluxions de ces fluentes, on trouvera précisément les mêmes que celles ci-dessus. D'où l'on déduit les régles suivantes.

Régles générales pour trouver les fluentes.

I. D'une quantité $d\dot{z} z^n$, dont l'exposant n est un nombre quelconque.

Ajoutez l'unité à l'exposant n, *& divisez la fluxion par le produit* $\overline{1+n}$, $\dot{z}$ *de cet exposant ainsi augmenté, multiplié par la fluxion* $\dot{z}$, *le quotient* $\frac{d}{1+n} z^{n+1}$ *sera la fluente cherchée.*

II. D'une quantité $d\dot{z} z^{n-1} \times \overline{e+fz^n}^m$, dont la partie $d\dot{z} z^{n-1}$ hors du signe, est égale à la fluxion, ou dans un rapport donné, avec la fluxion de la quantité sous le signe.

Ajoutez l'unité à l'exposant m *du signe, & divisez la fluxion par le produit de cet exposant ainsi augmenté, multiplié par la fluxion* $nf\dot{z}z^{n-1}$ *de la quantité sous le signe, le quotient* $\frac{d}{1+m,\, nf} \times \overline{e+fz^n}^m$ *sera la fluente demandée.*

EXEMPLE.

213. La fluente de $\dot{x}\sqrt{x} = \dot{x}x^{\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$; celle de $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = \dot{x}x^{-\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$; & celle de $aa\dot{x} + bx\dot{x} + xx\dot{x}$ sera $aax + \frac{1}{2}bxx + \frac{1}{3}x^3$. Ce qui est évident par la premiere régle.

La fluente de $x\dot{x}\sqrt{aa+xx} = x\dot{x} \times \overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}}$ sera $\frac{1}{\frac{1}{2}+1,\, 2} \times \overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} \times \overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}$; celle de $\frac{-x\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}} = -x\dot{x} \times \overline{aa-xx}^{-\frac{1}{2}}$, sera $\frac{1}{-\frac{1}{2}+1,\, 2} \times \overline{aa-xx}^{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{aa-xx}$; & celle de $x\dot{x}\sqrt[3]{aa+xx} = x\dot{x} \times \overline{aa+xx}^{\frac{1}{3}}$ sera $\frac{1}{\frac{1}{3}+1,\, 2} \times \overline{aa+xx}^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8} \times \overline{aa+xx}^{\frac{4}{3}}$. Ce qui est évident par la seconde régle.

N. B. A cause que les quantités constantes n'ont point de flu-

xions, il arrive quelquefois qu'on eſt obligé d'ajouter ou de retrancher quelque quantité conſtante pour rendre la fluente complette. Mais comme on ne peut déterminer cette conſtante d'une maniere générale, parce que ſa grandeur dépend de la nature du ſujet, on tâchera d'éclaircir la maniere de la déterminer dans les problemes qu'on donnera dans la ſuite.

LEMME I.

214. *Si deux ſuites infinies telles que* $a + bz + czz + dz^3 +$ &c. $l + mz + nzz + pz^3 +$ &c. *ſont égales entr'elles, les coefficiens des termes correſpondans ſeront auſſi égaux entr'eux ; ſçavoir* $a = l$, $b = m$, $c = n$, $d = p$, &c.

Car il eſt clair que ces ſuites ſeront toujours égales, telle valeur qu'on puiſſe mettre au lieu de z : donc en ſuppoſant $z = 0$, on aura $a = l$; & en retranchant ces quantités égales, & diviſant le reſte par z, on aura $b + cz + dz^2 +$ &c. $= m + nz + pz^2 +$ &c. Or dans le cas de $z = 0$, on aura auſſi $b = m$; & par conſéquent par la même maniere de raiſonner, on prouvera que $c = n$, & $d = p$, &c.

PROBLEME I.

215. *Elever un binome* $1 + z$ *à une puiſſance quelconque* m ; *ou, ce qui eſt la même choſe, trouver une ſuite infinie égale à* $\overline{1+z}^m$.

Il eſt évident que le premier terme de la ſuite cherchée doit être égal au premier terme du binome élevé à la puiſſance m ; car lorſque $z = 0$, on aura $\overline{1+z}^m = 1^m$. Ainſi ſuppoſant l'égalité A, les réſultats des opérations de calcul ſeront les ſuivans,

$$\text{A.}\quad \overline{1+z}^m = 1 + Az^p + Bz^q + Cz^r + Dz^s + \text{\&c.}$$

$$\text{B.}\quad \frac{m \times \overline{1+z}^m}{1+z} = Apz^{p-1} + Bqz^{q-1} + Crz^{r-1} + Dsz^{s-1} + \text{\&c.}$$

$$\text{C.}\quad \overline{1+z}^m = \frac{p}{m}Az^{p-1} + \frac{q}{m}Bz^{q-1} + \frac{r}{m}Cz^{r-1} + \frac{s}{m}Dz^{s-1} + \text{\&c.}$$

$$\frac{p}{m}Az^p + \frac{q}{m}Bz^q + \frac{r}{m}Cz^r + \text{\&c.}$$

D. $p - 1 = 0, q - 1 = 1, r - 1 = 2, s - 1 = 3$, &c.

E. $A = m, 2B + A = mA, 3C + 2B = mB, 4D + 3C = mC$.

F. $A = m, B = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, C = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, D = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$.

G. $\overline{1 + z}^{m} = 1 + mz + m \times \frac{m-1}{2} zz + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} z^3 +$ &c.

Car la fluxion de l'égalité A divisée par $\dot{z}$ donne B, & B multipliée par $\frac{1+z}{m}$ donne C. Or comme les seconds membres des égalités A & C sont égaux, étant égaux au même binome $\overline{1 + z}^{m}$, il est évident que z doit avoir les mêmes exposans dans les termes correspondans : donc en comparant ces exposans, on aura les égalités D ; & à cause que les coefficiens des termes correspondans doivent aussi * être égaux, leur comparaison donnera les égalités E & F. D'où en substituant les valeurs des exposans p, q, r, s, &c. & celles des coefficiens A, B, C, D, dans l'égalité A, on aura la suite demandée G, laquelle sera toujours finie lorsque l'exposant m est un nombre entier positif & fini.

* Art. 214.

N. B. I. Si le premier terme du binome étoit exprimé par a, au lieu de l'unité, il faudroit multiplier & diviser les termes de la suite par a & par ses puissances, ensorte que les exposans de chaque terme soient chacun égal à l'exposant m du binome.

II. Pour avoir une suite infinie égale à un multinome quelconque $1 + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + ez^{4n} + fz^{5n}$ élevée à la puissance m, il faudra supposer le premier terme 1 égal au premier terme 1 du binome, & les autres termes $bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + ez^{4n} +$ &c. égal au second terme z, ce qui donnera

$$
\begin{aligned}
\text{H. } 1 + Abz^n + Acz^{2n} + Adz^{3n} + Aez^{4n} + Afz^{5n} + \text{\&c.} \\
+ Bbbz^{2n} + 2Bbcz^{3n} + 2Bbdz^{4n} + 2Bbez^{5n} + \text{\&c.} \\
+ Bccz^{4n} + 2Bcdz^{5n} + \text{\&c.} \\
+ Cb^3z^{3n} + 3Bbbcz^{4n} + 3Cbbdz^{5n} + \text{\&c.} \\
+ 3Cbccz^{5n} + \text{\&c.} \\
+ 4Db^4z^{4n} + 4Db^3cz^{5n} + \text{\&c.} \\
+ Eb^5z^{5n} + \text{\&c.}
\end{aligned}
$$

égale

égale à $\overline{1 + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} + ez^{4n} + fz^{5n} + \&c.}^{m}$, en supposant $A = m$, $B = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$, $C = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2}$, $D = \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, &c.

EXEMPLE I.

216. Pour extraire la racine quarrée de $aa + xx$.

On supposera dans la suite G, $aa = 1$, $z = xx$, $m = \frac{1}{2}$, ce qui donnera $\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \&c.$

EXEMPLE II.

217. Pour extraire la racine quarrée de $aa + bx + xx$.

On supposera dans la suite H, $aa = 1$, $z^n = x$, $c = 1$, $d = e = f = 0$, ce qui donnera $a + \frac{bx}{2a} + \frac{4aa - bb}{8a^3}xx - \frac{4aab - b^3}{16a^5}x^3 + \frac{24aabb - 5b^4}{128a^7}x^4 - \&c.$ pour la suite demandée.

LEMME II.

218. Dans une progression géométrique telle que $1, y, y^2, y^3, y^4, y^n$, si le logarithme du premier terme 1 est zero, celui du second x, celui du 3me sera $2x$, celui du 4me $3x$, celui de y^n, nx, &c. Or comme les fluxions des termes de la progression géométrique, divisées par les mêmes termes,

seront . . . . $\frac{\dot{y}}{y} : \frac{2\dot{y}}{y} : \frac{3\dot{y}}{y} : \frac{4\dot{y}}{y} : \frac{n\dot{y}}{y}$,

& celles des logarithmes $\dot{x} : 2\dot{x} : 3\dot{x} : 4\dot{x} : n\dot{x}$;

il est clair que le rapport de deux termes correspondans quelconques est égal au rapport des deux autres termes correspondans, comme, par exemple, le rapport de $n\dot{x}$ & de $\frac{n\dot{y}}{y}$ est égal au rapport de $\dot{x}$ & de $\frac{\dot{y}}{y}$; & par conséquent le rapport de deux termes correspondans $\frac{n\dot{y}}{y}$, $n\dot{x}$, étant exprimé par N, celui de deux autres termes correspondans quelconques, sera exprimé par la même quantité. D'où l'on tire cette conclusion, *que la fluxion d'un nombre quelconque divisé par le même nombre, est à la fluxion du logarithme de ce nombre dans un rapport constant.*

Lorsque $\frac{\dot{y}}{y} = \dot{x}$, c'est-à-dire lorsque N = 1, les logarithmes sont nommés *naturels* ou *hyperboliques*.

Comme on a $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x}}{N}$ en général, l'on voit qu'en prenant différens nombres pour N, on aura autant de systêmes différens de logarithmes.

N. B. Ce qu'on vient de dire prouve parfaitement la premiere proposition & les quatre corollaires qui suivent de M. Cotes, dans son Livre de *Harmonia mensurarum*.

M. Cotes nomme la quantité N le module du systême, & l'unité divisée par N le module réciproque.

PROBLEME II.

219. *L'on demande le logarithme z d'un nombre exprimé par* $1 + x$.

La fluxion $\dot{x}$ de $1 + x$, divisée par cette quantité, doit être
* Art. 218. égale* $\frac{\dot{z}}{N}$; donc $\frac{\dot{z}}{N} = \frac{\dot{x}}{1+x}$. Or si l'on réduit $\frac{1}{1+x}$ en une suite infinie par une division continuelle, ou par l'article 215, on aura $\frac{\dot{z}}{N} = \dot{x} - x\dot{x} + \dot{x}x^2 - \dot{x}x^3 + \dot{x}x^4 -$ &c. dont la fluente sera $\frac{z}{N} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 -$ &c.

Si le nombre est moindre que l'unité, on aura $1 - x$, dont la fluxion sera $-\dot{x}$; par conséquent $-\frac{z}{N} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 +$ &c. sera le logarithme cherché. D'où l'on voit que le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité sera positif, & celui d'un nombre moindre que l'unité négatif.

COROLLAIRE.

220. De là il suit que si l'on veut avoir le logarithme de $\frac{a+x}{a}$, on aura $\frac{\dot{x}}{a+x} = \frac{\dot{z}}{N}$, dont la fluente, en supposant A = z, sera $\frac{A}{N} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2aa} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ &c. Par la même raison le logarithme B de $\frac{a-x}{a}$, sera $\frac{B}{N} = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2aa} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} +$ &c. Par conséquent leurs différences $A + B = N \times$ par $\frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} +$ &c. sera le logarithme de $\frac{a+x}{a-x}$, puisqu'en retranchant les logarithmes on doit diviser les nombres.

EXEMPLE I.

221. Soit $N = 1$, $x = \frac{1}{10} = 0,1$, & soit z le logarithme de $(1 + x) = 1 + 0,1 = 1,1$, & v celui de $(1 - x) = 1 - 0,1 = 0,9$, on aura $z = 0,1 - \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} - \frac{0,0001}{4}$ + &c. & $-v = 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{3} + \frac{0,0001}{4}$ + &c. dont la moitié de la somme est $\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}v = \frac{0,01}{2} + \frac{0,0001}{4} + \frac{0,000001}{6}$ + &c. & la moitié de leur différence $\frac{z}{2} + \frac{1}{2}v = 0,1 + \frac{0,001}{3} + \frac{0,00001}{5}$ + &c. Ces termes étant réduits & mis par ordre, donnent

0,	00502.	51666.	66666.	66666.	667.	
		12.	60083.	33333.	333.	
				71428.	571.	
				625.	000.	
				5.	556.	
					50.	
					1.	
0,	00502.	51679.	26750.	72059.	178	$= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}v$.

0,	10033.	33333.	33333.	33333.	333.	
		20142.	85714.	28571.	428.	
		1.	11111.	11111.	111.	
			909.	09090.	909.	
			7.	69230.	769.	
				6666.	666.	
				58.	823.	
					526.	
					5.	
0,	10033.	53477.	31075.	58063.	571	$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}v$.
0,	00502.	51679.	26750.	72059.	178.	

0,	09531.	01798.	04324.	86004.	393	$= z$
0,	10536.	05156.	57826.	30122.	749	$= v$.

EXEMPLE II.

222. Soit $x = \frac{2}{10} = 0, 2$: $N = 1$, $A = \log.(1 + x) = 1, 2$; & $B = \log.(1 - x)$ $0, 8$, on aura $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = \frac{0,04}{2} + \frac{0,0016}{4} + \frac{0,000064}{6} +$ &c. & $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 0, 2 + \frac{0,008}{3} + \frac{0,00032}{5} +$ &c. Ces termes étant réduits & mis par ordre, donnent

9, 02041.	06666.	66666.	66666.	666.	
	3305.	81333.	33333.	333.	
		11702.	87514.	285.	
		409.	60000.	000.	
		14.	56355.	556.	
			52428.	800.	
			1906.	502.	
			69.	905.	
			2.	581.	
				96,	
				3,	
0, 02041.	09972.	60127.	56477.	727	$= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B.$

0, 20266.	66666.	66666.	66666.	666.	
6.	58285.	71428.	57142.	857.	
	568.	88888.	88888.	889.	
	18.	61818.	18181.	818.	
		63015.	38461.	538.	
		2184.	53333.	333.	
		77.	10117.	647.	
		2.	75941.	052.	
			9986.	438.	
			364.	722.	
			13.	422.	
				497.	
				18.	
				1.	
0, 20273.	25540.	54082.	19098.	898	$= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$
0, 02041.	09972.	60127.	56477.	727.	

A = 0, 18232. 15567. 93954. 62621. 171.
B = 0, 22314. 35513. 14209. 75576. 625.

COROLLAIRE I.

223. Puisque $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, & que les logarithmes B (0, 8), ν (0, 9) sont négatifs, la somme B + ν étant ajoutée au double du logarithme de A (1, 2), donnera 0, 69314. 71805. 59945. 30941. 723, pour le logarithme de 2.

De même, à cause que $\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10$, le logarithme B (0,8) étant ajouté au triple du logarithme de 2, donnera 2, 30258. 50929. 94045. 68401. 799, pour le logarithme de 10.

Enfin puisque 1, 1 × 10 = 11; 0, 9 × 10 = 9; 1, 2 × 10 = 12; 0, 8 × 10 = 8, en ajoutant les logarithmes de 1, 1, (ζ) 1, 2 (A), à celui de 10, & retranchant ceux de 0, 9 (ν) 0, 8 (B) du même nombre 10 séparément, on aura les logarithmes de 8, 9, 11 & 12.

De ce qu'on vient de dire on a construit cette Table des logarithmes hyperboliques, des nombres depuis 2 jusqu'à 40, laquelle sera d'un grand usage dans la quadrature des courbes, comme on verra ci-après. On auroit pû la continuer à un plus grand nombre; mais comme notre intention n'a été que de faire voir la méthode de trouver les logarithmes, sans vouloir faire des tables, ce que nous avons dit ici est suffisant.

Nomb.	*Logarithmes Hyperboliques.*
2	0, 69314. 71805. 59945. 30941.
3	1, 09861. 22886. 68109. 69139.
4	1, 38629. 43611. 19890. 61883.
5	1, 60943. 79124. 34100. 37460.
6	1, 79175. 94692. 28055. 00081.
7	1, 94591. 01490. 55313. 30511.
8	2, 07944. 15416. 79835. 92825.
9	2, 19722. 45773. 36219. 38279.
10	2, 30258. 50929. 94045. 68402.
11	2, 39789. 52727. 98378. 54406.
12	2, 48490. 66497. 88000. 31023.
13	2, 56494. 93574. 61536. 73605.
14	2, 63905. 73296. 15258. 61451.
15	2, 70805. 02011. 02210. 06599.
16	2, 77258. 87222. 39781. 23766.
17	2, 83321. 35040. 56228. 88025.
18	2, 89037. 17578. 96164. 69221.
19	2, 94443. 89791. 66440. 46001.
20	2, 99573. 22735. 53990. 99343.
21	3, 04452. 24377. 23422. 99650.
22	3, 09104. 24533. 58315. 85348.
23	3, 13549. 42159. 29149. 69081.
24	3, 17805. 38303. 47945. 61965.
25	3, 21887. 58248. 68200. 74920.
26	3, 25809. 65380. 21482. 04547.
27	3, 29583. 68660. 04329. 07418.
28	3, 33220. 45101. 75203. 92394.
29	3, 36729. 58299. 86474. 03018.
30	3, 40119. 73816. 62155. 37541.
31	3, 43398. 72044. 85146. 24599.
32	3, 46573. 59027. 99726. 54709.
33	3, 49650. 75614. 66480. 23545.
34	3, 52636. 06846. 16174. 39919.
35	3, 55534. 80614. 89413. 67971.
36	3, 58351. 89384. 56110. 00162.
37	3, 61091. 79126. 44224. 44537.
38	3, 63758. 61597. 26385. 76943.
39	3, 66356. 16461. 29646. 42745.
40	3, 68887. 94541. 13936. 30285.

COROLLAIRE II.

224. Puisque $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. exprime le logarithme hyperbolique du nombre $1 + x$, & N × par $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. le logarithme du même nombre d'un systême quelconque, il s'ensuit que pour trouver la valeur de N dans quelqu'autre systême, il faut diviser le logarithme d'un nombre quelconque de ce systême par le logarithme hyperbolique du même nombre : le quotient sera la valeur cherchée.

Par exemple, dans les tables ordinaires le logarithme de 10 est $= 1$, & le logarithme hyperbolique de 10 étant de 2, 30258. 50929. 94045, on trouvera N $= 0$, 4342944819035 ; & par conséquent le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque étant multiplié par cette valeur de N, donnera le logarithme tabulaire du même nombre.

Si le logarithme hyperbolique de 10 est nommé M, & celui d'un autre nombre quelconque l, & le logarithme tabulaire du même nombre L, on aura $Nl = L$, & $l = \frac{L}{N}$, ou $l = ML$, parce que $\frac{1}{N} = M$.

Il faut bien remarquer la formule $l = ML$, *parce qu'elle est d'un grand usage ci-après dans la quadrature des figures.*

PROBLEME III.

225. *Le logarithme* z *d'un nombre quelconque* x *étant donné, l'on demande ce nombre.*

Supposons $x = 1 + az + bzz + cz^3 + dz^4 +$ &c. dont la fluxion divisée par $\dot{z}$, sera $\frac{\dot{x}}{\dot{z}} = a + 2bz + 3czz + 4dz^3 +$ &c. Or comme * $\dot{z} = N \times \frac{\dot{x}}{x}$, ou $\frac{x}{N} = \frac{\dot{x}}{\dot{z}}$, on aura $\left(\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\right) = \frac{x}{N} =$ * *Art.* 218.
$a + 2bx + 3czz + 4dz^3 +$ &c. ou $x = N \times$ par $a + 2bz + 3czz + 4dz^3 +$ &c. En comparant cette valeur de x avec la premiere, on aura

$$\left.\begin{matrix} N \times \text{par } a + 2bz + 3czz + 4dz^3 + \&c. \\ -1 - az - bzz - cz^3 - \&c. \end{matrix}\right\} = 0.$$

Si l'on égale les coefficiens des termes correspondans, * on * *Art.* 214.
aura $Na = 1$, $2bN = a$, $3cN = b$, $4dN = c$, &c. d'où

l'on tire $a = \frac{1}{N}$, $b = \frac{1}{2N^2}$, $c = \frac{1}{2.3.N^3}$, $d = \frac{1}{2.3.4.N^4}$. Par conséquent $x = 1 + az + bzz +$ &c. deviendra

$$x = 1 + \frac{1}{N}z + \frac{zz}{2N^2} + \frac{z^3}{2.3.N^3} + \frac{z^4}{2.3.4.N^4} + \&c.$$

Si $N = 1$, on aura $x = 1 + z + \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \&c.$ pour le nombre du logarithme hyperbolique z.

Si l'on veut avoir le nombre correspondant au logarithme hyperbolique qui est l'unité, en supposant $z = 1$, on trouvera $2,7182818$ pour le nombre cherché.

N. B. Comme on se servira souvent des Tables des logarithmes dans la suite, on en va expliquer quelques régles pour mieux entendre l'usage que l'on aura besoin de sçavoir ci-après.

I. Dans une progression arithmétique telle que d, $d + 1$, $d + 2$, $d + 3$, $d + 4$, &c. on a 1°. le quarré d'un terme quelconque $d + 1$, qui surpasse de l'unité le rectangle $d \times \overline{d + 2}$ des termes adjacens.

2°. Le quarré du quatriéme terme $d + 3$, multiplié par le premier d, qui surpasse de 4 le quarré du second $d + 1$ multiplié par le cinquiéme $d + 4$. D'où l'on tire une maniere fort abrégée pour trouver les logarithmes des nombres premiers.

Sçavoir, *en ajoutant au logarithme de* $\frac{dd + 2d + 1}{dd + 2d}$ *la somme des logarithmes de* d *&* *de* d + 2, *la somme sera le logarithme de* $\overline{d + 1}^2$.

Et en retranchant la somme des logarithmes de d *&* *de* $\frac{d^3 + 6dd + 9d + 4}{d^3 + 6dd + 9d}$ *de la somme des logarithmes de* $\overline{d + 1}^2$ *&* *de* d + 4, *la différence sera le logarithme de* $\overline{d + 3}^2$.

Par exemple, pour avoir le logarithme tabulaire de 17, on supposera $d + 3 = 17$, ou $d = 14$; ainsi $\frac{d^3 + 6dd + 9d + 4}{d^3 + 6dd + 9d} =$

* *Art.* 220. $\frac{4050}{4046} = \frac{2025}{2023}$; & en se servant de la suite * $N \times \frac{2x}{a} + \frac{2x}{3a^3} +$ &c,

* *Art.* 224. on aura * $N = 0,43429.44819$, & $\frac{a + x}{a - x} = \frac{2025}{2023}$, ou $a = 2024$ & $x = 1$. Donc $N \times \frac{2x}{a} = 0,00042.914474$.

Or la somme 1, 14655. 718042 de ce logarithme & de celui de (d) 14, étant retranchée de la somme 3, 60745. 50322

des

des logarithmes de ($\overline{d+1}^2$) 15 × 15, & de ($d+4$) 18, donnera 2, 46089. 784280, pour le logarithme de 17 × 17. Par conséquent la moitié 1, 23044. 892140 de ce logarithme sera celui de 17, sans erreur jusqu'à la derniere figure.

On doit remarquer que a est toujours la moitié de la somme, & x la moitié de la différence dans la suite N × $\frac{2x}{a} + \frac{2x}{3a^3}$ + &c. des nombres $\frac{a+x}{a-x}$, dont cette suite exprime le logarithme de leur quotient.

II. Si l'on suppose que les trois appliquées PM, QN, RS d'une courbe expriment les logarithmes des trois nombres dont PQ, QR expriment leurs différences, il est évident que si la différence entre les appliquées PM, RS est fort petite, eu égard à ces mêmes appliquées, on peut les considérer comme étant en progression arithmétique, & par conséquent RS — PM : PR :: QN — PM : PQ :: RS — QN : QR, ou si RS — PM = L, PR = 1, RS — QN, ou QN — PM = Z, QR ou PQ = x, on aura L : 1 :: Z : x, ou xL = Z, & par conséquent PM + Z = QN, ou RS — Z = QN. *Fig. 149. n. 2.*

D'où l'on tire la régle ordinaire; sçavoir, *la différence entre les logarithmes* PM, RS *les plus proches de* QN, *celui qu'on cherche, multipliée par la différence* x *des nombres d'un de ces logarithmes & de celui qu'on cherche, est égale à la différence de ce logarithme donné & de celui cherché.*

Mais si l'on veut avoir le nombre d'un logarithme donné QN, on aura *la différence* z *entre le logarithme donné & le plus proche dans les tables, divisée par la différence* L *des logarithmes tabulaires les plus proches, sera égale à la différence* x *entre le nombre cherché & celui qui correspond au logarithme le plus proche.*

Ou bien si a exprime la moitié de la somme, & x la moitié de la différence du nombre donné, & de celui dont le logarithme tabulaire est le plus proche, on aura * Z = $\frac{2x}{a}$ × N *proximæ.* ** Art. 220.*

Si par exemple on veut avoir le logarithme de 100 + $\frac{1}{10}$, on aura $2a = 200 + \frac{1}{10} = \frac{2001}{10}$, & $2x = \frac{1}{10}$; ainsi Z = $\frac{2x}{a}$N=0, 00043408244, lequel étant ajouté au logarithme de 100, donne 2, 00043408244 pour le logarithme cherché. On trouvera

2, 0004321378 par la régle ordinaire; le premier eſt vrai juſqu'à 10 figures, au lieu que le dernier n'eſt vrai qu'à la 6me figure.

Pour avoir le logarithme de 4, 236067977, on diviſera ce nombre par 100000, pour avoir 4, 2360 + $\frac{67977}{100000}$. Or par la régle $xL = Z$, la différence des logarithmes des nombres 4, 2360. 4, 2361 les plus proches, eſt L = 1025124, & $x = \frac{67977}{100000}$. Ainſi Z (ou $xL =$) 69692, qui étant ajouté au logarithme 0, 6269559514, de 4, 2360, donnera 0, 6269629206 pour le logarithme demandé ſans erreur.

Pour avoir le nombre du logarithme A. 3, 6269432054, on voit que le logarithme B. 3, 6268534147 de 4235 eſt trop petit, & le logarithme C. 3, 6269559514 de 4236 eſt trop grand. Ainſi je diviſe la différence (z) 897887 de A & B, par la différence (L) 1025367 de C & B, ce qui donne $x = \frac{897887}{1025367} =$ 8756738; ce nombre étant ajouté au moindre nombre 4235, donnera 4235, 8756738 pour le nombre cherché.

Comme la différence de C & A, diviſée par la différence de C & B, étant retranchée du plus grand nombre 4236 donne la même choſe, on peut être aſſuré que le nombre eſt vrai juſqu'à la derniere figure.

LEMME III.

Fig. 149. n. 3. 226. Soient les coſinus $CP = x$, $CQ = u$, des arcs AM, AN, & les ſinus $PM = y$, $QN = z$. Si MG eſt le ſinus & CG le coſinus de leur différence MN, on aura $MG = uy - xz$, & $CG = ux + yz$, lorſque le rayon CA eſt l'unité.

Soit MG prolongée juſqu'à la rencontre de CA en H, & ſoit F l'interſection de PM & de CN, les triangles ſemblables CQN, CPF, CHG & MFG donnent 1°. $CQ : QN :: CP : PF = \frac{xz}{u}$, & $FM = y - \frac{xz}{u}$. 2°. $CN : CQ :: FM : MG = uy - xz$. 3°. $CQ : QN :: MP : PH = \frac{yz}{u}$, & $CH = x + \frac{yz}{u}$. 4°. $CN : CQ :: CH : CG = ux + yz$.

Si l'arc AM étoit plus grand qu'un quart de cercle, ſon coſinus x devient négatif; & ſi cet arc devient plus grand qu'une demi-circonférence, ſon ſinus y devient négatif: il en eſt de même à l'égard du ſinus & coſinus de l'arc AN, ou de MN.

COROLLAIRE.

227. De là il suit que si r, t, T expriment les tangentes des arcs AN, AM, MN, on aura $tx = y$, $ru = z$, & $\left(\frac{uy - xz}{ux + yz}\right) = T = \frac{t - r}{1 + rt}$. Par conséquent deux de ces tangentes étant données, la troisiéme sera aussi donnée.

REMARQUE.

On peut tirer de l'équation $T = \frac{t - r}{1 + rt}$, plusieurs manieres fort abrégées pour la quadrature du cercle. Car si a, b, c, d expriment les tangentes des arcs A, B, C, D respectivement, en supposant $a = 1$, $b = \frac{1}{5}$, &

$$\left\{\begin{array}{l} C = A - B \\ D = C - B \\ E = D - B \\ F = B - E \end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} c = \frac{2}{3} \\ d = \frac{7}{17} \\ e = \frac{9}{46} \\ f = \frac{1}{239} \end{array}\right\}$$

D'où en faisant évanouir C, D, E, on trouvera A = 4 B − F, c'est-à-dire 4 fois l'arc B, dont la tangente est $= \frac{1}{5}$ moins l'arc F, dont la tangente est $= \frac{1}{239}$, sera égal à l'arc A de 45°.

Si $c = \frac{1}{7}$, $d = \frac{3}{79}$, en suivant la même maniere d'opérer, on trouvera 45° = 2 D + 5 C. De même si $a = \frac{1}{11}\sqrt{3}$, $c = \frac{1}{37}\sqrt{3}$, on aura 30° = 3 A + 2 C.

PROBLEME IV.

Trouver la valeur d'un arc de cercle AM, *le rayon* AC (1) & *la tangente* AT (z) *étant donnés.*

Soit $Tt = \dot{z}$, & soit tr perpendiculaire sur la secante CT, on aura, à cause des triangles semblables, CAT, Trt, CT $(\sqrt{1 + zz})$: CA (1) :: Tt ($\dot{z}$) : $tr = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + zz}}$; & CT est à CM, comme la vîtesse circulaire * tr du point T est à la vîtesse circulaire du point M, ou à la fluxion de l'arc AM $= \frac{\dot{z}}{1 + zz}$. En réduisant $\frac{1}{1 + zz}$ en une suite infinie, par une division continuelle, ou par l'article 215, on aura $\frac{\dot{z}}{1 + zz} = \dot{z} - \dot{z}z^2 + \dot{z}z^4 - \dot{z}z^6 +$ &c. dont la fluente $z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 -$ &c. exprimera la valeur cherchée.

Fig. 153.

* Art. 188.

EXEMPLE I.

229. Si $z = \frac{1}{239}$, on aura $\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{239^5} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{239^7}$ + &c. Cette suite étant réduite en nombre décimal, donnera

0,00418.41004.18410.04184.101
256.47231.442
4

+0,00418.41004.18666.51415.547
— 244.16591.79029.093

0,00418.40760.02074.72386.454 = AM.

0,00000.00244.16591.78708.380
320.713

— 0,00000.00244.16591.79029.093

EXEMPLE II.

230. Si $z = \frac{1}{5}$, on aura $0,2 - \frac{0,008}{3} + \frac{0,00032}{5} - \frac{0,0000128}{7}$ + &c. Cette suite étant réduite en nombre décimal, donnera

0,20006.40568.88888.88888.888
63015.38461.538
77.10117.647
9986.438
13.422
18

+ 0,20006.40569.51981.47467.952
— 266.84971.02100.71630.947

0,19739.55598.49880.75837.005 = AM.

0,00266.66666.66666.66666.666
18285.71428.57142.857
18.61818.18181.818
2184.53333.333
2.75941.053
364.722
498

— 0,00266.84971.02100.71630.947

Or comme 4 fois l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$ moins l'arc dont la tangente est $\frac{1}{239}$, est égal 45°, il s'ensuit que 16 fois l'arc de la tangente $\frac{1}{5}$ moins 4 fois l'arc de la tangente $\frac{1}{239}$, sera = 180° = 3,14159.26535.89793.23846.264 sans erreur jusqu'à la derniere figure.

Si l'on suppose le diametre = 7, on aura 21, 99114, &c. ou 22 *proximæ* pour la circonférence, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{100}$, ce qui est la régle d'*Archimede*. Mais si le diametre est = 113, la circonférence sera 355, & l'erreur sera moindre que $\frac{1}{10000000}$.

COROLLAIRE I.

231. De là il suit que si un arc de cercle est donné en degrés, on pourra aussi trouver la valeur de cet arc en parties du diametre, en disant que 180° est au nombre de degrés de cet arc, comme $3, 14159. 26535$, &c. est à cet arc exprimé en parties de diametre.

COROLLAIRE II.

232. Si donc r exprime le rayon d'un cercle, sa demi-circonférence sera exprimée par $r \times 3, 14159$, &c. & si D exprime un arc quelconque de ce cercle en degrés, on aura * $180^\circ : D ::$ * Art. 231.
$r \times 3, 14159$, &c. : $D r \times 0,01745. 32925. 19943 =$ à la valeur de cet arc en parties du rayon; ou si $K = 0, 01745$, &c. cette valeur sera $= r D K$. *Ce qu'il faut bien remarquer, parce que cette valeur sera d'un grand usage dans la suite.*

PROBLEME V.

233. *Le rayon* AC (1) *& l'arc* MA (z) *étant donnés, trouver le sinus* PM (y) *de cet arc.*

Le cosinus de cet arc sera $= \sqrt{1 - yy}$, & par la propriété du cercle, $\sqrt{1-yy} : 1 ::$ le sinus (y) est à la tangente, ou * $::$ * Art. 64. 65.
$\dot{y} : \dot{z} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-yy}}$. D'où en quarrant & en multipliant par $1 - yy$, on aura $\dot{y}^2 = \dot{z}^2 \times \overline{1 - yy}$. Cela posé, si A. $y = z + a z^3 + b z^5 + c z^7 +$ &c. en prenant la fluxion $\dot{y} = \dot{z} + 3 a \dot{z} z^2 + 5 b \dot{z} z^4 + 7 c \dot{z} z^6 +$ &c. en mettant les valeurs de $\dot{y}$ & de y dans $\dot{y}^2 = \dot{z}^2 \times \overline{1 - yy}$, & égalant le tout à zero, on aura

$$0 = \left\{\begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +1 \\ +6a \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} +2a \\ +10b \\ +9aa \end{matrix}\right\} z^4 \left.\begin{matrix} +2b \\ +aa \\ +14c \\ +30ab \end{matrix}\right\} z^6 + \&c.$$

En comparant les coefficiens des termes homologues *, on aura * Art. 214.
$1 = 1$, $-1 = 6a$, $-10b = 9aa + 2a$, $-14c = aa + 30ab + 2b$. D'où l'on tire $-a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{120}$, $-c = \frac{1}{5040}$.
Par conséquent l'équation A deviendra

$$y = z - \frac{zz}{2.3} A + \frac{zz}{4.5} B - \frac{zz}{6.7} C + \&c.$$

Les lettres A, B, C expriment chacune le terme qui lui précede.

PROBLEME VI.

234. *Le rayon* AC (1) *& l'arc* AM (z) *étant donnés, trouver le sinus verse* AP (x).

On aura $y = \sqrt{2x - xx}$, & $\sqrt{2x - xx} : 1 ::$ la soutangente est à la tangente, ou * $:: \dot{x} : \dot{z} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{2x - xx}}$; en quarrant & multipliant par $2x - xx$, il viendra $\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \times \overline{2x - xx}$. Cela posé, si $x = az^2 + bz^4 + cz^6 +$ &c. on aura en prenant la fluxion $\dot{y} = 2a\dot{z}z + 4b\dot{z}z^3 + 6c\dot{z}z^5 +$ &c. Les valeurs de $\dot{x}$ & de x étant mises dans l'équation $\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \times \overline{2x - xx}$, & l'égalant à zero, donne

* Art. 64. 65.

$$o = \left\{ \begin{matrix} +2a \\ -4aa \end{matrix} \right\} z^2 \begin{matrix} +2b \\ -aa \\ -16ab \end{matrix} \Bigg\} z^4 \begin{matrix} +2c \\ -2ab \\ -24ac \\ -16bb \end{matrix} \Bigg\} z^6 + \&c.$$

En comparant les coefficiens des termes homologues, on aura $2a = 4aa$, $2b = aa + 16ab$, $2c = 2ab + 24ac + 16bb$, ou $a = \frac{1}{2}$, $-b = \frac{1}{24}$, $c = \frac{1}{720}$. Par conséquent l'équation A deviendra $x = \frac{zz}{1.2} - \frac{zz}{3.4}A + \frac{zz}{5.6}B - \frac{zz}{7.8}C +$ &c.

Les lettres A, B, C expriment chacune le terme qui lui précede.

REMARQUE.

Comme les valeurs que nous venons de trouver des sinus droits & verses sont d'un usage admirable dans la construction des tables des sinus, nous en donnerons quelques exemples en peu de mots pour éclaircir le sujet.

I. Soit l'arc z d'une minute, ou la 10800me partie de la demi-circonférence, on aura * $z = 0, 00029. 08882. 086$. Ainsi le sinus y sera $= 0, 00029. 08882. 086$, vrai à 12 figures; le sinus verse AP $= 0, 00000. 00846. 157$, & le cosinus CP $= 99999. 99576. 922$, vrai à 15 figures s'il étoit continué.

* Fig. 230.

II. Soit le rayon CM perpendiculaire sur la corde LN, & soient tirées les perpendiculaires LO, RI, MP, NQ, & les paralleles ERS, FN au rayon CA. Cela posé, si PM $= a$,

* Art. 149. n. 4.

$CP = b$, $RM = x$, $MN = ML = z$, les triangles semblables CPM, RSM, donnent $CM : CP :: RM : RS = bx$, & $CM : PM :: RM : MS = ax$.

Or comme les arcs AN, AM, AL, & par conséquent les lignes QN, IR, OL, & CO, CI, CQ, sont en progression arithmétique, on aura $LO + NQ = (2a - 2ax) =$ * $2a - azz +$ &c. $CQ + CO = (2b - 2bx) = 2b - bzz +$ &c. Si l'arc $MN = z$ est d'une minute, on aura $zz = 0,00000.00846.157$. Par conséquent $LO + NQ = a \times 1,99970.91117.914$, & $CQ + CO = b \times 1,99970.91117.914$. * Art. 234.

Soit par exemple LO le sinus total, PM (a) le sinus de 89° 59′, c'est-à-dire $a = 99999.99576.922$, on trouvera $NQ = 99999.98665.067$ pour le sinus d'un arc de 89° 58′. On trouvera de la même maniere les sinus & cosinus des arcs depuis zero jusqu'à 30°.

III. Soit l'arc AM de 30°, PM sera $= a = \frac{1}{2}$; ainsi $LO + NQ = (2a - 2ax) = 1 - x = CR$. Ce qui montre que la somme des sinus des arcs également éloignés de 30°, est égale au cosinus de la moitié de leurs différences.

Comme on a aussi dans ce cas $PM (\frac{1}{2}) : CM (1) :: ER$, ou $\frac{1}{2} CQ - \frac{1}{2} CO : LR = CQ - CO$; ainsi la différence entre les cosinus des arcs également éloignés de 30° est égale au au sinus de la moitié de leurs différences. De cette maniere on peut trouver les sinus & cosinus depuis 30° jusqu'à 60° par soustraction seulement.

IV. Lorsque l'arc LN n'est que d'une minute, on peut considérer les trois lignes OL, PM, QN, comme étant en progression arithmétique; & par conséquent $LN (1) : LF :: LM : LE = LM \times LF$. D'où l'on tire la régle ordinaire; sçavoir,

La différence LF *des sinus de deux arcs qui ne différent que d'une minute, multipliée par la différence* LM *d'un de ces arcs, & d'un autre arc entre les deux, est égale à la différence* LE *de leurs sinus.*

Et la différence entre les sinus de deux arcs AL, AM, *divisée par la différence* LF *des arcs* AM, AL, *sera égale à la différence* LM *entre les arcs* AL *&* AL.

Par exemple, pour avoir l'arc qui correspond au sinus A. 6789012, on voit que le sinus B. 6788007 de 42° 45′ est trop petit, & C. 6790143 celui de 42° 46′, trop grand; ainsi je di-

vise la différence (A — B) 1005 par la différence (C — B) 2136 ; le quotient ($\frac{1005}{2136}$) = 28″ 1‴ étant ajouté à 41° 45′, donnera 41° 45′ 28″ 1‴ pour l'arc demandé.

Ce qu'on vient de dire à l'égard des sinus se peut aussi appliquer aux tangentes. On veut avoir l'arc qui correspond à la tangente A. 59234560. Comme la tangente B. 59228322 de 80° 25′ est trop petite, & C. 59333455 de 80° 26′, trop grande, la différence (A — B) 6238 divisée par la différence (C — B) 105133, donnera ($\frac{6238}{105133}$) = 3″ 33‴. Ce qui étant ajouté à 88° 25′, donnera 80° 25′ 3″ 33‴ pour l'arc demandé.

Comme le quotient 56″ 27‴ de (C — A) 98895, divisé par (C — B) 105133 étant retranché de 80° 26′ donne le même arc, on peut être assuré qu'il n'y a point d'erreur.

Il faut bien remarquer cette régle, parce qu'elle sert souvent dans la suite.

PROBLEME VII.

235. *Trouver la fluente de* $\delta \dot{z} z^{\theta n-1} \times \overline{e+fz^{n}}^{\pi}$.

Soit $P = e + fz^{n}$, & $P^{\pi+1} \times$ par $Kz^{\theta n-n} + Lz^{\theta n-2n} + Mz^{\theta n-3n} \cdots xF$, la fluente cherchée. K, L, M, &c. expriment les coefficiens indéterminés, & x celui de F qui devient = o, lorsque le nombre des termes de la fluente est fini. En faisant $\theta + \pi = s$, la fluxion de cette fluente étant posée par ordre, sera

$$N.\ sfK + \left\{\begin{matrix}\overline{\theta-1},eK\\ \overline{s-1},fL\end{matrix}\right\} z^{-n} + \left\{\begin{matrix}\overline{\theta-2},eL\\ \overline{s-2},fM\end{matrix}\right\} z^{-2n} + \overline{\theta-3},eMz^{-3n} \cdots \times$$
$$\times\, n\dot{z} z^{\pi n-1} P^{\pi}.$$

Car si q exprime un nombre entier quelconque, $P^{\pi+1} \times z^{\theta n-qn}$ exprimera un des termes quelconques de la fluente supposée, dont la fluxion est $\overline{\pi+1},\dot{P} P^{\pi} \times z^{\theta n-qn} + \overline{\theta n-qn},\dot{z} z^{\theta n-qn-1} \times P^{\pi+1}$, ou $\overline{\pi+1},\dot{P} z^{1-qn} + \overline{\theta n-qn},\dot{z} P z^{-qn}$ × par $z^{\theta n-1} P^{\pi}$. Mais à cause que $P = e + fz^{n}$, on aura $\dot{P} = nf\dot{z} z^{n-1}$: en mettant ces valeurs de $\dot{P}$ & de P dans la derniere fluxion, elle deviendra $\overline{\pi+1},nf\dot{z} z^{n-qn} + \overline{\theta n-qn},\overline{ez^{-qn}+fz^{n-qn}}$ × par $z^{\theta n-1} P^{\pi}$, ou $\overline{\pi+1+\theta-q},fz^{n-qn} + \overline{\theta-q},ez^{-qn}$ × par $n\dot{z} z^{\theta n-1} P^{\pi}$, ou enfin en mettant au lieu de

de $\theta + \pi$ sa valeur $s, \overline{s - q + 1}, f z^{n - qn} + \overline{\theta - q}, e z^{-qn} \times$ par $n \dot{z} z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

Or si l'on fait q égale à 1, 2, 3, &c. cette derniere fluxion deviendra celle des termes de la fluente supposée.

En faisant le coefficient $s n f$K du premier terme de la fluxion N, égal au coefficient δ de la fluxion proposée, & ceux des autres termes chacun égal à zero, on aura

$nsfK = \delta.$	$+K = \frac{\delta}{nsf}.$
$\overline{\theta - 1}, eK + \overline{s - 1}, fL = 0$, *ou*	$-L = \frac{\theta - 1}{s - 1} \times \frac{\delta e}{nsff}.$
$\overline{\theta - 2}, eL + \overline{s - 2}, fM = 0,$	$+M = \frac{\theta - 1}{s - 1} \times \frac{\theta - 2}{s - 2} \times \frac{\delta ee}{nsfff}.$

Mais à cause que $x = \overline{\theta - 3}, neM$ & $\dot{F} = \dot{z} z^{\theta n - 3n - 1} P^{\pi}$; lorsque M $z^{\theta n - 3n} P^{\pi + 1}$ est le dernier terme, par la même raison $x = \nu n e Q$, & $\dot{F} = \dot{z} z^{\nu n - 1} P^{\pi}$, lorsque Q $z^{\nu n} P^{\pi + 1}$ est le dernier terme. Par conséquent en mettant ces valeurs des coefficiens K, L, M, x, dans la fluente ci-dessus, on aura

$$K. \boxed{\frac{\delta z^{\theta n}}{nsfz^{n}} P^{\pi + 1} - \frac{\theta - 1}{s - 1} \times \frac{eA}{fz^{n}} + \frac{\theta - 2}{s - 2} \times \frac{eB}{fz^{n}} - \frac{\theta - 3}{s - 3} \times \frac{eC}{fz^{n}} \cdots\cdots \nu n e Q F}$$

pour la fluente cherchée.

Les lettres A, B, C, expriment chacune le terme qui les précedent; le terme $\nu n e$ QF doit avoir le signe contraire à celui du dernier terme de la suite; Q est le coefficient de ce dernier terme, & $\nu = -\pi$, lorsque la suite est infinie.

COROLLAIRE I.

236. D'où il suit que si $s = \theta + \pi$, est une fraction, & θ un nombre entier quelconque & positif, ou si s est un nombre entier aussi bien que θ, & $\theta < s$, la fluente K sera toujours exprimée par θ termes.

Car comme le coefficient de chaque terme multiplie toujours les termes suivans, il est évident que s'il y en a un qui devienne $= 0$, tous les suivans seront aussi $= 0$.

COROLLAIRE II.

237. Il eſt auſſi évident que dans tous les autres cas la fluente de $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$ dépend de la fluente de $Q \dot{z} z^{\nu n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$. Et la fluente de cette derniere fluxion ſe peut réduire à la quadrature des ſections coniques, lorſque θ eſt un nombre quelconque, & $\pi = -1$, ou ſi $s\,(\pi + \theta)$ eſt un nombre entier poſitif, ou zero, ou bien lorſque $\theta = 0$, & π eſt un nombre quelconque ; comme on verra dans le Traité des Quadratures à la fin de ce Livre.

COROLLAIRE III.

238. Lorſque θ eſt négatif, on peut changer la fluxion $\delta \dot{z} z^{-\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, en multipliant la quantité hors du ſigne radical par $z^{\pi n}$, & en diviſant celle ſous ce ſigne par z^n, en la fluxion $\delta \dot{z} z^{\pi n - \theta n - 1} \times \overline{e\, z^{-n} + f}^{\pi}$, ſans changer ſa valeur.

Or comme θ dans la fluxion $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, devient ici $= \theta - \pi$, parce que $\frac{\pi n - \theta n}{-n} = \theta - \pi$; en mettant au lieu de θ ſa valeur $\theta - \pi$ dans $\theta + \pi = S$, on aura $s = \theta$; & ſi $\theta - \pi = r$, & que l'on mette dans la fluente K, e, f, $-n$, r, θ, & z^{-n}, au lieu de f, e, n, θ, s & z^n, on aura

$$\text{L.}\quad \boxed{\frac{-\delta z^n}{n e \theta z^{rn}} P^{\pi+1} + \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{A}{e} f z^n - \frac{r-2}{\theta-2} \times \frac{B}{e} f z^n + \frac{r-3}{\theta-3} \times \frac{C}{e} f z^n \,\text{--}\, \nu n f Q F}$$

pour la fluente $\delta \dot{z} z^{-\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$. Il faut remarquer que P eſt ici $= e z^{-n} + f$, ou $P = \frac{e + f z^n}{z^n}$, & le reſte eſt de même que ci-deſſus.

COROLLAIRE IV.

239. De là il ſuit qu'il eſt évident que ſi θ eſt une fraction, & $r = \frac{\pi n - \theta n}{-n}$, un nombre entier quelconque & poſitif, ou ſi θ, r, ſont des entiers, & $r < \theta$, la fluente L ſera toujours exprimée par r termes. Et dans tous les autres cas elle dépend de la fluente de $Q \dot{z} z^{\nu n - 1} P^{\pi}$.

N. B. Dans l'une & l'autre formule générale, lorſque la

fluente dépend de celle de $\dot{F}$, la suite doit être continuée jusqu'à ce que le dernier terme devienne négatif ou infini.

Dans les cas où la fluente de $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$ dépend de la fluente F, & que la fluente F ne se réduit pas à la quadrature des sections coniques, si $f z^n > e$, il faudra continuer la suite K à autant de termes que l'on jugera à propos, pour avoir la fluente par approximation. Mais si $f z^n < e$, il vaut mieux se servir de la suite de l'article 215.

EXEMPLE I.

240. Soit $\dot{x} x^3 \sqrt{aa + xx}$ la fluxion proposée, en la comparant avec $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, on aura $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $\theta n - 1 = 3$, ou $\theta = 2$, $\theta + \pi = s = \frac{5}{2}$, $e = aa$, $\delta = f = 1$, & $z^n = xx$. Ces valeurs étant mises dans la fluente K, on aura $\frac{3xx - 2aa}{15} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$ pour la fluente cherchée.

Mais si $\frac{a^4 \dot{x}}{x^4} \sqrt{aa + xx}$ est la fluxion proposée, on aura en la comparant avec $\delta \dot{z} z^{-\theta n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $-\theta n - 1 = -4$, ou $\theta = \frac{3}{2}$, $\theta - \pi = r = 1$, $e = aa$, $\delta = a^4$, $z^n = xx$; par conséquent la formule L donnera $-\frac{aa}{3} \times \frac{\overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}}{xx}$ ou $-\frac{aa}{3x^3} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$ pour la fluente cherchée.

EXEMPLE II.

241. Soit $\frac{\delta \dot{z} z^{4n - 1}}{e + f z^n}$, on aura $\pi = -1$, $\theta = 4$, $\theta + \pi = s = 3$. Or comme $s < \theta$, cette fluente dépend * de la fluente F. * Art. 237.
Ainsi * $-\pi = v = 1$, & $\dot{F} = \frac{\dot{z} z^{n - 1}}{e + f z^n}$; & par conséquent * Art. 235.
puisque $\frac{\dot{z} z^{n - 1}}{e + f z^n}$ est la fluxion du logarithme de * $\frac{e + f z^n}{e}$ multiplié * Art. 218.
par $\frac{1}{nf}$, la formule K donnera $\frac{\delta z^{3n}}{3nf} - \frac{\delta e z^{2n}}{2nff} + \frac{\delta e e z^n}{nf^3} - \frac{\delta e^3}{nf^4} l \frac{e + f z^n}{e}$; car $Q = \frac{\delta e e}{n f^3}$.

Mais si $\frac{\delta \dot{z} z^{-3n - 1}}{e + f z^n}$ est la fluxion dont on veut avoir la fluente, on aura $\pi = -1$, $\theta = 3$, $\theta - \pi = 4 = r$; & comme $\theta < r$, la fluente dépend de la fluente F; ainsi $-\pi = v = 1$, & * $\dot{F} =$ * Art. 218.

$\frac{\dot{z}z^{-1}}{e+fz^n}$, dont la fluente ſera $l\,\frac{e+fz^n}{z^n}$ multipliée par $\frac{1}{ne}$. Par conſequent la formule L donnera $\frac{-\delta}{3nez^{3n}} + \frac{\delta f}{2neez^{2n}} - \frac{\delta ff}{ne^3z^n} + \frac{\delta f^3}{ne^4}$ $l\,\frac{e+fz^n}{z^n}$ pour la fluente cherchée.

EXEMPLE III.

242. Soit $\delta\dot{z}z^{\theta n+n-1} \times \overline{e+fz^n}^{\pi}$ la fluxion propoſée, & F la fluente donnée de $\delta\dot{z}z^{\theta n-1} \times \overline{e+fz^n}^{\pi}$. Si l'on nomme G la fluente cherchée, & que l'on mette $\theta+1$, & θ au lieu de θ & ν dans la formule K, elle donnera $G = \frac{\delta z^{\theta n}P^{\pi+1}}{nsf} - \frac{e\theta\delta}{sf}$ F, parce que $Q = \frac{\delta}{nsf}$: il faut remarquer que $s = \theta + \pi - 1$.

REMARQUE.

Quoique ce probleme donne tous les cas poſſibles dans leſquels la fluente peut être exprimée par un nombre fini de termes, il ne réduit néanmoins pas toutes les expreſſions aux cas les plus ſimples pour réduire la fluente à la quadrature des ſections coniques lorſqu'elle en dépend; mais comme ce qu'on vient de dire ſuffit pour ce qui ſuit, on a mieux aimé renvoyer le lecteur au Traité de la Quadrature, où on donne ce qui reſte ici à démontrer.

Explication des Tables ſuivantes.

On les a conſtruites par le moyen du 7me probleme, en y ſubſtituant les différentes valeurs de θ que l'on voit dans la premiere colonne verticale de chaque page au-deſſous de θ dans les formules K & L; les fluentes provenant de ces valeurs ſont à côté de ces nombres dans les colonnes paralleles, & la formule générale des fluxions eſt à la tête de chaque page.

Par exemple, lorſque $\theta = 1$, la ſeconde formule $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}$ devient $\frac{d\dot{z}z^{\frac{3n}{2}-1}}{e+fz^n}$ dont la fluente $\frac{2dz^{\frac{1}{2}n}}{nf} - \frac{2}{nf}d\odot$ eſt à côté de l'unité.

De même lorſque $\theta = 0$, la premiere formule $\frac{d\dot{z}z^{\theta n-1}}{e+fz^n}$ devient $\frac{d\dot{z}z^{-1}}{e+fz^n}$, dont la fluente $\frac{-d}{ne}\,l.\,M$ eſt à côté de zero; ainſi des autres.

La lettre D au bas de chaque page exprime un arc de cercle en degrés, dont R est le rayon, & T la tangente, L le logarithme tabulaire de la quantité $\frac{R+T}{S}$, & $\odot$ est * $= RDK$ lorsque la valeur de R est impossible, ou bien * $\odot = RLM$, lorsque cette valeur de R est possible. * Art. 232. * Art. 224.

Il faut remarquer que lorsque $\odot$ exprime un arc de cercle, il faut changer de signe à la valeur de R, afin qu'elle devienne possible.

Comme les valeurs de R, S, T, sont telles que $SS = TT + RR$, lorsque $\odot$ exprime un arc de cercle D; & $SS = TT - RR$, lorsque $\odot$ exprime un logarithme L, & R étant toujours égal à une quantité constante, on aura * $\dot{D} = \frac{RR\dot{T}}{SS}$, & $\dot{L} = \frac{-R\dot{T}}{SS}$, ou $R\dot{L} = \frac{-RR\dot{T}}{SS}$. Car le logarithme de $\frac{T+R}{S}$ est égal à la différence des logarithmes de $T+R$ & de S ou de son égal $\sqrt{TT-RR}$: or la fluxion du logarithme de $T+R$ est * $\frac{\dot{T}}{T+R}$, ou $\frac{\dot{T}\times\overline{T-R}}{TT-RR}$; & celle du logarithme de S ou de $\sqrt{TT-RR}$ sera $\frac{T\dot{T}}{TT-RR}$. Donc $\frac{T\dot{T}-R\dot{T}-T\dot{T}}{TT-RR} = \frac{-R\dot{T}}{SS}$, parce que $SS = TT - RR$. * Art. 228. * Art. 218.

Comme on a trouvé les fluentes de chaque Table par le moyen de celle du cas le plus simple, c'est-à-dire par celui où $\theta = 0$, il reste à faire voir que les fluentes des cas où $\theta = 0$, sont bien exprimées.

Lorsque $\theta = 0$, la seconde formule devient $\frac{d\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}$. Or comme $R = \sqrt{\frac{-e}{f}}$, $T = z^{\frac{1}{2}n}$, & $S = \sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}$, on aura $\dot{T} = \frac{1}{2}n\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{ne\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{2,e+fz^n}$. Par conséquent $\frac{2d}{ne}\odot$ est la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}$.

Lorsque $\theta = 0$, la troisiéme formule devient $\frac{d\dot{z}z^{-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$; & comme $R = \sqrt{e}$, $S = \sqrt{fz^n}$, & $T = \sqrt{e+fz^n}$, on aura $\dot{T} = \frac{nf\dot{z}z^{-1}}{2\sqrt{e+fz^n}}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{ne\dot{z}z^{-1}}{2\sqrt{e+fz^n}}$. Donc $-\frac{2d}{ne}\odot$ est la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$; car e est négatif dans le cercle.

Enfin si $\theta = 0$ dans la cinquiéme formule, on aura $\frac{d\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$, & puisque $R = \sqrt{f}$, $S = \sqrt{\frac{e}{z^n}}$, & $T = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}} = \sqrt{ez^{-n}+f}$, il s'ensuit que $\dot{T} = \frac{-en\dot{z}z^{-n-1}}{2\sqrt{ez^{-n}+f}}$, & $\frac{RR\dot{T}}{SS} = \frac{-nf\dot{z}z^{-1}}{2\sqrt{e+fz^n}}$, ou $\frac{-nf\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{2\sqrt{e+fz^n}}$. Par conséquent $\frac{2d}{nf}\odot$ sera la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$, parce que f est négatif dans le cercle.

Nous ajouterons quelques exemples pour faire une application des Tables aux cas particuliers.

I. Soit $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}}$ la fluxion proposée : en comparant cette fluxion avec la formule générale $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$ de la cinquiéme Table, on aura $n = 2$, $\theta n + \frac{1}{2}n - 1 = 0$, ou $\theta = 0$, $-f = 1$, $e = aa$, $d = a$, $xx = z^n$; ainsi la fluente $\frac{2}{nf}d\odot$ à côté de 0, donnera $-a\odot$ pour celle demandée ; & $R = \sqrt{f}$, $T = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$, deviendront $R = \sqrt{-1}$, $T = \sqrt{\frac{aa-xx}{xx}}$. Ainsi $\odot$ est un arc de cercle dont le rayon est à la tangente, ou le cosinus est au sinus : : R : T : : $1 : \sqrt{\frac{aa-xx}{xx}} :: x : \sqrt{aa-xx}$.

Il faut remarquer, puisque la fluente est négative, qu'il faut prendre l'arc correspondant au cosinus, & non pas au sinus.

II. Soit $\frac{a\dot{x}x^{-1}}{\sqrt{aa+xx}}$ la fluxion proposée, laquelle étant comparée avec la troisiéme formule $\frac{d\dot{z}z^{\theta n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$, donnera $n = 2$, $\theta n - 1 = -1$, ou $\theta = 0$, $e = aa$, $d = a$, $f = 1$, $xx = z^n$; ainsi la fluente $\frac{-2}{ne}d\odot$ à côté de 0, deviendra $-\frac{1}{a}\odot$, & $R = \sqrt{e}$, $S = \sqrt{fz^n}$, $T = \sqrt{e+fz^n}$, deviennent $R = a$, $S = x$, & $T = \sqrt{aa+xx}$. Donc $\odot$ est le logarithme de $\frac{a+\sqrt{aa+xx}}{x}$.

III. Soit $\frac{a\dot{x}x^2}{\sqrt{aa+xx}}$ la fluxion, laquelle étant comparée avec la cinquiéme formule $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$, donnera $n = 2$, $\theta n + \frac{1}{2}n - 1 = 2$, ou $\theta = 1$, $e = aa$, $d = a$, $f = 1$, $xx = z^n$. Donc la

fluente $\frac{z^n}{nf}dP - \frac{e}{nff}d\odot$ à côté de l'unité, deviendra $\frac{ax}{2}\sqrt{aa+xx} - \frac{a^3}{2}\odot$; & comme $R = \sqrt{f}, = 1$, $S = \sqrt{\frac{e}{z^n}} = \frac{a}{x}$, $T = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}} = \sqrt{\frac{aa+xx}{xx}}$, $\odot$ sera le logarithme du rapport de $\frac{a}{x}$ à $1 + \sqrt{\frac{aa+xx}{xx}}$, ou du rapport de a à $x + \sqrt{aa+xx}$.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire voir clairement au lecteur, & la construction & l'usage des Tables suivantes. On auroit pû en augmenter le nombre à l'exemple de M. Cotes; mais comme celles-ci suffisent pour ce qui suit, on a mieux aimé approfondir ce sujet dans le Traité des Quadratures.

θ	FORMULE I. $\frac{dz\,z^{\theta n-1}}{e+fz^n}$.
5	$\frac{dz^{4n}}{4nf}-\frac{dez^{3n}}{3nff}+\frac{deez^{2n}}{2nf^3}-\frac{de^3z^n}{nf^4}+\frac{de^4}{nf^5}$ L M.
4	$\frac{dz^{3n}}{3nf}-\frac{dez^{2n}}{2nff}+\frac{deez^n}{nf^3}-\frac{de^3}{nf^4}$ L M.
3	$\frac{dz^{2n}}{2nf}-\frac{dez^n}{nff}+\frac{dee}{nf^3}$ L M.
2	$\frac{dz^n}{nf}-\frac{de}{nff}$ L M.
1	$\frac{d}{nf}$ L M.
0	$\frac{-d}{ne}$ l M.
—1	$\frac{-d}{nez^n}+\frac{df}{nee}$ l M.
—2	$\frac{-d}{2nez^{2n}}+\frac{df}{neez^n}-\frac{dff}{ne^3}$ l M.
—3	$\frac{-d}{3nez^{3n}}+\frac{df}{2neez^{2n}}-\frac{dff}{ne^3z^n}+\frac{df^3}{ne^4}$ l M.
—4	$\frac{-d}{4nez^{4n}}+\frac{df}{3neez^{3n}}-\frac{dff}{2ne^3z^{2n}}+\frac{df^3}{ne^4z^n}-\frac{df^4}{ne^5}$ l M.

$L = \log.\frac{e+fz^n}{e}$: $l = \log.\frac{e+fz^n}{z^n}$: M = 2, 30258. 50929. 94045. 684.

FORMULE

θ	FORMULE II. $\frac{dz z^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{e + fz^n}$.
4	$\frac{2dz^{\frac{7}{2}n}}{7nf} - \frac{2dez^{\frac{5}{2}n}}{5nff} + \frac{2deez^{\frac{3}{2}n}}{3nf^3} - \frac{2de^3z^{\frac{1}{2}n}}{nf^4} + \frac{2e^3}{nf^4} d \odot.$
3	$\frac{2dz^{\frac{5}{2}n}}{5nf} - \frac{2dez^{\frac{3}{2}n}}{3nff} + \frac{2deez^{\frac{1}{2}n}}{nf^3} - \frac{2ee}{nf^3} d \odot.$
2	$\frac{2dz^{\frac{3}{2}n}}{3nf} - \frac{2dez^{\frac{1}{2}n}}{nff} + \frac{2e}{nff} d \odot.$
1	$\frac{2dz^{\frac{1}{2}n}}{nf} - \frac{2}{nf} d \odot.$
0	$\frac{2}{ne} d \odot.$
—1	$\frac{-2d}{nez^{\frac{1}{2}n}} - \frac{2f}{nee} d \odot.$
—2	$\frac{-2d}{3nez^{\frac{3}{2}n}} + \frac{2df}{neez^{\frac{1}{2}n}} + \frac{2ff}{ne^3} d \odot.$
—3	$\frac{-2d}{5nez^{\frac{5}{2}n}} + \frac{2df}{3neez^{\frac{3}{2}n}} - \frac{2dff}{ne^3z^{\frac{1}{2}n}} - \frac{2f^3}{ne^4} d \odot.$
—4	$\frac{-2d}{7nez^{\frac{7}{2}n}} + \frac{2df}{5neez^{\frac{5}{2}n}} - \frac{2dff}{3ne^3z^{\frac{3}{2}n}} + \frac{2df^3}{ne^4z^{\frac{1}{2}n}} + \frac{2f^4}{ne^5} d \odot.$

$R = \sqrt{\frac{-e}{f}}$. $T = z^{\frac{1}{2}n}$. $S = \sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}$. $RDK = \odot$, ou $L = \frac{R+T}{S}$. $RLM = \odot$, $K = 0,01745.32925.19943.290213$.

R

θ	FORMULE III. $\frac{dz\, z^{\theta n - 1}}{\sqrt{e+fz^n}}$.
4	$\frac{-96e^3 + 48eefz^n - 36effz^{2n} + 30f^3z^{3n}}{105nf^4} dP.$
3	$\frac{16ee - 8efz^n + 6ffz^{2n}}{15nf^3} dP.$
2	$\frac{-4e + 2fz^n}{3nff} dP.$
1	$\frac{2}{nf} dP.$
0	$\frac{-2}{ne} d\odot.$
−1	$\frac{-1}{nez^n} dP + \frac{f}{nee} d\odot.$
−2	$\frac{-2e + 3fz^n}{4neez^{2n}} dP - \frac{3ff}{4ne^3} d\odot.$
−3	$\frac{-8ee + 10efz^n - 15ffz^{2n}}{24ne^3z^{3n}} dP + \frac{5f^3}{8ne^4} d\odot.$
−4	$\frac{-49e^3 + 56eefz^n - 70effz^{2n} + 105f^3z^{3n}}{192e^4z^{4n}} dP - \frac{35f^4}{64ne^5} d\odot.$

$R = \sqrt{e}$. $P = T = \sqrt{e+fz^n}$. $S = \sqrt{fz^n}$. $RDK = \odot$, ou $L = \frac{R+T}{S}$, $RLM = \odot$.

θ	FORMULE IV. $d\dot{z}z^{\theta n-1}\sqrt{e+fz^n}$.
4	$\frac{-96e^4+48e^3fz^n-36eeffz^{2n}+30ef^3z^{3n}+210f^4z^{4n}}{945\,nf^4}dP$.
3	$\frac{16e^3-8eefz^n+6effz^{2n}+30f^3z^{3n}}{105\,nfff}dP$.
2	$\frac{-4ee+2efz^n+6ffz^{2n}}{15\,nff}dP$.
1	$\frac{2e+2fz^n}{3nf}dP$.
0	$\frac{2}{n}dP-\frac{2}{n}d\odot$.
−1	$\frac{-1}{nz^n}dP-\frac{f}{ne}d\odot$.
−2	$\frac{-2e-fz^n}{4neez^{2n}}dP-\frac{ff}{4nee}d\odot$.
−3	$\frac{-8ee-2efz^n+3ffz^{2n}}{24neez^{3n}}dP-\frac{f^3}{8ne^3}d\odot$.
−4	$\frac{-48e^3-8eefz^n+10effz^{2n}-15f^3z^{3n}}{192\,en^3z^{4n}}dP+\frac{5f^4}{64ne^4}d\odot$.

Les valeurs de $\odot$ font de même que dans la Table précédente.

θ	FORMULE V. $\frac{dz\, z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}$.
4	$\frac{-105e^3z^n+70eefz^{2n}-56effz^{3n}+48f^3z^{4n}}{192nf^4}dP+\frac{35e^4}{64nf^5}d\odot$.
3	$\frac{15eez^n-10efz^{2n}+8ffz^{3n}}{24nf^3}dP-\frac{5e^3}{8nf^4}dP-\frac{5e^3}{8nf^4}d\odot$.
2	$\frac{-3ez^n+2fz^{2n}}{4nff}dP+\frac{3ee}{4nf^3}d\odot$.
1	$\frac{z^n}{nf}dP-\frac{e}{nff}d\odot$.
0	$\frac{2}{nf}d\odot$.
−1	$-\frac{2}{ne}dP$.
−2	$\frac{-2e+4fz^n}{3neez^n}dP$.
−3	$\frac{-6ee+8efz^n-16ffz^{2n}}{15ne^3z^{2n}}dP$.
−4	$\frac{-30e^3+36eefz^n-48effz^{2n}+96f^3z^{3n}}{105ne^4z^{3n}}dP$.

$R=\sqrt{f}$. $P=T=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$. $S=\sqrt{\frac{e}{z^n}}$. $RDK=\odot$, ou

$L=\frac{R+T}{S}$. $LRM=\odot$.

θ	FORMULE VI. $d\dot{z}z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}\sqrt{e+fz^n}$.
3	$\frac{15ez^n-10eefz^{2n}+8effz^{3n}+48f^3z^{4n}}{192nf^3}dP-\frac{5e^4}{64nf^4}d\odot$.
2	$\frac{-3eez^n+2efz^{2n}+8ffz^{3n}}{24nff}dP+\frac{e^3}{8nf^3}d\odot$.
1	$\frac{ez^n+2fz^{2n}}{4nf}dP-\frac{ee}{4nff}d\odot$.
0	$\frac{z^n}{n}dP+\frac{e}{nf}d\odot$.
—1	$\frac{-2}{n}dP+\frac{2}{n}d\odot$.
—2	$\frac{-2e-2fz^n}{3nez^n}dP$.
—3	$\frac{-6ee-2efz^n+4ffz^{2n}}{15neez^{2n}}dP$.
—4	$\frac{-30e^3-6eefz^n+8effz^{2n}-16f^3z^{3n}}{105ne^3z^{3n}}dP$.
—5	$\frac{-210e^4-30e^3fz^n+36eeffz^{2n}-48ef^3z^{3n}+96f^4z^{4n}}{945ne^4z^{4n}}dP$.

Les valeurs de $\odot$ ſont de même que dans la Table précédente.

PROBLEME VIII.

243. *Changer quelques expreſſions fluxionaires, dont les fluentes dépendent de la quadrature des ſections coniques, en d'autres plus ſimples.*

Soient A C la ſecante, B C la tangente, P G le ſinus de l'arc B G décrit du centre A : ſoit tiré M L parallele à A B, rencontrant P G en N, & la tangente G M en M ; ſoit d'un point D dans B C prolongée, comme centre, décrite la demi-circonférence de cercle H E, enſorte qu'elle touche la ſecante A C prolongée en E ; du centre D ſoit tiré K D perpendiculaire à

CH, & DL perpendiculaire ſur AK; ſoit enfin En perpendiculaire à CH. Cela poſé, ſi MG exprime la fluxion de l'arc BG, MN ſera celle du coſinus AP, NG celle du ſinus PG; & ſi CD exprime la fluxion de la tangente BC, CE ſera celle de la ſecante. C'eſt pourquoi la reſſemblance des triangles donnera les proportions ſuivantes.

$z : y :: \dot{y} : \dot{z}$ $z : z+y :: \dot{y} : \dot{y}+\dot{z}$	$\frac{d\dot{y}}{z} = d \times \frac{\dot{y}+\dot{z}}{y+z}$.
$z : a :: \dot{y} :$ DE GC : BC $:: \dot{z} :$ CH	CH—CD=DH=DE $\frac{\dot{z}}{z-a} - \frac{\dot{y}}{y} = \frac{a\dot{y}}{zy}$.
$a : y :: \dot{z} :$ EL $a : z :: \dot{y} :$ DL	EL+DL+DE=2DL $\frac{y\dot{z}+z\dot{y}}{a} + \frac{a\dot{y}}{z} = \frac{2z\dot{y}}{a}$.
$z : y :: \dot{z} :$ Cn $z : a ::$ DE : Dn	DC—Dn=Cn $\dot{y} - \frac{aa\dot{y}}{zz} = \frac{y\dot{z}}{z}$.
$u : x :: \dot{x} : \dot{u}$	$\frac{2a\dot{x}}{ux} = \frac{2a\dot{u}}{xx} = \frac{2a\dot{u}}{aa-uu}$ $= \frac{\dot{u}}{a+u} + \frac{\dot{u}}{a-u}$.
* *Art.* 228. $y : z :: \dot{z} : \dot{y}$	MG=* $\frac{aa\dot{y}}{zz} = \frac{aa\dot{z}}{zy}$.
$y : a :: \dot{y} :$ DK $z : a ::$ DK : KE	CE+EK=CK, $\dot{z} + \frac{aa\dot{y}}{yz} = \frac{z\dot{y}}{y}$.
$x : u :: \dot{x} :$ NC $x : a :: \dot{u} :$ MG $x : a ::$ MG : MC	MC—MN=NC. $\frac{aa\dot{u}}{xx} - \dot{u} = \frac{u\dot{x}}{x}$.

* *Art.* 228. Or ſçachant que la fluxion d'un arc de cercle eſt égale au * produit du quarré du rayon multiplié par la fluxion de la tangente diviſée par le quarré de la ſecante, & que la fluxion d'un
* *Art.* 218. logarithme eſt égale à * la fluxion du nombre de ce logarithme, diviſée par le même nombre, on aura la Table des fluentes ci-après.

TABLES des Expressions logarithmiques.

	FLUXIONS.	*FLUENTES.*
I.	$\frac{\dot{x}}{y} = \frac{\dot{y}}{x} = \frac{\dot{x}+\dot{y}}{x+y}$	$l\frac{y+x}{a} = l\frac{a}{x-y}$.
II.	$\frac{a\dot{y}}{yx} = \frac{a\dot{x}}{yy}$	$l\frac{x-a}{y} = l\frac{y}{x+a}$.
III.	$\frac{xx\dot{x}}{ay} = \frac{x\dot{y}}{a}$	$\frac{yx}{2a} + \frac{a}{2}l\frac{y+x}{a}$.
IV.	$\frac{yy\dot{y}}{xx} = \frac{y\dot{x}}{x}$	$y - BG$.
V.	$\frac{a\dot{x}}{ux} = \frac{a\dot{u}}{xx}$	$\frac{1}{2}l\frac{a+u}{a-u} = l\frac{a+u}{x}$.
VI.	$\frac{aa\dot{y}}{xx} = \frac{aa\dot{x}}{xy}$	BG.
VII.	$\frac{x\dot{y}}{y} = \frac{xx\dot{x}}{yy}$	$y + a\,l\frac{x-a}{y}$.
VIII.	$\frac{uu\dot{u}}{xx} = \frac{u\dot{x}}{x}$	$\frac{a}{2}l\frac{a+u}{a-u} - x$.

N. B. Les fluentes devant lesquelles il y a une l, expriment les logarithmes de ces quantités ; par exemple $l\frac{y+x}{a}$ exprime le logarithme de $\frac{y+x}{a}$, $\frac{a}{2}l\frac{y+x}{a}$ exprime le logarithme de $\frac{y+x}{a}$ multiplié par la quantité $\frac{a}{2}$. Lorsqu'il y a deux fluentes l'une égale à l'autre, comme dans les nombres I, II, V, l'une ou l'autre est la fluente de la fluxion à côté. On a trouvé l'égalité des fluxions par le moyen de leurs rapports, & par la propriété des triangles semblables.

Dans les Tables ci-devant des fluentes, & dans tous les

cas où la fluente dépend de la quadrature des sections coniques, on peut toujours réduire les fluxions à quelques-unes des formules dont nous venons de donner les fluentes; ce qui fait que cette derniere Table est très-utile & épargne beaucoup de calcul que l'on seroit obligé de faire sans cela, comme on verra dans la suite.

SECTION II.

De la maniere de trouver les valeurs des superficies, surfaces & solides avec la rectification des courbes.

PROBLEME GENERAL.

Fig. 150. 244. *Trouver les fluxions des superficies, surfaces & solides.*

I. Si l'on suppose que la ligne A E parallele à l'appliquée P M, se meut parallelement le long de A P, sa partie terminée par la courbe & l'abscisse A P, décrira la superficie A M P, pendant qu'elle-même décrit le rectangle A E M P. Cela posé, puisque la fluxion d'un espace quelconque A ap est égale à la quantité de mouvement avec laquelle la partie pa arrive dans la situation pe, & que pa, pe a par-tout la même vîtesse, les fluxions des espaces A ap, A E ep, seront entr'elles comme leurs quantités génératrices, ou comme les produits de ces quantités, chacune multipliée par leur vîtesse commune, ou par la fluxion de A p: or comme le produit de A e, multiplié par sa vîtesse, exprime la fluxion du rectangle A E ep, il s'ensuit que le produit de pa multiplié par sa vîtesse, exprimera aussi la fluxion de l'espace A ap correspondant.

Par conséquent *la fluxion d'un espace quelconque* A M P *est exprimée par le produit de l'appliquée* P M, *multipliée par la fluxion de l'abscisse* A P *correspondante.*

II. Si au lieu de pa, pe, on prend les surfaces décrites par ces lignes dans la révolution de la figure autour de l'axe A P, on prouvera de la même maniere que les fluxions des solides décrits par le mouvement parallele de ces surfaces, seront toujours entr'elles comme les surfaces génératrices.

Par

Par conséquent, *la fluxion du solide décrit par la figure* A M P *en tournant autour de l'axe* A P, *sera égale au produit de la surface décrite par* P M *dans cette révolution, multipliée par la fluxion de l'abscisse* A P.

III. En concevant que l'arc A M représente l'abscisse d'une figure curviligne, & que la circonférence décrite par le point M dans la révolution de la figure A M P autour de l'axe A P, représente l'appliquée correspondante; il est clair que l'espace décrit par cette circonférence dans un mouvement parallele le long de cette abscisse, sera égal à la surface décrite par l'arc A M dans la révolution de la figure A M P autour de l'axe A P.

Donc *la fluxion de la surface décrite par l'arc* A M *autour de l'axe* A P, *est égale au produit de la circonférence décrite par le point* M *dans cette révolution, multipliée par la fluxion de l'arc* A M.

IV. Si l'on suppose que la droite A E tourne dans le plan de la figure autour du point A comme centre, il est évident que chaque point dans cette ligne aura une vîtesse proportionnelle à sa distance au centre A. Ainsi les vîtesses des différentes parties de cette ligne seront dans une progression arithmétique, & par conséquent leur somme sera égale à la plus grande multipliée par la moitié de leur nombre.

C'est pourquoi *la fluxion de l'espace* A *a* M A *décrite par la partie de* A E, *terminée par la courbe & le centre* A, *sera égale au produit de* A M *multipliée par la moitié de la vîtesse du point* M.

De ce qu'on vient de dire on peut tirer cette conclusion générale : *Que la fluxion de toute quantité est égale à la somme des produits de toutes les parties des quantités génératrices, chacune multipliée par sa vîtesse.*

COROLLAIRE I.

245. Si $AP = EM = x$, $PM = CQ = y$, $CP = u$, on aura A. $y\dot{x}$ pour la fluxion de l'espace A M P, & B. $x\dot{y}$ pour la fluxion de l'espace A E M. Et si C A est constante, $QE \times \dot{y} = u\dot{x} - x\dot{y}$ sera la fluxion du rectangle A Q, laquelle étant ajoutée à celle de l'espace A M E, donnera C. $u\dot{y}$ pour la fluxion de l'espace C A M Q.

COROLLAIRE II.

246. Si la partie M N de la tangente en M exprime la fluxion de l'arc A M, la perpendiculaire N m sur P M prolongée, sera la fluxion de l'abscisse * A P, M m celle de l'appliquée P M, & la perpendiculaire N s sur A M exprime la vîtesse circulaire du point * M, à l'égard du rayon A M. Cela posé, si la ligne N m coupe A M en n, les triangles semblables M P A, M m *n*, & N s n donneront 1°. P M : P A :: M m : m n $= \frac{x\dot{y}}{y}$, ou N m — n m $=$ N n $= \dot{x} - \frac{x\dot{y}}{y}$. 2°. A M : P M :: N n : N s, ou A M $\times$ N S $= y\dot{x} - x\dot{y}$. Par conséquent D. $\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{2}$ sera la fluxion de l'espace A a M A.

* Art. 164. 165.

* Art. 188.

La différence entre les fluxions $x\dot{y}$, & $\frac{x\dot{y} + y\dot{x}}{2}$ de l'espace A M P & du triangle A M P, donnera la même chose.

Si le centre autour duquel la ligne A M tourne étoit placé en tout autre endroit de l'axe A P, on trouveroit toujours la même chose, puisqu'on auroit toujours les mêmes triangles semblables.

COROLLAIRE III.

247. Si r est le rayon de la circonférence c, $\frac{c}{2r}yy$ exprimera la surface décrite par P M dans la révolution de la figure autour de A P ; & ainsi E. $\frac{c}{2r}yy\dot{x}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace A M P dans cette révolution.

Par la même raison F. $\frac{c}{2r}uu\dot{y}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace C A M Q autour de l'axe C B.

Et à cause que $\frac{c}{r}uy$ exprime la surface cylindrique décrite par la ligne P M dans la révolution de la figure A M P, autour de B C, il est clair que G. $\frac{c}{r}yu\dot{u}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace A M P dans cette révolution.

COROLLAIRE IV.

248. Si $\dot{v}$ exprime la fluxion de l'arc A M, on aura H. $\frac{c}{r}y\dot{v}$

pour la fluxion de la surface décrite par l'arc A M autour de l'axe A P, & L. $\frac{c}{r} u \dot{v}$ pour la fluxion de la surface décrite par cet arc autour de l'axe C P.

N. B. Lorsque les appliquées P M sont inclinées à l'axe A P, il faudra mettre dans la fluente, au lieu de l'abscisse A P, la perpendiculaire tirée de l'origine A, sur la plus grande appliquée P M, pour avoir la véritable valeur. Car c'est sur cette perpendiculaire qu'il faudroit prendre la fluxion ou la vîtesse de la quantité génératrice.

PROBLEME.

249. *L'on demande la fluxion d'un arc quelconque* A M, *lorsque les appliquées* P M *sont perpendiculaires à leur axe* A P.

Nous avons prouvé * que la fluxion de l'appliquée est à celle de l'arc, comme l'appliquée est à la tangente. Or la soutangente est $= y \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$; ainsi $\sqrt{yy + \frac{yy\dot{x}^2}{\dot{y}^2}}$, ou $\frac{y}{\dot{y}} \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}$ sera la valeur de la tangente; & par conséquent $y : \frac{y}{\dot{y}} \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2} :: \dot{y} : \dot{v} = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}$ = à la fluxion demandée. * Art. 165.

Si par le moyen de l'équation de chaque courbe particuliere, on trouve des expressions égales à celles que nous venons de trouver, & qui ne renferment qu'une quantité variable & des constantes, les fluentes de ces expressions donneront les valeurs des superficies, surfaces, solides, ou lignes courbes demandées.

EXEMPLE I.

250. *L'on demande les valeurs de l'espace* A M P, *& du solide décrit par cette espace autour de l'axe* A P, $x = y^m$ *étant l'équation de la courbe*. Fig. 151.

I. Si l'on multiplie la fluxion $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$ de l'équation par y; on aura A * $y\dot{x} = m\dot{y}y^m$ pour la fluxion de l'espace A M P, dont la fluente * $\frac{m}{1+m} y^{m+1}$, ou son égal $\frac{m}{1+m} yx$, sera la valeur demandée. * Art. 245. * I. Reg.

II. En multipliant la fluxion $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$ par $\frac{c}{2r} yy$, on aura * E. $\frac{c}{2r} yy\dot{x} = \frac{mc}{2r} \dot{y}y^{m-1}$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace A M P autour de l'axe A P; & par conséquent * Art. 247.

la fluente $\frac{m}{2+m} \times \frac{c}{2r} y^{m+2}$, ou son égal $\frac{m}{2+m} \times \frac{c}{2r} x y y$, sera la valeur de ce solide.

III. Le produit $x \dot{x} = m \dot{y} y^{2m-1}$ de $x = y^m$, & de $\dot{x} = m \dot{y} y^{m-1}$ étant multiplié par $\frac{c}{r} y$, donnera *G. ($\frac{c}{r} \dot{x}\ x\ y =$) $\frac{cm}{r}$ $\dot{y} y^{2m}$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace AMP autour de la tangente AT. Donc la fluente $\frac{m}{1+2m} \times \frac{c}{r} y^{2m+1}$, ou $\frac{m}{1+2m}$ $\times \frac{c}{r} x x y$ sera sa valeur.

* Art. 247.

COROLLAIRE.

Fig. 152. 251. Si l'exposant m est négatif, l'équation $x = y^{-m}$ sera celle de toutes les hyperboles à l'infini par rapport aux asymptotes AT, AR; & les valeurs qu'on vient de trouver seront ici $\frac{m}{m-1} x y$, $\frac{m}{m-2} \times \frac{c}{2r} x y y$, $\frac{m}{2m-1} \times \frac{c}{r} x\ x y$, lesquelles appartiendront à l'espace PMSRA, infiniment prolongé vers R, S, & aux solides décrits par cet espace autour des asymptotes AT, AR, si elles sont positives; & au contraire à l'espace PMVT, infiniment prolongé vers VT, & aux solides décrits par cet espace, si elles sont négatives; puisque si les valeurs sont négatives, les espaces & solides doivent aussi être pris du côté contraire de celui dont les valeurs sont positives.

Lorsque $m = 1$, ou $2 = m$, ou bien $2m = 1$, on aura $\frac{1}{0} x y$, $\frac{c}{0r} x y y$, & $\frac{c}{0\,2r} x\ x y$, ce qui ne donne rien dans ces cas. Or quoiqu'on ne puisse point avoir ces valeurs complettes, on peut néanmoins avoir de certaines parties.

I. Car si $m = 1$, l'équation $x = y^{-1}$ est celle de l'hyperbole ordinaire; si l'on fait AB = BC = 1, BP = x, on aura $1+x = y^{-1}$, & $\dot{x} y = \frac{\dot{x}}{1-x}$ pour la fluxion de l'espace BCMP, & le logarithme de $1+x$ (AP) sera sa valeur.

II. Lorsque $m = 2$, on aura E. $\frac{c}{2r} y y \dot{x} = \frac{c}{2r} \times \frac{\dot{x}}{1+x}$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace BCMP autour de l'asymptote AP, dont la fluente $\frac{c}{2r} \times \log. \overline{1+x}$.

* Art. 247. III. Enfin si $2m = 1$, on aura * G $\frac{c}{r} y\ x\ \dot{x} = \frac{c}{r} \times \frac{\dot{x}}{1+x}$,

dont la fluente $\frac{c}{r} \times \log. \overline{1+x}$, fera la valeur du folide décrit par l'efpace BCMP autour de l'afymptote AR.

EXEMPLE II.

252. *L'on demande la valeur de l'arc* AM, *en fuppofant que les appliquées* PM *font perpendiculaires à l'axe* AP, *& que* $x = y^m$ *foit l'équation de la courbe.* Fig. 151.

Le quarré de la fluxion $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$, qui eft $mm\dot{y}^2y^{2m-2}$ étant ajouté à $\dot{y}^2$, donne $\dot{y}^2 + \dot{x}^2 = \dot{y}^2 + mm\dot{y}^2y^{2m-2}$. Ainfi * $\dot{v} = \dot{y}\sqrt{1+mmy^{2m-2}}$ fera la fluxion de cet arc, laquelle étant comparée avec * $\delta\dot{z}z^{\theta n-1} \times \overline{e+fz^n}^\pi$, donnera $n = 2m - 2$, & $\theta n - 1 = 0$, ou $\theta = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m-2}$, $\theta + \pi = s = \frac{1}{2m-2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2m-2}$, & * $\frac{\theta n + \pi n}{-n} = \frac{m}{2-2m}$. * Art. 249. * Art. 235. * Art. 238.

D'où l'on voit que fi $\theta = \frac{1}{2m-2}$ eft un nombre entier quelconque & pofitif, * la fluente fera toujours exprimée par $\frac{1}{2m-2}$ termes : de même que fi $\frac{m}{2-2m}$ eft un nombre entier quelconque & pofitif, la fluente fera * toujours exprimée par $\frac{m}{2-2m}$. * Art. 236. * Art. 239.

Si $t = \frac{m}{2-2m}$, on aura $m = \frac{2t}{1+2t}$, & $\theta = \frac{1}{2m-2}$ donnera $m = \frac{1+2\theta}{2\theta}$. C'eft pourquoi la valeur de l'expofant m, provenant de la fubftitution d'un nombre entier quelconque & pofitif, au lieu de θ, ou de t, dans l'une de ces dernieres équations, fera telle que la fluente, ou la valeur de l'arc AM, pourra être exprimée par un nombre fini de termes.

Si par exemple $\theta = 1$, on aura $m = \frac{1+2\theta}{2\theta} = \frac{3}{2}$. Ainfi $x = y^{\frac{3}{2}}$ fera l'équation de la feconde parabole cubique, & $\dot{y}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}$ la fluxion de l'arc AM, dont la fluente eft * $\frac{27}{8} \times \overline{1+\frac{9}{4}y}^{\frac{3}{2}}$. Mais lorfque $y = 0$, cet arc eft auffi $= 0$; & comme il refte $+ \frac{27}{8}$ dans la fuppofition de $y = 0$, il faut retrancher ce refte pour avoir la valeur complette $\frac{27}{8} \times \overline{1+\frac{9}{4}y}^{\frac{3}{2}} - \frac{27}{8}$ de cet arc. * II. Reg.

Lorfque $m = 2$, l'équation $x = yy$ fera celle de la parabole ordinaire, dont le parametre eft l'unité ; & $\dot{v} = \dot{y}\sqrt{1+4yy}$ fera la fluxion de l'arc AM ; ou en nommant le parametre $2p$,

$v = \frac{y}{p}\sqrt{pp+yy}$. Ainsi si $z = \sqrt{pp+yy}$, on aura $v = \frac{yz}{p}$: or comme cette fluxion se peut rapporter à la troisiéme expression logarithmique $\frac{xy}{a}$, on aura $\frac{yz}{p} + \frac{p}{2} l \frac{y+z}{p}$ pour la valeur de l'arc AM.

On peut aussi trouver la fluente de $\frac{y}{p}\sqrt{pp+yy}$, en la comparant avec $dz z^{\frac{1}{2}n-1}\sqrt{e+fz^n}$, qui est le cas de la sixiéme Table des fluentes ; lorsque $\theta = 0$, on aura $n = 2$, $f = 1$, $d = \frac{1}{p}$, $e = pp$, $yy = z^n$; ainsi la fluente $\frac{z^n}{n} dP + \frac{e}{n} d \odot$ à côté de zero, deviendra $\frac{yz}{2p} + \frac{1}{2} p \odot$, en supposant $z = \sqrt{pp+yy}$, & $T = \sqrt{\frac{pp+yy}{yy}}$, $R = 1$, $S = \frac{p}{y}$; par conséquent $L = \frac{R+T}{S} = \frac{y+z}{p}$.

Lorsque $y = p$, on aura $z = p\sqrt{2}$, & $\frac{y+z}{p} = 1 + \sqrt{2}$, $= 2,4142135623$, dont le logarithme est $0,3827756852$, qui étant multiplié par $M = 2,3025850929$ donnera $\frac{1}{2} p \odot = p \times 0,4406867939$, auquel ajoutant le nombre $\frac{y}{2p}\sqrt{pp+yy} = p \times 0,7071067811$, on aura $AM = p \times 1,147793575$, &c.

Si $y = 2p$, on trouvera $AM = p \times 1,4789427$, &c.

N. B. La valeur de l'exposant m trouvée par le moyen de l'équation $m = \frac{2t}{1+2t}$, donne les cas où la courbe AM est convexe vers la droite AP ; & celle trouvée par le moyen de l'équation $m = \frac{1+2\theta}{2\theta}$, ceux où elle est concave vers cette droite.

Car puisque le numerateur $2t$ est moindre que le dénominateur $1+2t$, l'exposant m sera moindre que l'unité ; & ainsi la soutangente $= mx$ sera moindre que l'abscisse AP, ce qui ne peut être à moins que la courbe ne soit convexe vers AP. L'autre cas est le contraire de celui-ci.

Lorsqu'on ne peut pas exprimer la valeur de l'arc AM par un nombre fini de termes, ni la réduire à la quadrature des sections coniques, il faudra réduire $\sqrt{1+mmy^{2m-2}}$ en une suite infinie, & trouver sa valeur par approximation.

EXEMPLE III.

253. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc* A M *autour de l'axe* A P.

Comme on a $\dot{v} = \sqrt{1 + mmy^{2m-2}}$ par l'article précédent, on aura * H $\frac{c}{r} y \dot{v} = \frac{c}{r} y \dot{y} \sqrt{1 + mmy^{2m-2}}$, pour la fluxion * *Art.* 248.
de cette surface, laquelle étant comparée avec * $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + fz^{n}}^{\pi}$, donnera $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 2m - 2$, $\theta n - 1 = 1$, où * *Art.* 235.
$\theta = \frac{2}{n} = \frac{1}{m-1}$, $s = \frac{1 + m}{2 - 2m} e$, $\left(\frac{\theta n + \pi n}{-n}\right) = \frac{1 + m}{2 - 2m} = t$, ou $m = \frac{1 + \theta}{\theta}$, & $m = \frac{2t - 1}{2t + 1}$. C'est pourquoi les valeurs de l'exposant m provenant de la substitution des nombres entiers quelconques & positifs, au lieu de θ ou de t, dans ces dernieres égalités, seront toujours telles que la fluente ou valeur de la surface peut être exprimée en un nombre fini de termes.

Si par exemple $\theta = 1$, l'égalité $m = \frac{1 + \theta}{\theta}$ donnera $m = 2$, & la courbe A M sera la parabole ordinaire ; & la fluente de $\frac{c}{r} y \dot{y} \sqrt{1 + 4yy}$ sera par la seconde régle générale $\frac{c}{12r} \times \overline{1 + 4yy}^{\frac{3}{2}}$. Mais lorsque $y = 0$, cette surface est aussi $= 0$; & comme il reste dans ce cas $+ \frac{c}{12r}$, on aura $\frac{c}{12r} \times \overline{1 + 4yy}^{\frac{3}{2}} - \frac{c}{12r}$ pour la fluente, ou valeur complette de la surface.

EXEMPLE IV.

254. *L'on demande la valeur du solide décrit par le segment elliptique, ou hyperbolique* A M P, *autour d'un premier diametre* A P. Fig. 153. 154.

Soit A C $= a$, son conjugué C B $= b$, A P $= x$, & P M $= y$, on aura $\frac{aa}{bb} yy = 2ax \mp xx$ pour l'équation, & * D. * *Art.* 246.
$\frac{c}{2r} yy\dot{x} = \frac{bbc\dot{x}}{2raa} \times \overline{2ax \mp xx}$ pour la fluxion du solide, dont la fluente sera $\frac{bbcx}{2raa} \times \overline{ax \mp \frac{1}{3} xx}$.

Lorsque A P $=$ A C ($x = a$), & $b = r$, on aura $\frac{1}{3} abc$ dans l'ellipse, & $\frac{2}{3} abc$ dans l'hyperbole : d'où l'on voit que si A C, B C sont les axes, le dernier solide sera double du premier.

Puiſque $\frac{cx}{r}$ exprime la circonférence de cercle du rayon A P, $\frac{c}{r}xy$ exprimera la ſurface décrite par P M autour de la tangente
* Art. 247. A T. Ainſi * G. $(\frac{c}{r}yx\dot{x}) = \frac{bcx\dot{x}}{ar}\sqrt{2ax \mp xx}$ ſera la fluxion du ſolide décrit par l'eſpace A M P autour de la tangente A T, parce que $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax \mp xx}$.

Or la fluente de cette fluxion ſera $\pm \frac{ac}{r} \times AMP \mp \frac{bc}{3ar} \times \overline{2ax \mp xx}^{\frac{3}{2}}$.

On trouvera la même fluente par l'article 242.

Lorſque A P = A C ($x = a$), on aura $\frac{ac}{r} \times ACBM - \frac{aabc}{3r}$ dans l'ellipſe. Or la ſuperficie du quart d'ellipſe eſt à celle du quart de cercle dont le rayon eſt A C (a), comme b eſt à a; &
* Art. 230. le quart de cercle étant * $= aa \times 0,78539816$, & $c = 3,141592653$, lorſque $r = 1$; ainſi on aura $aab \times 1,420203549$ pour la valeur du ſolide décrit par le quart d'ellipſe.

EXEMPLE V.

255. *L'on demande la valeur du ſecteur elliptique, ou hyperbolique* C A M, *exprimé en partie de la tangente* A T (z).

Si la ligne C M, prolongée dans l'ellipſe, rencontre la tangente en T, les triangles ſemblables C P M, C A T, donneront $y = \frac{uz}{a}$, dont la fluxion ſera $\dot{y} = \frac{u\dot{z} + z\dot{u}}{a}$. C'eſt pourquoi en
* Art. 246. mettant ces valeurs de y & de $\dot{y}$ dans * D. $\frac{\dot{y}u - y\dot{u}}{2}$, on aura $\frac{uu\dot{z}}{2a}$ pour la fluxion du ſecteur ; ou à cauſe que $\pm \frac{aa}{bb}yy = aa - uu$, égal à $\pm \frac{uu}{bb}zz$, parce que $y = \frac{uz}{a}$; on tirera $uu = \frac{aabb}{bb \pm zz}$, & par conſéquent $\frac{uu\dot{z}}{2a} = \frac{abb\dot{z}}{2bb \pm 2zz}$ ſera la fluxion du ſecteur.

* Art. 228. Or comme $\frac{bb\dot{z}}{bb + zz}$ eſt la fluxion * d'un arc de cercle D, dont
* Art. 232. le rayon eſt b, & la tangente z, il eſt évident que * b D K ſera la fluente de $\frac{bb\dot{z}}{bb + zz}$, & par conſéquent $\frac{1}{2}ab$ D K ſera la valeur du ſecteur elliptique.

Et comme $\frac{b\dot{z}}{bb - zz}$ peut être comparé avec la cinquiéme for-

mule

mule $\frac{a\dot{u}}{xx}$ de la table des expressions logarithmiques, en supposant $a=b$, $u=z$, & $bb-zz=xx$.

Donc la fluente $\frac{1}{2}\,l\,\frac{a+u}{a-u}$ donnera $\frac{1}{2}\,l\,\frac{b+z}{b-z}$ pour celle de $\frac{b\dot{z}}{bb-zz}$; & ainsi, si $L=\frac{1}{2}\,l\,\frac{b+z}{b-z}$, * $\frac{1}{2}ab$ M L sera la valeur du secteur hyperbolique. * Art. 224.

On auroit trouvé la même chose en rapportant la fluxion ci-dessus au cas de la seconde Table, où $\theta=0$.

Si $z=\frac{1}{2}b$, on aura dans l'ellipse $b:\frac{1}{2}b$, comme le rayon est à la tangente $=5000000$ de l'arc D, que l'on trouvera $=26°$, $34'-\frac{352}{3635}=26, 565005$, & comme * $K=0,0174532$, on trouvera $\frac{1}{2}ab$ D K $=ab\times 0,2318394$. * Art. 232.

Dans l'hyperbole $\frac{b+z}{b-z}=3$, dont le logarithme est $0,4771212547$; & comme * $M=2, 302585093$, on aura 2 L M $=1,0986122886$, & $\frac{1}{2}ab$ L M $=ab\times 0,274653072$. * Art. 224.

AUTREMENT.

Si dans l'ellipse on décrit une demi-circonférence a D A avec le rayon C A, & que l'on tire par les extrémités N, M, de l'appliquée P M, les droites C N, C M, rencontrant la tangente en t, T; & par le point T la ligne T Q, parallele à C t, on aura C A : C B :: (P N : P M :: A t : A T ::) A C : A Q. Ainsi A Q $=$ C B. Et si du point A on tire A m perpendiculaire à T Q, on aura (C A, ou C N : P N ::) C B : P M :: A Q : A m. Et comme A Q $=$ C B, on aura aussi P M $=$ A m. Fig. 152. n. 1.

Mais si dans l'hyperbole l'appliquée P M rencontre l'asymptote en N, & que la tangente en A rencontre C M en T & l'asymptote en t, on aura $\overline{At}^2 : \overline{AT}^2 :: \overline{PN}^2 : \overline{PM}^2$, ou $\overline{At}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{At}^2-\overline{AT}^2 : \overline{PN}^2-\overline{PM}^2$, ou * $\overline{At}^2$. * Art. 77.

Or comme la fluxion du triangle C A T est à la fluxion du secteur C A M :: $\overline{CT}^2 : \overline{CM}^2$, comme fig. 152. n. 1. $\overline{Ct}^2 : \overline{CN}^2$, ou $\overline{CA}^2 :: \overline{QT}^2 : \overline{QA}^2$, & comme fig. 152. n. 2. $\overline{At}^2-\overline{AT}^2 : (\overline{PN}^2-\overline{PM}^2$, ou $)\ \overline{At}^2$; donc, puisque la fluxion du triangle A T C est $\frac{a\dot{z}}{2}$, & A $t=$ * b dans l'hyperbole, & A Q $=b$ dans l'ellipse, on aura $bb\mp zz : bb :: \frac{a\dot{z}}{2} : \frac{abb\dot{z}}{2bb\mp 2zz}=$ à la fluxion du secteur Fig. 152. n. 1. Fig. 152. n. 2. * Art. 75.

C A M. T

EXEMPLE VI.

Fig. 153. 154. 256. *L'on demande la valeur de ce secteur exprimée en partie de l'appliquée* PM.

La fluxion de l'équation $\pm\frac{aa}{bb}yy = aa - uu$, sera $\pm\frac{aa}{bb}y\dot{y} = -u\dot{u}$, ou $\pm\frac{aa}{bbu}y\dot{y} = -\dot{u}$; substituant cette valeur dans la fluxion * $\frac{\dot{y}u - y\dot{u}}{2}$ du secteur, elle deviendra $\frac{\dot{y}}{2u} \times \overline{uu \pm \frac{aa}{bb}yy}$, ou à cause que $uu \pm \frac{aa}{bb}yy = aa$, & $u = \frac{a}{b}\sqrt{bb \mp yy}$, cette fluxion deviendra $= \frac{ab\dot{y}}{2\sqrt{bb \mp yy}}$.

* Art. 246.

AUTREMENT.

Fig. 152. n. 1. & 2. La fluxion * $\frac{u\dot{y} \mp y\dot{u}}{2}$ du secteur CAM, est à la fluxion $\frac{1}{2}a\dot{y}$ du triangle CMA :: $u \pm \frac{y\dot{u}}{\dot{y}} : a$ :: * CA : CP, ou comme CN : CP :: AQ : Qm dans l'ellipse, & comme At : PN dans l'hyperbole; & puisque * Q$m = \sqrt{bb - yy}$, & * PN $= \sqrt{bb + yy}$, on aura $\sqrt{bb \mp yy} : b :: \frac{1}{2}a\dot{y} : \frac{ab\dot{y}}{2\sqrt{bb \mp yy}}$ = à la fluxion du secteur.

* Art. 246. * Art. 17. * Art. 255. * Ibid.

Or comme $\frac{b\dot{y}}{\sqrt{bb - yy}}$ est la fluxion d'un arc de cercle D, dont le * rayon est b, & le sinus y, * b DK sera la fluente de $\frac{b\dot{y}}{\sqrt{bb - yy}}$; & par conséquent $\frac{1}{2}ab$ DK sera la valeur du secteur elliptique.

* Art. 233. * Art. 232.

Et puisque $\frac{\dot{y}}{\sqrt{bb + yy}}$ est la fluxion du logarithme L de $\frac{y + \sqrt{bb + yy}}{b}$, par la premiere formule de la table des logarithmes, * $\frac{1}{2}ab$ ML sera la valeur du secteur hyperbolique.

* Art. 224.

Ou si l'on compare la fluxion $\frac{ab\dot{y}}{2\sqrt{bb \mp yy}}$ avec $\frac{d\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e + fz^n}}$, qui est le cas de la cinquiéme Table où $\theta = 0$, on aura $d = \frac{ab}{2}$, $e = bb$, $f = \mp 1$, $n = 2$, $z = y$. Ainsi la fluente $\frac{2d}{nf}$ ⊙ à côté de zero, deviendra $-\frac{ab}{2}$ ⊙ dans l'ellipse, & R (1) : T $\left(\frac{1}{y}\sqrt{bb - yy}\right)$.

$::y:\sqrt{bb-yy}$, comme le cosinus est au sinus, ou à cause que la fluente est négative, comme le sinus est au cosinus, & comme $R=1$, $\dot{\odot}=KD$, la fluente $-\frac{ab}{2}\dot{\odot}$ deviendra $\frac{1}{2}abKD$.

Mais dans l'hyperbole, on a $\frac{1}{2}ab\odot$, & $S:R+T::\frac{b}{y}:1+\frac{1}{y}\sqrt{bb+yy}::b:y+\sqrt{bb+yy}$, ou $\frac{R+T}{S}=\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}$.

Si $y=b\sqrt{\frac{3}{4}}$, il est évident que l'arc D sera de 60°, ou le tiers de 180° égale 1, 04719755; donc $ab\times 0,52359877$ sera la valeur du secteur elliptique.

Or comme $\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{7}=2,1889010597$, dont le logarithme est 0, 3402261315, qui étant multiplié par * $\frac{1}{2}M=1,1512925465$, donnera $ab\times 0,3916998093$ pour la valeur du secteur hyperbolique. * Art. 224.

COROLLAIRE.

De là il suit qu'on aura $CQM+\frac{1}{2}abLM=CAMQ$, & $CPM-\frac{1}{2}abLM$ dans l'hyperbole, & $CQM+\frac{1}{2}abDK=CAMQ$, & $\frac{1}{2}abDK-CMP$ dans l'ellipse. Fig. 153. 154.

EXEMPLE VII.

258. *Soit* AME *la cissoïde ordinaire, dont la propriété est que toute perpendiculaire* PM *sur l'axe* AB *est toujours une troisiéme proportionnelle à l'appliquée* PN *de son cercle générateur* ANB, *& de l'abscisse* AP *correspondante, c'est-à-dire on a toujours* $\div$ PN : PA : PM. *L'on demande la valeur de l'espace* AMP. Fig. 155.

Si $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, on aura $PN=\sqrt{ax-xx}$, & $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$ pour l'équation. Ainsi $y\dot{x}=\frac{xx\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$ sera la fluxion de cet espace. Or comme $\dot{x}\sqrt{ax-xx}$ est la fluxion de l'espace circulaire ANP, on trouvera par la formule générale de l'article 235, ou par l'article 242, ou bien par la troisiéme Table des fluentes dans le cas où $\theta=2$, que $3ANP-2x\sqrt{ax-xx}$ est la valeur cherchée.

Il y a à remarquer qu'il faut changer la fluxion $\frac{xx\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$ en celle-

qi $\frac{\dot{x} x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ax - xx}}$ en divisant le numérateur & le dénominateur par $x^{\frac{1}{2}}$, pour pouvoir la réduire aux formules des articles mentionnés.

Lorsque A P = A B ($x = a$), on aura $2x\sqrt{ax - xx} = 0$; & par conséquent l'espace entier A M E F B, infiniment prolongé vers E F, sera triple du demi-cercle générateur A N B.

EXEMPLE VIII.

259. *L'on demande la valeur du solide décrit par l'espace* A M P *autour de l'axe* A P.

* Art. 247. Si $2r = a$, on aura * $E\left(\frac{c}{2r} yy\dot{x}\right) = \frac{c\dot{x}x^3}{aa - ax} = \frac{aac\dot{x}}{a - x} - \frac{cxx\dot{x}}{a} - cx\dot{x} - ac\dot{x}$ pour la fluxion de ce solide; c'est pourquoi si L =
* Art. 224. log. $\frac{a}{a - x}$, on aura * aac L M $- \frac{cx^3}{3a} - \frac{1}{2}cxx - acx$ pour la valeur cherchée.

* Art. 224. Si $x = \frac{a}{2}$, on aura L = 0, 3010299957, & comme * M = 2, 302585092[9]9, $aac \times 0, 6931471805 - \frac{2}{3}aac$, ou $aac \times 0, 0794415415$, sera la valeur du solide. Lorsque $x = a$, la valeur de ce solide sera infinie.

EXEMPLE IX.

260. *L'on demande la valeur du solide décrit par l'espace* P M E F B *autour de l'asymptote* B F.

Comme $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{x}{a - x}\sqrt{ax - xx}$, on aura $\left(\frac{c}{r}\right.$ B P $\times$ P M$\left.\right) = \frac{cx}{r}\sqrt{ax - xx}$ pour la surface décrite par P M, & $\frac{c}{r} x\dot{x}\sqrt{ax - xx}$ pour la fluxion du solide.

Or comme $\dot{x}\sqrt{ax - xx}$, ou $\dot{x}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{a - x}$ est la fluxion de l'espace circulaire A N P, laquelle étant comparée avec la formule $\delta \dot{z} z^{\theta n - 1} \times \overline{e + fz^n}^{\pi}$ de l'article 242, donnera $\pi = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $f = -1$, $e = a$, $z = x$, $\theta n - 1 = \frac{1}{2}$, ou $\theta = \frac{3}{2}$, & $\theta + \pi + 1 = s = 3$; & la fluente $\frac{\delta z^{\theta n}}{nsf} P^{\pi + 1} - \frac{e\delta\theta}{sf}$ F deviendra $G = \frac{ac}{2r}$ A N P $- \frac{c}{3r} \times \overline{ax - xx}^{\frac{3}{2}}$, parce que F = A N P, & $\delta = \frac{c}{r}$.

Si l'on suppose que le cercle générateur tourne autour d'une ligne qui passe par le point A, & qui soit perpendiculaire à B A, on aura $\frac{c}{r}$ A P × P N pour la surface cylindrique décrite par P N, & $\frac{c}{r} x \dot{x} \sqrt{ax - xx}$ pour la fluxion du solide. Par conséquent ce solide est égal à celui ci-dessus.

Lorsque A P = A B ($x = a$), l'un & l'autre de ces solides sera $= \frac{ac}{2r}$ A N B, ou $= \frac{1}{4} acc$, en supposant $a = 2r$.

EXEMPLE X.

261. *L'on demande la valeur de l'espace* P F A M *de la logarithmique infiniment prolongée vers* F A. Fig. 152. n. 3.

On a trouvé * $a\dot{y} = y\dot{x}$ pour l'équation de cette courbe ; * Art. 201. ainsi $y\dot{x}$, ou son égal $a\dot{y}$ sera la fluxion de cet espace, & $ay =$ T P × P M sera la valeur demandée.

Si l'on tire Q N perpendiculaire à l'asymptote F Q, on aura T P × $\overline{QN - PM}$, pour la valeur de l'espace N Q P M.

Si $r = a =$ T P, on aura * E. $\frac{c}{2r} yy\dot{x} =) \frac{c}{2} y\dot{y}$ pour la fluxion du solide décrit par l'espace P F A M autour de l'asymptote F Q, & $\frac{c}{4} yy = \frac{c}{4} \overline{PM}^2$ pour sa valeur. * Art. 247.

Par conséquent $\frac{c}{4} \overline{QN}^2 - \frac{c}{4} \overline{PM}^2$, sera la valeur du solide décrit par l'espace N Q P M.

Si la tangente M T $= z$, on aura $\frac{z\dot{y}}{y} =$ à la fluxion de l'arc M A, dont la fluente par le septiéme cas de la table des expressions logarithmiques, sera $z + a\, l \frac{z - a}{y}$.

EXEMPLE XI.

262. *L'on demande la longueur de l'arc* P V M *de la spirale d'Archimede.* Fig. 152. n. 4.

Si l'on nomme $\dot{x}$ la vîtesse circulaire du point M à l'égard du rayon P M, & P M $= y$, on aura $a\dot{x} = y\dot{y}$ pour l'équation, & la superpendiculaire P K $= a = * \frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$. Or si K M $= z$, l'arc cherché v, on aura $\dot{v} = \frac{z\dot{y}}{a}$, dont la fluente par le troisiéme * Art. 203.

cas de la table des expressions logarithmiques sera $v = \frac{yz}{2a} + \frac{a}{2} l \frac{y+z}{a}$.

Fig. 152. n. 5. * Art. 204. Si PVM est la spirale réciproque, la soutangente PT (a) * est constante ; c'est pourquoi si la tangente $TM = z$, on aura $\dot{v} = \frac{\dot{z}y}{y}$, dont la fluente par le septiéme cas de la même table sera $u = z + a\, l \frac{z-a}{y}$.

Fig. 152. n. 6. * Art. 21. Dans la parabole ordinaire, on a $PK = {}^*p$; & si $KM = z$, on aura $\dot{v} = \frac{\dot{z}y}{p}$, dont la fluente sera $\frac{yz}{2p} + \frac{1}{2} p\, l \frac{y+z}{p}$, par le troisiéme cas.

EXEMPLE XII.

Fig. 156. 263. *Soit le cylindre droit* LAa, *coupé par un plan* BDNb *obliquement à sa base, & passant par le centre* C *du cercle* BAba, *l'on demande la valeur de l'onglet* BADNb.

Il est évident que les sections communes de la surface de ce solide & des plans CAD, PMN perpendiculaires à la base, & dont les sections CA, PM, avec cette base, soient perpendiculaires sur le diametre Bb, formeront des triangles rectangles NMP, DAC, qui sont semblables. Cela posé, si CB = CA = a, bP = x, PM = y, & la hauteur du solide AD = b, on aura par la propriété du cercle $y = \sqrt{2ax - xx}$, & par les triangles semblables, CA : AD :: PM : MN $= \frac{by}{a} = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - xx}$. Ainsi $\frac{1}{2}\dot{x}$PM×MN $= bx\dot{x} - \frac{b}{2a}xx\dot{x}$ sera la fluxion de la partie bNMP du solide ; & la fluente $\frac{1}{2}bxx - \frac{b}{6a}x^3$ sa valeur ; & lorsque $x = 2a$, on aura $\frac{2}{3}aab$ pour celle de l'onglet.

EXEMPLE XIII.

264. *L'on demande la valeur de la surface convexe de l'onglet.*

Il est évident que le produit $b\dot{x}$ de MN $\left(\frac{by}{a}\right)$ multiplié par la fluxion * $\frac{a\dot{x}}{y}$ de l'arc bM, sera la fluxion de cette surface. Ainsi bx sera la valeur de la partie bNMb ; par conséquent $2ab$ = 2CB×AD, sera celle de la surface entiere.

* Art. 234.

EXEMPLE XIV.

265. *L'on demande la valeur de l'arc elliptique* BM, *terminé par le second axe* CB, *& par une appliquée quelconque* PM *au premier* CA. *Fig.* 153.

En supposant AC $= 1$, on aura * $yy = bb \times \overline{1-uu}$, ou $y = b\sqrt{1-uu}$ pour l'équation, dont la fluxion $\dot{y} = \frac{-bu\dot{u}}{\sqrt{1-uu}}$, donnera $\dot{y}^2 + \dot{u}^2 = \dot{u}^2 + \frac{bbuu\dot{u}^2}{1-uu} = \dot{u}^2 \times \frac{1-uu+bbuu}{1-uu}$, ou, en faisant $1-bb = dd$, $\dot{v} = \dot{u}\sqrt{\frac{1-dduu}{1-uu}}$, pour la fluxion de cet arc. * *Art.* 12.

En réduisant $\sqrt{1-dduu}$ en une suite infinie *, cette fluxion deviendra $\dot{v} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{1-uu}} \times$ par $1 - \frac{1}{2}dduu - \frac{1}{2.4}d^4u^4 - \frac{1.3}{2.4.6}d^6u^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}d^8u^8 -$ &c. * *Art.* 225.

Or si l'on considére $\dot{z}z^{\theta n-1} \times \overline{e+fz^n}^{\pi}$, comme exprimant un des termes quelconques de cette fluxion, excepté son coefficient, on aura $e = 1$, $-f = 1$, $n = 2$, $z = u$, $\pi = -\frac{1}{2}$; & la fluente * $G = \frac{z^{\theta n}}{nsf}P^{\pi+1} - \frac{e\theta}{sf}F$, qui sera ici $G = \frac{\theta}{s}F - \frac{u^{2\theta}}{2s}P$, (en supposant $P = \sqrt{1-uu}$) exprimera la relation entre les fluentes de deux termes successifs quelconques. s est * $= (\theta+\pi+1) = \theta + \frac{1}{2}$, F la fluente de l'antécédent, & G celle du conséquent. Donc si A est la fluente du premier terme $\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-uu}}$, c'est-à-dire si A exprime un arc de cercle dont le rayon est AC (1) & le sinus CP (u), & B, C, D, E, F, &c. les fluentes des termes suivans. En mettant au lieu de θ les nombres $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c. au lieu de s; les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. au lieu de G; les lettres B, C, D, E, F, &c. & au lieu de F, les lettres A, B, C, D, E, &c. on trouvera * *Art.* 242. * *Art.* 242.

$B = \frac{1}{2}A - \frac{u}{2}P.$	$a = \frac{1}{2}dd.$
$C = \frac{3}{4}B - \frac{u^3}{4}P.$	$b = \frac{1}{4}add.$
$D = \frac{5}{6}C - \frac{u^5}{6}P.$	$c = \frac{3}{6}bdd.$
$E = \frac{7}{8}D - \frac{u^7}{8}P.$	$f = \frac{5}{8}cdd.$
$F = \frac{9}{10}E - \frac{u^{10}}{10}P.$ &c.	$g = \frac{7}{10}fdd.$ &c.

Et par conséquent $A - aB - bC - cD - fE - gF -$ &c. sera la valeur cherchée de l'arc BM.

Lorsque $CP = CA$ ($u = 1$), on aura $P = \sqrt{1-uu} = 0$, & par conséquent $A \times$ par $1 - \frac{dd}{1.2} - \frac{3d^4}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5 d^6}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7 d^8}{2.2.4.4.6.6.8.8} -$ &c. sera la valeur du quart d'ellipse, & A sera $= 1,57079632$, &c. c'est-à-dire un quart de cercle dont le rayon est l'unité.

EXEMPLE XV.

Fig. 154. 266. *L'on demande la valeur de l'arc* $\overline{hyperbolique}$ AM.

* Art. 12. Si $AC = 1$, on aura * $yy = bb \times \overline{uu-1}$ pour l'équation. En supposant $1 + bb = dd$, on trouvera de la même maniere que dans l'ellipse, que $\dot{v} = \dot{u}\sqrt{\frac{dduu-1}{uu-1}}$, & en réduisant

* Art. 215. $\sqrt{dduu-1}$ en une suite * infinie, on trouvera $\dot{v} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{uu-1}}$ $\times$ par $du - \frac{1}{2du} - \frac{1.1}{2.4d^3u^3} - \frac{1.3}{2.4.6d^5u^5} -$ &c. En supposant que A exprime la fluente du premier terme $\frac{u\dot{u}}{\sqrt{uu-1}}$, c'est-à-dire $A = \sqrt{uu-1}$, & B celle du second, ou un arc de cercle dont

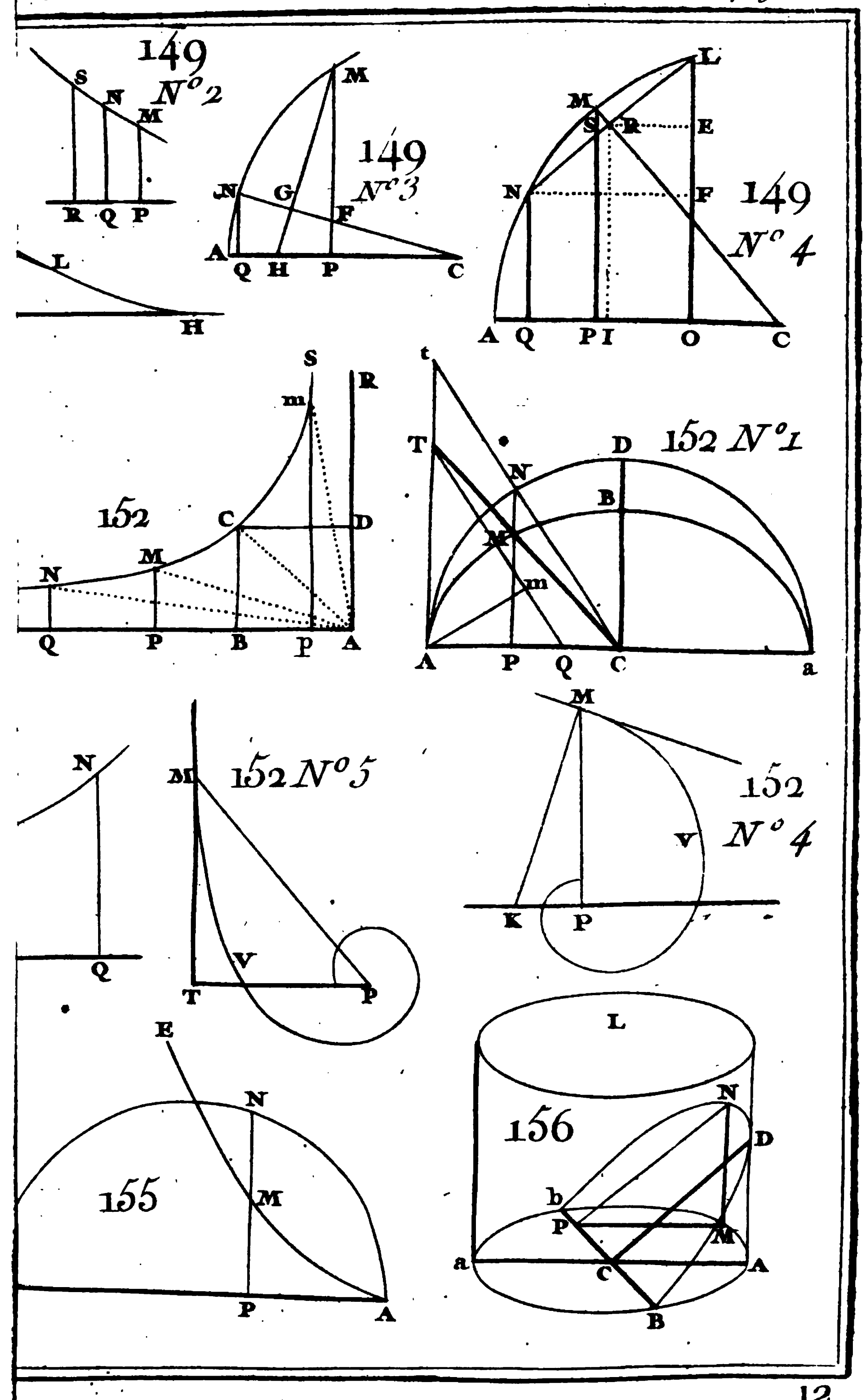
* Tab. III. le rayon est CA (1), & la tangente * $= \sqrt{uu-1}$, on aura

$A = \sqrt{uu-1}$.	$a = \frac{1}{2d}$.
$C = \frac{1}{2}B + \frac{u^{-2}}{2}A$.	$b = \frac{a}{4dd}$.
$D = \frac{3}{4}C + \frac{u^{-4}}{4}A$.	$c = \frac{b}{6dd}$.
$E = \frac{5}{6}D + \frac{u^{-6}}{6}A$.	$f = \frac{c}{8dd}$.
$F = \frac{7}{8}E + \frac{u^{-8}}{8}A$.	$g = \frac{f}{10dd}$.

& $dA - aB - bC - fE - gF -$ &c. pour la valeur cherchée de l'arc AM.

Car si l'on suppose que $\dot{z}z^{\theta n-1} \times \overline{e+fz^n}^{\pi}$ exprime un terme quelconque de la fluxion, on aura $e = -1$, $f = 1$, $n = 2$,

* Art. 242. $\pi = -\frac{1}{2}$, $(\theta + \pi + 1) = s = \theta + \frac{1}{2}$; & la fluente * $G = \frac{z^{\theta n}}{nsf}P^{\pi+1} - \frac{e\theta}{sf}F$, qui sera ici $F = \frac{s}{\theta}G - \frac{u^{2\theta}}{2\theta}A$, exprimera la relation


149 N°2
S N M
R Q P
L
H
M
149 N°3
N G
F
A Q H P C
L
M
S R E
N F
149 N°4
A Q P I O C
S
R
m
152
C D
N M
Q P B p A
t
T
152 N°1
D
N
B
M
m
A P Q C a
M
152
V
N°4
K P
N
Q
152 N°5
M
V
T P
E
N
155
M
P A
L
156
N
D
b
P
M
a A
C
B

lation entre les fluentes de deux termes successifs quelconques, le premier excepté ; G l'antecedent, & F son conséquent. Donc si l'on met au lieu de θ les nombres -1, -2, -3, -4, -5, &c. & au lieu de s les nombres $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{9}{2}$, &c. on aura la fluente comme l'on voit ci-dessus.

EXEMPLE XVI.

267. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc elliptique* B M *autour de l'axe* A a. Fig. 158. 159.

Comme on a * $y = b\sqrt{1 - uu}$, & $\dot{v} = \dot{u}\sqrt{\frac{1 - dduu}{1 - uu}}$; si $b = r$, on aura * H. $(\frac{c}{r} y \dot{v}) = c\dot{u}\sqrt{1 - dduu}$ pour la fluxion de cette surface. Or si l'on prend dans le demi-axe C B la partie C D = C A, & que l'on décrive avec le demi-diametre C D, & du centre C la demi-circonférence de cercle A D a, figure 158. lorsque A a est le premier axe, ou une hyperbole équilatere N D n, figure 159. lorsque A a est le second ; & si après avoir fait C Q = du, l'on tire l'appliquée Q N, on aura $\frac{c}{d} \times$ C Q N D pour la valeur cherchée. * Art. 264. * Ibid.

Car lorsque A a est le premier axe * $(1 - bb) = dd$ sera positif, ainsi $\dot{u}\, d\sqrt{1 - dduu}$ sera la fluxion de l'espace circulaire C Q N D, figure 158. * Art. 6.

Mais lorsque A a est le second axe $(1 - bb) = dd$ sera négatif, & par conséquent $\dot{u} d\sqrt{1 + dduu}$ sera la fluxion de l'espace hyperbolique C Q N D, figure 159.

Lorsque A a est le premier axe, & que $u = 1 =$ A C, on aura C Q = d, c'est-à-dire que le point Q tombe alors au foyer.

Si D exprime l'arc de cercle D N en degrés, on aura * $\frac{cu}{2}\sqrt{1 - dduu} + \frac{c}{2d}$ K D, pour la fluente de $c\dot{u}\sqrt{1 - dduu}$, & si L est le logarithme de $du + \sqrt{1 + dduu}$, $\frac{cu}{2}\sqrt{1 + dduu} + \frac{c}{2d}$ L M * sera celle de $c\dot{u}\sqrt{1 + dduu}$. * Art. 232. * Art. 224.

EXEMPLE XVII.

268. *L'on demande la valeur de la surface décrite par la demi-ellipse* a B A, *autour de la tangente* A T. Fig. 157.

Soit A P = L M = x, A C = a, on aura A p = L m =

$2a - x$; & si $r = a$, $\frac{cx}{a}$ sera la circonférence du rayon L M, & $2c - \frac{cx}{a}$ celle du rayon L m, dont la somme $(\frac{cx}{a} + 2c - \frac{cx}{a})$ $2c$ étant multipliée par la fluxion $\dot{v}$ de l'arc A M, donnera $2c\dot{v}$ pour la fluxion des parties de cette surface décrite par les arcs am, A M. Ainsi $2cv$ sera leur valeur, qui deviendra $2c \times$ par l'arc A M B, lorsque $x = a$.

EXEMPLE XVIII.

Fig. 160. 269. *L'on demande la valeur de la surface décrite par l'arc hyperbolique* A M *autour de l'un des axes.*

* Art. 248. Si $r = b$, on aura * H. $(\frac{c}{r} y \dot{v}) = c\dot{u}\sqrt{dduu \mp 1}$ pour la fluxion de cette surface, parce que $y = b\sqrt{uu \mp 1}$. C'est pourquoi si l'on prend dans l'axe de révolution C Q $= du$, & que l'on tire l'appliquée Q N, on aura $\frac{c}{d}$ A N Q, ou $\frac{c}{d}$ C A N Q pour la valeur demandée. Car $d\dot{u}\sqrt{dduu \mp 1}$ est la fluxion de l'espace A N Q lorsque c'est -1, & de l'espace C A N Q lorsque c'est $+1$.

Lorsque l'arc A M tourne autour du premier axe A C, la surface devient zero lorsque $u = 1$, (C P $=$ C A). Or comme on a alors C Q $= du = d$, le point Q tombera au foyer F. C'est pourquoi il faut retrancher l'espace A E F pour avoir $\frac{c}{d}$ F E N Q pour la valeur complette de cette surface.

Si L est le logarithme de $\frac{du + \sqrt{dduu \mp 1}}{d + \sqrt{dd \mp 1}}$, on aura $\frac{cu}{2}\sqrt{dduu \mp 1}$ $\mp \frac{c}{2d}$ M L pour la valeur demandée. Lorsque l'hyperbole est équilatere, on aura $1 + bb = dd = 2$, & si $u = 2$, on aura

* Art. 224. $\sqrt{dduu - 1} = \sqrt{3} = 1,7320508756887$; & comme * M $=$ 2, 302585092299, & $2d = 2\sqrt{2} = 2$, 828427093; L $= 0$, 758310031 2; & L M $= 1$, 74607337 37. Ainsi ces valeurs étant substituées, donneront $\frac{cu}{2}\sqrt{dduu - 1} - \frac{c}{2d}$ L M $= c \times 1$, 1147206399 pour la valeur demandée.

SECTION III.

DES CENTRES DE GRAVITE'.

DEFINITIONS.

1. SI un corps étoit soutenu, ou suspendu par un point, tel que ce corps demeurât toujours en repos, de quelque maniere que ses autres parties fussent situées à l'égard du centre de la terre ; ce point est nommé le *centre* de *pesanteur*, ou de *gravité* de ce corps.

2. Toute ligne horizontale qui passe par le centre de gravité d'un corps, est appellée *axe d'équilibre*.

3. La tendance, ou la force relative d'un corps vers la terre, eu égard à la distance de sa direction à l'axe de l'équilibre, est nommée le *moment* de ce corps.

DEMANDES.

I. Qu'on puisse prendre la gravité des corps comme constante dans une distance assez petite d'un même point de la surface de la terre.

II. Que les lignes ou directions dans lesquelles la gravité tend vers la terre, puissent être considérées comme paralleles entr'elles lorsqu'elles ne sont éloignées l'une de l'autre que d'une distance assez petite.

N. B. Comme la pesanteur des corps de la même densité est toujours proportionnelle à leurs masses ou volumes ; & comme nous ne considérons que de tels corps dans ce qui suit, on prendra leurs masses au lieu de leurs pesanteurs.

Quoique les surfaces & lignes n'aient point de pesanteur, néanmoins comme leurs centres de gravité imaginaires sont d'une grande utilité, on considérera leur étendue comme des poids qui leur sont proportionnels de la même maniere que dans les solides.

THEORÉME I.

Fig. 161.

270. *Si plusieurs corps* P, Q, R, S, &c. *sont attachés à une ligne* A P, *infléxible & sans pesanteur, & que cette ligne soit soutenue ou suspendue par un point* G, *tel que la* somme *des produits, des masses, chacune multipliée par la distance de son point de suspension au point* G, *d'un côté soit égale à la* somme *des produits pareils de l'autre, ces corps seront en équilibre, sçavoir si* $P \times AG + Q \times BG = R \times GE + S \times GF$.

Il est évident que la force du corps P, à faire tourner la ligne A F autour du point G, augmente en proportion qu'il est attaché plus ou moins éloigné du point G, & cette force augmente aussi en proportion de sa pesanteur.

Donc la force absolue de ce corps, eu égard au point G, est comme $P \times AG$. Mais ce que nous venons de dire à l'égard du corps P, convient également à tout autre; il s'ensuit que la somme $P \times AG + Q \times BG$, exprime la force totale des corps P, Q, pour faire tourner la ligne A F d'un côté, & $R \times GE + S \times GF$, celle des corps R, S, pour la faire tourner de l'autre; & par conséquent ces forces étant égales, ces corps demeureront en équilibre.

COROLLAIRE.

271. De là il suit qu'il est clair que le point G est le centre de gravité commun des corps P, Q, R, S, &c. & que le moment d'un corps est égal au produit de sa masse multipliée par la distance de sa direction au point d'appui.

THEOREME II.

Fig. 162.

272. *Si plusieurs corps* P, Q, R, S, &c. *sont fixés ensemble dans différens plans, la* somme *de tous les produits de chaque corps, multipliée par sa distance respective à un plan donné de position, sera égale à la* somme *de tous ces corps, multipliée par la distance de leur centre commun de gravité* G *à ce plan, s'ils sont tous placés du même côté, ou la* différence *de ces produits de ceux placés d'un côté à ceux de l'autre.*

Par le centre de gravité G, qu'on fasse passer un plan horizontal dans lequel soit tirée la ligne G*g*, ou G*d* parallele à l'intersection D T, ou D F de ce plan, & du plan *d*T, ou D F

donné de position ; de même des points P, Q, R, S, &c. où les directions des corps, prolongés s'il le faut, rencontrent le plan horizontal, soient tirées les lignes PA, QB, RE, SF, &c. paralleles à DT, coupant DF en A, B, E, F, & dG en a, b, e, f. Cela posé, si l'on considere la ligne Gg comme un axe d'équilibre, on aura * $P \times aG + Q \times bG = R \times eG + S \times fG$; ou à cause que $aG = Dg - DA$, $bG = Dg - DB$, $eG = DE - Dg$, $fG = DF - Dg$, ces valeurs étant substituées, donnent $P \times DA + Q \times DB + R \times DE + S \times DF = Dg \times \overline{P + Q + R + S}$, après avoir mis tous les produits où Dg entre dans un membre, & les autres dans l'autre. * Art. 270.

Si à présent l'on considére la ligne Gd comme un axe d'équilibre, on aura $P \times Pa + R \times Re = Q \times Qb + S \times Sf$; ou à cause que $Pa = PA + Gg$, $Re = RE + Gg$, $Qb = QB - Gg$, $Sf = SF - Gg$, la substitution de ces valeurs changera l'égalité en celle-ci $- P \times PA + Q \times QB - R \times RE + S \times SF = Gg \times \overline{P + Q + R + S}$, après la transposition des termes.

Il est clair que ce que nous venons de prouver à l'égard de quatre corps, conviendra aussi à tout autre nombre quelconque, même infini : donc si M exprime la somme des momens, S la somme des corps, & D la distance du centre de gravité à un plan donné de position, on aura $M = DS$, ou $D = \frac{M}{S}$. D'où l'on tire la régle suivante.

Régle générale pour trouver la distance du centre de gravité d'un corps à un plan donné de position.

EXEMPLE I.

273. *Trouver la distance du centre de gravité d'un triangle* ABC, *à la ligne* TAT *parallele à sa base* BC. Fig. 183.

Si la ligne AE divise les paralleles MN, BC, par le milieu en P & E, on aura $AE(a) : BC(b) :: AP(x) : MN = \frac{bx}{a}$. Ainsi $\frac{bx\dot{x}}{a}$ sera la fluxion des poids, & $\frac{bx\dot{x}}{a} \times x$ celle des momens, dont la fluente $\frac{bx^3}{3a}$ divisée par la somme des poids $\frac{bxx}{2a}$, donnera $\frac{2}{3}x$; par conséquent lorsque $x = a$, on aura $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$ AE pour la distance cherchée.

Puisque la ligne A E divise toutes les paralleles M N, C B par le milieu, il est clair que le centre de gravité sera dans cette ligne; par conséquent si A G $= \frac{2}{3}$ A E, le point G sera le centre de gravité du triangle A B C.

COROLLAIRE.

Fig. 164. 274. Soit le quadrilatere A B C D divisé en deux triangles, dont les centres de gravité soient E, F. Si l'on prend le point G dans la ligne E F, tel que l'aire du quadrilatere soit à celle d'un des triangles comme A B D, comme la ligne E F est à G F, le point G sera le centre de gravité du quadrilatere. Car si l'on considere les aires des triangles comme des poids suspendus aux points E, F, on aura A B D : B C D :: G F : G E; & en composant, A B C D : A B D :: E F : G F.

EXEMPLE II.

Fig. 165. 275. *L'on demande la distance du centre de gravité de la demi-parabole* B A E *à la tangente* T A T, *& dont l'équation est* $x = y^m$.

La fluxion $\dot{x} = m\dot{y}y^{m-1}$ de l'équation $x = y^m$ étant multipliée par y, donne $y\dot{x} = m\dot{y}y^m$ pour la fluxion des poids, & $yx\dot{x} = m\dot{y}y^{2m}$ pour celle des momens, dont la fluente $\frac{m}{1+2m}y^{2m+1}$ divisée par la somme des poids $\frac{m}{1+m}y^{m+1}$, donne $\left(\frac{1+m}{1+2m}y^m\right) = \frac{1+m}{1+2m}x$ pour la distance demandée, en supposant $x =$ A E.

Si l'on considere le poids $y\dot{x}$ appliqué au milieu de P M, on aura $(\frac{1}{2}y \times y\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{y}y^{m+1}$ pour la fluxion des momens à l'égard de l'axe de balancement A E; donc la fluente $\frac{m}{4+2m}$ y^{m+2} divisée par la somme des poids $\frac{m}{1+m}y^{m+1}$, donnera $\frac{1+m}{4+2m}$ y pour la distance du centre de gravité à l'axe A E.

Ainsi si l'on prend A P $= \frac{1+m}{1+2m}$ A E, & la perpendiculaire P G $= \frac{1+m}{4+2m}$ E B, le point G sera le centre de gravité de la demi-parabole, & le point P celui de la parabole entiere.

COROLLAIRE.

276. Si l'exposant m est négatif, l'équation $x = y^{-m}$ sera celle de toutes les hyperboles à l'infini : à l'égard des asymptotes AR, AT, & $\frac{1-2m}{1-m}x$, $\frac{1-m}{4-2m}y$ seront alors les valeurs des distances du centre de gravité ; la premiere, de l'espace ARSMP à l'asymptote AR ; & la seconde, de l'espace PMVT à l'asymptote AT. Car lorsque PM (y) augmente, cette distance augmente aussi, ce qui ne pourroit être à moins que ce ne soit celle de l'espace PMVT. Fig. 151.

Lorsque $m = 1$, comme dans l'hyperbole ordinaire, l'une & l'autre de ces valeurs deviennent égales à zero ; mais lorsque $2 = m$, $1 = 2m$, l'une & l'autre deviennent infinies, ce qui fait voir qu'on ne peut avoir les distances demandées dans ces cas.

On peut néanmoins avoir la distance du centre de gravité de quelques parties de ces espaces ; comme par exemple, si AB $= 1$, BP $= x$, on aura $\frac{\dot{x}}{1+x}$ pour la fluxion des poids dans l'hyperbole ordinaire, & $\frac{\dot{x}}{1+x} \times \overline{1+x}$, ou $\dot{x}$ pour la fluxion des momens à l'égard de l'axe AR. Par conséquent si z est la fluente de $\frac{\dot{x}}{1+x}$, ou la valeur de l'espace BCMP, on aura $\frac{x}{z}$ pour la distance demandée ; mais lorsque $x = z = 0$, cette distance doit être $=$ AB $= 1$; donc $1 + \frac{x}{z}$ est cette distance.

EXEMPLE III.

277. *L'on demande la distance du centre de gravité du solide décrit par l'espace* AEB *autour de* AE, *au sommet* A. Fig. 165.

On aura * $\frac{mc}{2r}\dot{y}y^{m+1}$ pour la fluxion des poids, & $\frac{mc}{2r}\dot{y}y^{2m+1}$ pour celle des momens, parce que $x = y^m$, dont la fluente $\frac{m}{2+2m} \times \frac{c}{2r}y^{2m+2}$ divisée par la somme des poids $\frac{m}{2+m} \times \frac{c}{2r}$ y^{m+2}, donnera $\frac{2+m}{2+2m}x$ pour la distance cherchée. * Art. 250. n. 2.

Lorsque $m = -1$, comme dans l'hyperbole ordinaire, cette distance devient infinie, au lieu d'être $= 0$, ce qui est une contradiction, à moins que cette distance ne soit prise de l'extrémité T de l'asymptote AT.

EXEMPLE IV.

Fig. 166.

278. *L'on demande la distance du centre de gravité d'un arc de cercle* MAM *à la ligne* TCT, *qui passe par le centre* C, *& qui est parallele à la corde* MM.

Il est évident que ce centre est dans quelques points du rayon CA qui divise cet arc en deux également ; c'est pourquoi si la parallele mm à MM rencontre le rayon CA en p, & l'arc en m, m; & si CA $= a$, C$p = x$, $pm = y$, l'arc A$m = z$, on aura $2\dot{z}$ pour la fluxion des poids, & $2\dot{z} \times x$ pour celle des momens : or par la nature du cercle * $\dot{z} = \frac{a\dot{y}}{x}$, ou $2x\dot{z} = 2a\dot{y}$; par conséquent $2ay$ divisé par $2z$, donnera $\frac{ay}{z}$ pour la distance cherchée, en supposant $y =$ PM, & $z =$ AM.

* Art. 242.

COROLLAIRE.

279. De là il suit que l'arc MAN est à sa corde MM, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de cet arc au centre C. Par conséquent la demi-circonférence est au diametre, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de la demi-circonférence au centre C.

EXEMPLE V.

280. *L'on demande la distance du centre de gravité du secteur* CMAM *au centre* C.

Du centre C avec un rayon à volonté, soit décrit l'arc de cercle NBN, & soit tirée la corde NN, coupant le rayon AC en Q : cela posé, si CN $=$ CB $= x$, CA $= a$, MM $= b$, l'arc MAM $= c$, on aura la corde NN $= \frac{bx}{a}$, & l'arc NBN $= \frac{cx}{a}$: de même * $\left(\frac{\text{CN} \times \text{NN}}{\text{NBN}}\right) = \frac{bx}{c}$ pour la distance du centre de gravité de l'arc NBN. Ainsi l'arc NBN $\frac{cx}{a}$ multiplié par la fluxion $\dot{x}$ de CB donnera $\frac{cx\dot{x}}{a}$ pour la fluxion des poids ; & comme la somme des poids multipliée par la distance de leur centre commun de gravité, est égale * à la somme des momens, on aura $\frac{bx}{c} \times \frac{cx\dot{x}}{a}$, ou $\frac{bxx\dot{x}}{a}$ pour la fluxion des momens, dont la fluente

* Art. 278.

* Art. 272.

fluente $\frac{bx^3}{3a}$, divisée par la somme des poids $\frac{cxx}{2a}$, donnera $\frac{2bx}{3c}$, & lorsque $x = a$, $\frac{2ab}{3c}$ pour la distance cherchée.

COROLLAIRE.

281. De là il suit que l'arc MAM est à sa corde MM, comme $\frac{2}{3}$ AC est à la distance du centre de gravité du secteur CMAM au centre C ; & la demi-circonférence est au diametre, comme $\frac{2}{3}$ AC est à la distance du centre de gravité du demi-cercle au centre C.

EXEMPLE VI.

282. *L'on demande la distance du centre de gravité d'un espace elliptique ou hyperbolique* CAMQ *au premier axe* AC. Fig. 153. 154.

Puisque * $\pm \frac{aa}{bb} yy = aa - uu$, on aura $u = \frac{a}{b} \sqrt{bb \mp yy}$; * Art. 12.
& $(u\dot{y}) = \frac{a\dot{y}}{b} \sqrt{bb \mp yy}$ pour la fluxion des poids, & (CQ $\times u\dot{y}) = \frac{ay\dot{y}}{b} \sqrt{bb \mp yy}$ pour celle des momens, dont la fluente complette sera $\mp \frac{a}{3b} \times \overline{bb \mp yy}^{\frac{3}{2}} \pm \frac{abb}{3}$; & si la fluente de $\frac{a\dot{y}}{b} \sqrt{bb \mp yy}$, ou la valeur de l'espace CAMQ est $= z$, $\mp \frac{a}{3bz} \times \overline{bb \mp yy}^{\frac{3}{2}} \pm \frac{abb}{3z}$ sera la valeur de la distance demandée.

Lorsque $y = b$, on aura $\frac{abb}{3z}$ dans l'ellipse ; qu si c exprime la circonférence du rayon CA (a), on aura $z =$ CBMA $= \frac{bc}{8}$; & par conséquent $\frac{8ab}{3c}$ sera la distance du centre de gravité du quart d'ellipse au premier axe AC.

EXEMPLE VII.

283. *L'on demande la distance du centre de gravité du solide décrit par l'espace* CAMQ *autour du second axe* BC *au premier axe* AC.

Si $r = a$, on aura * $\frac{ac\dot{y}}{2bb} \times \overline{bb \mp yy}$ pour la fluxion des poids, * Art. 254.
& $\frac{acy\dot{y}}{2bb} \times \overline{bb \mp yy}$ pour celle des momens, dont la fluente

$\frac{acyy}{4bb} \times \overline{bb \mp \frac{1}{2}yy}$ divisée par la somme des poids $\frac{acy}{2bb} \times \overline{bb \mp \frac{1}{3}yy}$, donnera $\frac{3}{4} \times \frac{2bby \mp y^3}{3bb \mp yy}$ pour la distance demandée.

Lorsque $y = b$, on aura $\frac{3}{8}b$ pour cette distance dans le cercle ellipse ; & $\frac{9}{16}b$ dans l'hyperbole.

EXEMPLE VIII.

Fig. 157. 284. *L'on demande la distance du centre de gravité de la surface décrite par l'arc elliptique* BM *autour de l'axe* Aa *à l'axe* CB.

* Art. 267. On aura * $c\dot{u}\sqrt{1 \mp dduu}$ pour la fluxion des poids, & $cu\dot{u}\sqrt{1 \mp dduu}$ pour celle des momens, dont la fluente complette sera $\pm\frac{c}{3dd} \mp \frac{c}{3dd} \times \overline{1 \mp dduu}^{\frac{3}{2}}$. Et si la fluente de $c\dot{u}\sqrt{1 \mp dduu}$, ou la valeur de la surface décrite par BM $= z$, on aura $\pm\frac{c}{3ddz} \mp \frac{c}{3ddz} \times \overline{1 \mp dduu}^{\frac{3}{2}}$ pour la distance demandée.

* Art. 265. Lorsque $u = 1$, on aura $1 \mp dduu = 1 \mp dd =$ * bb ; & par conséquent $\pm\frac{c}{3ddz} \mp \frac{cb^3}{3ddz}$ pour la distance cherchée.

EXEMPLE IX.

Fig. 160. 285. *L'on demande la distance du centre de gravité de la surface décrite par l'arc hyperbolique* AM *autour de l'un des axes* CA, *ou* CB *au centre* C.

* Art. 269. On aura * $c\dot{u}\sqrt{dduu \mp 1}$ pour la fluxion des poids, & $cu\dot{u}\sqrt{dduu \mp 1}$ pour celle des momens, dont la fluente complette sera $\frac{c}{3dd} \times \overline{dduu \mp 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{cb^3}{3dd}$, parce que lorsque $u = 1$,

* Art. 266. on aura * $dd \mp 1 = bb$, & la fluente doit être $= 0$ dans ce cas. Or si la fluente de $c\dot{u}\sqrt{dduu \mp 1}$, ou la surface est $= z$, $\frac{c}{3ddz} \times \overline{dduu \mp 1}^{\frac{3}{2}} - \frac{cb^3}{3ddz}$ sera la valeur de la distance cherchée.

EXEMPLE X.

286. *L'on demande la distance du centre de gravité de la partie* b N M P *de l'onglet, à la tangente de la base en* b. Fig. 156.

On aura * $\frac{b\dot{x}}{2a} \times \overline{2ax-xx}$ pour la fluxion des poids, & $\frac{bx\dot{x}}{2a} \times \overline{2ax-xx}$ pour celle des momens, dont la fluente divisée par les poids donnera $\frac{8ax-3xx}{12a-4x}$ pour la valeur de la distance demandée, laquelle devient $\frac{5a}{8}$ lorsque $x = a$, à cause que la ligne tirée du centre de gravité de l'un des triangles semblables quelconques P M N, C A D, parallele au côté N M, ou D A, rencontre la base de ce triangle à une distance égale aux $\frac{2}{3}$ de cette base; il est évident que $\frac{b\dot{x}}{2a} \times \overline{2ax-xx}$ multipliée par ($\frac{2}{3}$ P M) $= \frac{2}{3}\sqrt{2ax-xx}$, donnera $\frac{b\dot{x}}{3a} \times \overline{2ax-xx}^{\frac{3}{2}}$ pour la fluxion des momens, à l'égard de l'axe B b. C'est pourquoi si z exprime la fluente de $\dot{x}\sqrt{2ax-xx}$, ou l'espace b M P, on aura $\frac{b}{2a} \times$ par $\frac{3aaz}{4} - \frac{a-x}{4} \times \overline{2ax-xx}^{\frac{3}{2}}$ pour la somme des momens; & $\frac{b}{2a} \times \overline{axx - \frac{1}{3}x^3}$ pour la somme des poids, on aura $\frac{3z}{4a}$, lorsque $x = a$, pour la distance demandée de la moitié C A D N b de l'onglet. * Art. 263.

REMARQUE.

On observera en passant une propriété considérable du centre de gravité, qui est que toute surface décrite par la révolution d'une ligne décrite dans un plan autour d'un axe, ou d'un solide décrit par une surface plane autour d'un axe, est toujours égal au produit de la quantité génératrice multipliée par la circonférence de cercle décrite par le centre de gravité dans cette révolution.

Car si A P $= x$, P M $= y$, on aura $\int . y\dot{x}$ pour le plan générateur du solide, & $\int . \frac{1}{2}yy\dot{x}$ pour les momens; donc $\frac{\int \frac{1}{2}yy\dot{x}}{\int . y\dot{x}}$ exprimera la distance du centre de gravité de l'espace A M P à l'axe de révolution A P, laquelle étant multipliée par $\frac{c}{r}$, donne Fig. 151.

$\frac{c}{r} \times \frac{\int . \frac{1}{2} yy\dot{x}}{\int . y\dot{x}}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité. Par conséquent cette circonférence étant multipliée par le plan générateur $\int . y\dot{x}$, donnera $\int . \frac{c}{2r} yy\dot{x}$ pour la valeur du solide décrit par l'espace A M P autour de l'axe A P.

Soit l'arc A M $= v$, on aura $\dot{v}$ pour la fluxion des poids, & $y\dot{v}$ pour celle des momens, à l'égard de l'axe A P. Donc $\frac{\int . y\dot{v}}{v}$ sera la distance du centre de gravité de l'arc A M à l'axe A P. Ainsi la circonférence de cercle $\frac{c}{r} \times \frac{\int y\dot{v}}{v}$ étant multipliée par la quantité génératrice $\dot{v}$, donnera $\int . \frac{c}{r} y\dot{v}$ pour la valeur de la surface décrite par l'arc A M autour de A P.

SECTION IV.

Des centres d'oscillation & de percussion.

DEFINITIONS.

1. UN *pendule simple* est celui qui n'est que d'un corps considéré comme un point; & un *pendule composé*, est composé de plusieurs corps joints ensemble, de maniere que l'un ne se peut mouvoir sans l'autre.

2. La *ligne* qui passe par le centre de gravité d'un pendule composé, & par le point de suspension, est appellée l'*axe* du pendule.

3. La *ligne* qui passe par le point de suspension, & autour de laquelle se font les oscillations, est nommée l'*axe* de *balancement*, ou d'*oscillation*.

4. On dit que deux pendules sont *isochrones*, lorsqu'ils font un même nombre de vibrations dans le même tems.

5. Le centre d'oscillation est un point dans l'axe d'un pendule composé, dont la distance au point de suspension est égale à la longueur d'un pendule simple auquel il est isochrone.

6. Si l'on conçoit chaque particule d'un corps multipliée par sa vîtesse, comme autant de poids appliqués en différens points

de l'axe du pendule, leurs pouvoirs relatifs à faire tourner le pendule, eu égard à leur distance à l'axe de balancement, sont appellés les *forces* de ces particules.

COROLLAIRE.

287. Il est évident que la force de chaque particule dépend de sa gravité, de sa vîtesse & de sa distance à l'axe de balancement : donc si l'on considere les particules A, B, C, &c. chacune multipliée par sa vîtesse, comme des poids P, Q, R, &c. appliqués en A, B, C, &c. ensorte que DA, DB, DC, soient leurs bras de leviers ou distances à l'axe de balancement D; il est clair qu'il arrive la même chose ici à l'égard du centre d'oscillation O, ce qui arrive à l'égard du centre de gravité, c'est-à-dire que la somme des produits de chaque poids P, Q, R, multipliée par sa distance, est égale à la somme des poids multipliée par la distance DO du centre d'oscillation au point de suspension. Fig. 167.

PROBLÊME GENERAL.

288. *Trouver la distance du centre d'oscillation* O *d'un pendule composé* DABC *au point de suspension* D, *en supposant que les particules* A, B, C *soient placées dans le plan dans lequel se font les oscillations.*

Soient tirées les lignes AP, BQ, CR, perpendiculaires à l'axe DO du pendule, & la ligne Aa perpendiculaire à AD : cela posé, à cause que la ligne Aa est la direction de la particule A, ce sera la même chose que si cette particule étoit placée en A, ou en a, pourvû qu'elle ait la même direction & la même vîtesse. Or si l'on prolonge Aa jusqu'en b, ensorte que ab soit $=$ AD, & que l'on tire bc parallele, & AC perpendiculaire à l'axe DO, l'effort ou moment DA $\times$ A de la particule A dans la direction ab, sera à son effort relatif à celui avec lequel elle fait tourner le pendule dans la direction ac, comme ab, ou DA est à ac, c'est-à-dire $=$ A $\times$ ac; & ce moment étant multiplié par sa distance Da, donnera A $\times$ ac $\times$ Da pour la force de cette particule. Mais puisque DA $=$ ab, les triangles DAP, abc, étant semblables, on aura $ac =$ DP, & DP : DA :: DA : Da, ou $\overline{DA}^2 = DP \times Da = Da \times ac$. Par

conséquent $(A \times ac) = A \times DP$, & $(A \times ac \times Da) = A \times \overline{DA}^2$.

Par la même raison $B \times DQ$, & $C \times DR$, seront les momens des particules B & C, & $B \times \overline{DB}^2$, $C \times \overline{DC}^2$ leurs forces. Or comme la somme des momens multipliée par la distance

* Art. 287. DO, doit * être égale à la somme des forces, on aura donc $A \times \overline{DA}^2 + B \times \overline{DB}^2 + C \times \overline{DC}^2 = DO \times$ par $A \times DP + B \times DQ + C \times DR$; ou en nommant F la somme des forces, & M la somme des momens, on aura $DO = \frac{F}{M}$.

Ce qui vient d'être dit à l'égard des trois particules, convient également à tout autre nombre, même infini; car on prouvera toujours que la somme des forces divisée par la somme des momens, est égale à la distance du centre d'oscillation au point de suspension.

S'il y avoit quelques particules placées de l'autre côté du point de suspension à l'égard des autres, on prouvera de la même maniere que ci-dessus, que la différence entre les forces des particules d'un côté à celle des autres de l'autre, divisée par la somme des momens, sera toujours égale à la distance du centre d'oscillation au point de suspension.

Régle générale pour trouver la distance du centre d'oscillation d'un pendule à l'axe de balancement.

Divisez la somme *des produits des particules chacune multipliée par le quarré de sa distance à l'axe de balancement, si elles sont toutes du même côté; ou la* différence *de ces produits des particules d'un côté, & celles de l'autre, s'il y en a placées de part & d'autre, par la* somme *des momens, le quotient exprimera la* distance *cherchée.*

EXEMPLE I.

Fig. 163. 289. *Trouver la distance du cercle d'oscillation d'un triangle* ABC, *qui balance autour de l'axe* TAT, *qui passe par le sommet* A *parallelement à la base* BC.

* Art. 273. On aura * $\frac{bx\dot{x}x}{a}$ pour la fluxion des momens, laquelle étant multipliée par la distance x, donnera $\frac{bx^3\dot{x}}{a}$ pour celle des forces,

dont la fluente $\frac{bx^4}{4a}$ divisée par les momens $\frac{bx^3}{3a}$, donnera $\frac{3}{4}x$. Ainsi $\frac{3}{4}$ A E sera la distance cherchée.

EXEMPLE II.

290. *Trouver la distance du centre d'oscillation de la parabole* B A C, *qui balance autour de la tangente* T A T, *parallele à la base* B C, *au point de suspension* A. Fig. 169.

Soit $x = y^m$ l'équation, on aura $yx\dot{x} = m\dot{y}y^{2m}$ pour la fluxion des momens, & $(y\dot{x}\times xx) = m\dot{y}y^{3m}$ pour celle des forces, dont la fluente $\frac{m}{1+3m}y^{3m+1}$ divisée par les momens $\frac{1+2m}{m}y^{2m+1}$, donnera $\frac{1+2m}{1+3m}y^m$, ou $\frac{1+2m}{1+3m}x$ pour la distance demandée, en supposant $x =$ A E.

Si $m = 2$, on aura $\frac{5}{7}$ A E dans la parabole ordinaire pour cette distance; si m est négatif, on aura $\frac{1-2m}{1-3m}x$, qui devient zero lorsque $1 = 2m$, & infini lorsque $1 = 3m$. Mais lorsque $m = 1$, on aura $\frac{1}{2}$ A E dans l'hyperbole ordinaire.

EXEMPLE III.

291. *Supposons à présent que la parabole* B A C *balance autour de la base* B C.

Si A E $= a$, on aura $(\overline{EP}\times\dot{x}y) = \overline{a-y^m}\times m\dot{y}y^m$ pour la fluxion des momens, & $\overline{a-y^m}^2\times m\dot{y}y^m$ pour celle des forces, dont la fluente sera $\frac{aam}{1+m}y^{m+1} - \frac{2am}{1+2m}y^{2m+1} + \frac{m}{1+3m}y^{3m+1}$; & les momens seront $= \frac{am}{1+m}y^{m+1} - \frac{m}{1+2m}y^{2m+1}$; & lorsque $x = a = y^m$, on aura $\frac{2m}{1+3m}$ A E pour la distance cherchée, laquelle devient $\frac{4}{7}$ A E dans la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

292. *Soit* A M a M *un cercle qui balance autour de l'axe* T T *perpendiculaire au diametre* A a *dans le plan du cercle.* Fig. 170.

Si A D $= d$, A a $= 2a$, A P $= x$, on aura P M $= y = \sqrt{2ax-xx}$, & $\overline{d+x}\times\dot{x}\sqrt{2ax-xx}$ sera la fluxion des momens, & $\overline{d+x}^2\times\dot{x}\sqrt{2ax-xx}$ celle des forces. C'est pour-

quoi si z exprime la fluente de $\dot{x}\sqrt{2ax-xx}$, ou la valeur de
* Art. 242. l'espace AMP, on aura * $ddz + \frac{5}{4}aaz + 2adz - \frac{2}{3}dy^3 - \frac{1}{4}xy^3 - \frac{5}{12}ay^3$ pour les forces, & $dz + az - \frac{1}{3}y^3$ pour les momens, parce que $y = \sqrt{2ax-xx}$. Et lorsque $x = aa$, y sera $= 0$; & par conséquent les forces divisées par les momens, donnent $\frac{4dd+5aa+8ad}{4a+4d}$ pour la distance cherchée.

LEMME I.

Fig. 171. 293. *Soit* AB a *un demi-cercle*, BC *un rayon perpendiculaire au diametre* A a; *& coupant la parallele* MM *à* A a *en* P, *je dis que la somme de tous les produits des quarrés* $\overline{DP}^2$ *des lignes tirées d'un point donné* D *dans* A a, *chacun multiplié par l'élément correspondant de l'arc* AM, *sera* $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2 \times$ *par l'arc* AMB.

Car si $AC = a$, $CD = d$, $CP = x$, l'arc $AM = z$, AMB
* Art. 234. $= c$, on aura * $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}}$, & $\overline{DP}^2 \times \dot{z} = dd\dot{z} + xx\dot{z}$,
* Art. 242. dont la fluente est * $ddz + \frac{1}{2}aaz - \frac{1}{2}ax\sqrt{aa-xx}$, laquelle devient $= ddc + \frac{1}{2}aac$, lorsque $z = c$, & $x = a$.

LEMME II.

294. *La somme des produits de tous les quarrés* $\overline{DP}^2$ *chacun multiplié par l'élément correspondant de l'espace* CPMA, *sera* $= ddn + \frac{1}{4}aan$, *en supposant* n *égal à l'espace* AMBC.

Si $\dot{v}$ exprime la fluxion de l'espace AMPC, on aura $\dot{v} = \dot{x}$
* Art. 242. $\sqrt{aa-xx}$, & $\overline{DP}^2 \times \dot{v} = dd\dot{v} + xx\dot{v}$, dont la fluente sera * $ddv + \frac{1}{4}aav - \frac{1}{4}x \times \overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}}$, laquelle est $= ddn + \frac{1}{4}aan$, lorsque $v = n$, & $x = a$.

EXEMPLE V.

Fig. 170. 295. *Soit* AMaM *une surface sphérique qui balance autour de la ligne* TT.

Si $AD = d$, $AP = x$, $PM = y$, $Aa = 2a$, la circonférence $AMaM = c$, on aura $\frac{cy}{a}$ pour la circonférence du rayon PM, & $\overline{DP}^2 = \overline{d+x}^2$. Or le produit de toutes les particules

ticules de la circonférence $\frac{cy}{a}$, chacune multipliée par le quarré de sa distance à l'axe de balancement T T, sera * $\overline{d+x}^2 + \frac{1}{2}yy \times \frac{cy}{a} = \overline{dd + 2dx + \frac{1}{2}xx + ax} \times \frac{cy}{a}$, parce que $yy = 2ax - xx$. Cette valeur étant multipliée par la fluxion * $\frac{a\dot{x}}{y}$ de l'arc A M, donnera $cdd\dot{x} + 2cdx\dot{x} + acx\dot{x} + \frac{1}{2}cxx\dot{x}$ pour la fluxion des forces, dont la fluente sera $cddx + cdxx + \frac{1}{2}acxx + \frac{1}{6}cx^3$, laquelle deviendra $= 2acdd + 4aacd + \frac{10}{3}a^3c$, lorsque $x = 2a$; & comme la somme des momens est égale au produit de la surface sphérique $= 2ac$, multipliée par la distance $DC = a + d$ du centre de gravité C au point de suspension D, les forces divisées par les momens, donneront $\frac{3dd + 6ad + 5aa}{3a + 3d}$ pour la distance cherchée.

* Art. 293.
* Art. 234.

EXEMPLE VI.

296. *Soit* A M a M *une sphere qui balance autour de la ligne* T T.

Puisque $yy = 2ax - xx$, $(\frac{c}{2a}yy) = \frac{2aax - cxx}{2a}$ sera l'aire du cercle décrit par P M; & comme $\overline{DP}^2 = \overline{d+x}^2$, on aura * $\overline{d+x}^2 + \frac{1}{4}yy \times \frac{2acx - cxx}{2a} = dd + 2dx + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xx \times$ par $\frac{2axc - cxx}{2a}$ pour le produit de tous les élémens du cercle M M, chacune multipliée par le quarré de sa distance à l'axe de balancement; ainsi $dd + 2dx + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xx \times$ par $\frac{2acx\dot{x} - cxx\dot{x}}{2a}$ sera la fluxion des forces, dont la fluente $\frac{1}{2}cddxx + \frac{2}{3}cdx^3 + \frac{1}{8}cx^4 - \frac{cddx^3}{6a} - \frac{cdx^4}{4a} - \frac{3cx^5}{40a}$, deviendra $=$ A. $\frac{1}{3}aacdd + \frac{5}{12}a^3cd + \frac{13}{60}a^4c$, lorsque $x = a$, & $=$ B. $\frac{2}{3}aacdd + \frac{4}{3}a^3cd + \frac{14}{15}a^4c$, lorsque $x = 2a$. La premiere de ces valeurs A étant divisée par les momens, ou produit de la demi-sphere $\frac{1}{3}aac$ multipliée par la distance de son centre de gravité * $d + \frac{5}{8}a$ au point de suspension, donnera $\frac{40dd + 50ad + 26aa}{25a + 40d}$ pour la distance du centre d'oscillation de la demi-sphere; & la seconde B étant divisée par le produit de la sphere $\frac{2}{3}aac$, multipliée par la distance $a + d$ de son centre de gravité au point de suspen-

* Art. 294.
* Art. 283.

sion, donnera $\frac{5dd + 10ad + 7aa}{5a + 5d}$ pour la distance du centre d'oscillation de la sphere entiere.

EXEMPLE VII.

Fig. 173. 297. *Soit* A B *un cylindre droit qui balance autour de la ligne* T T *perpendiculaire à son axe* B A.

Soit coupé ce cylindre par un plan M P M perpendiculaire à l'axe A B ; & soit le rayon P M $= a$, sa circonférence $= c$, A P $= x$, A D $= d$, A B $= b$: cela posé, on aura $\overline{d + x} \times \frac{1}{2} a c \dot{x}$ pour la fluxion des momens, & $\frac{1}{2} a c d d \dot{x} + a c d x \dot{x} + \frac{1}{2} a c x x \dot{x} + \frac{1}{8} a^3 c \dot{x}$ pour celle des forces, dont la fluente $\frac{1}{2} a c d d x + \frac{1}{2} a c d x x + \frac{1}{6} a c x^3 + \frac{1}{8} a^3 c x$, deviendra $\frac{1}{2} a b c d d + \frac{1}{2} a b b c d + \frac{1}{6} a c b^3 + \frac{1}{8} a^3 b c$, lorsque $x = b$, & les momens $\overline{d + \frac{1}{2} x} \times \frac{1}{2} a c x$, deviendront $= \overline{2 d + b} \times \frac{1}{4} a b c$; par conséquent les forces divisées par les momens, donnent $\frac{12dd + 12bd + 4bb + 3aa}{12d + 6b}$ pour la distance demandée.

EXEMPLE VIII.

Fig. 169. 298. *Soit* E A F *un cone droit qui balance autour de la ligne* T T *perpendiculaire à son axe* A C.

Soit le cone coupé par un plan M P M parallele à sa base, & soit D A $= d$, A P $= x$, A C $= a$, C E ou C F $= r$, & c la circonférence de la base. Cela posé, on aura A C : C F :: A P : P M $= \frac{rx}{a}$, [illegible] $\left(\frac{c}{2r} \overline{PM}^2\right) = \frac{crxx}{2aa}$ pour la valeur du cercle MPM. Ainsi $\overline{d + [illegible]} \times \frac{crxx\dot{x}}{2aa}$ sera la fluxion des momens, & $\overline{dd + 2dx + xx + \frac{rrxx}{4aa}} \times$ par $\frac{crxx\dot{x}}{2aa}$ celle des forces, dont la fluente $\overline{\frac{1}{3} dd + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{5} x x + \frac{rrxx}{20aa}} \times$ par $\frac{crx^3}{2aa}$, divisée par les momens $\overline{\frac{1}{3} d + \frac{1}{4} x} \times \frac{crx^3}{2aa}$, donnera $\frac{20dd + 30ad + 12aa + 3rr}{15a + 20d}$ pour la distance cherchée, en supposant $x = a$.

LEMME III.

Fig. 172. 299. *Si le rectangle* A F G E *est divisé en deux également par la perpendiculaire* B C *au côté* A E, *la somme des produits des quarrés* $\overline{DP}^2$ *des lignes tirées d'un point fixe* D *dans la base* A E,

prolongée s'il le faut, chacun multiplié par l'élément correspondant M M *de ce rectangle, sera* $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{3}\overline{BC}^2 \times$ *par le rectangle* A F G E.

Car si $DC = d$, MM ou $EA = a$, $BC = b$, $PC = x$, on aura $a\dot{x} \times \overline{dd + xx}$ pour la fluxion de cette quantité, dont la fluente $ax \times \overline{dd + \frac{1}{3}xx}$, donnera $\overline{dd + \frac{1}{3}bb} \times ab$, lorsque $x = b$.

LEMME IV.

300. *La somme de tous les produits des quarrés* $\overline{DP}^2$, *chacun multiplié par l'élément* m m *du triangle* E B A, *sera* $= \overline{DC}^2 + \frac{1}{6}\overline{BC} \times$ *par* E B A.

Car puisque $BC : AE :: BP\ (b - x) : mm = \frac{ab - ax}{b}$, on aura $\frac{ab\dot{x} - ax\dot{x}}{b} \times \overline{dd + xx}$ pour la fluxion de cette quantité, dont la fluente $addx + \frac{1}{3}ax^3 - \frac{addxx}{2b} - \frac{ax^4}{4b}$, donnera $\frac{1}{2}ab \times \overline{dd + \frac{1}{6}bb}$, lorsque $x = b$.

EXEMPLE IX.

301. *Soit* E A L *une pyramide droite qui balance autour de la ligne* T T, *perpendiculaire à son axe* C A *dans le plan d'un de ses côtés.* Fig. 158.

Si l'on coupe cette pyramide par un plan M M parallele à la base, & que l'on tire M M parallele à G E, coupant l'axe en P; & si $AP = x$, $AC = a$, FL ou $EG = b$, $AD = d$, on aura $MM = \frac{bx}{a}$. Ainsi $\overline{d + x} \times \frac{bbxx\dot{x}}{aa}$ sera la fluxion des momens, & * $\overline{dd + 2dx + xx + \frac{bbxx}{3aa}} \times$ par $\frac{bbxx\dot{x}}{aa}$ celle des forces, dont * Art. 299.
la fluente $\overline{\frac{1}{3}dd + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{5}xx + \frac{bbxx}{15aa}} \times$ par $\frac{bbx^3}{aa}$, divisée par les momens $\overline{\frac{1}{3}d + \frac{1}{4}x} \times \frac{bbx^3}{aa}$, donnera $\frac{20dd + 30ad + 12aa + 4bb}{15a + 20d}$ pour la distance demandée, lorsque $x = a$.

EXEMPLE X.

302. *Si l'on suppose à présent que l'axe de balancement* T T *soit parallele à la diagonale* L E.

* *Art.* 300. On aura $\overline{d+x} \times \frac{bbxx\dot{x}}{aa}$ pour la fluxion des momens, & * $dd + 2x + xx + \frac{bbxx}{6aa} \times$ par $\frac{bbxx\dot{x}}{aa}$ pour celle des forces, dont la fluente $\frac{1}{3}dd + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{5}xx + \frac{bbxx}{30aa} \times$ par $\frac{bbx^3}{aa}$, divisée par les momens $\frac{1}{3}\overline{d + \frac{1}{4}x} \times \frac{bbx^3}{aa}$, donnera $\frac{20dd + 30ad + 12aa + 2bb}{15a + 20d}$ pour la distance cherchée, lorsque $x = a$.

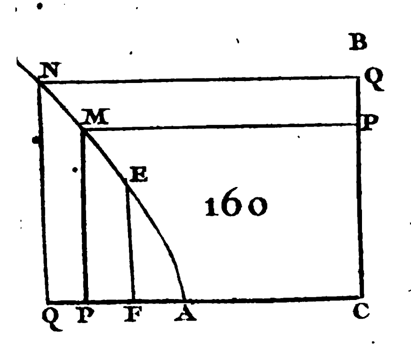
DEFINITION.

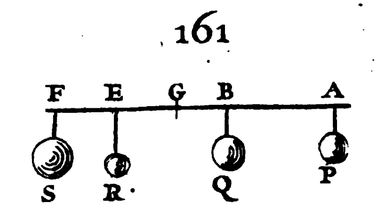
Le *centre* de *percussion* d'un corps est un point dans la surface de ce corps, tel que s'il rencontroit un obstacle par ce point étant en mouvement, il le frapperoit par une plus grande force que par tout autre point.

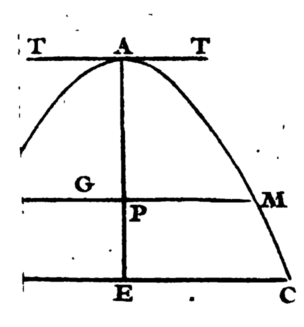
PROBLEME GENERAL.

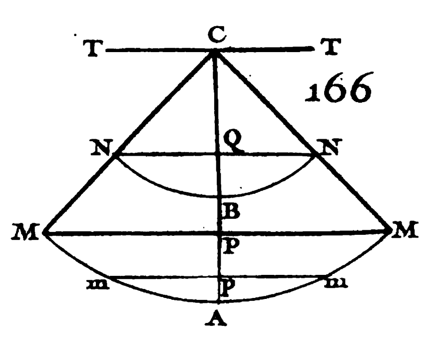
Fig. 174. 303. *Trouver le centre de percussion* O *de deux corps* A & B, *considérés comme des points placés dans le plan de la figure.*

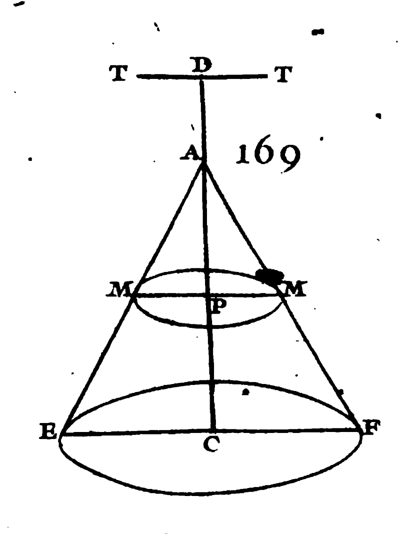
Soit l'axe de balancement D perpendiculaire au plan de la figure, & soient tirées les perpendiculaires AP, BQ, à la ligne DO, tirée à volonté dans le plan des corps; & les droites Aa, Bb perpendiculaires aux lignes AD, BD, qui expriment les distances de ces corps à l'axe de balancement: soient enfin tirées du centre O les perpendiculaires Oc, Od aux directions Aa, Bb. Cela posé, il est évident que si les momens des corps A, B, sont réciproquement proportionnels aux distances Od, Oc de leurs directions, ils frapperont l'obstacle par le point O avec plus de force que par tout autre, puisque les forces seront égales de part & d'autre; ils frapperont cet obstacle de la même maniere que si les forces étoient réunies dans ce point. C'est pourquoi si DA $= a$, DB $= c$, DP $= b$, DQ $= d$, DO $= n$, les triangles semblables DPA, DAa, Oca, & DQB, DBb, Odb, donneront 1°. DP : DA :: DA : D$a = \frac{aa}{b}$. 2°. DQ : DB :: DB : D$b = \frac{cc}{d}$. Ainsi aO $= n - \frac{aa}{b}$, bO $= \frac{cc}{d} - n$. 3°. DA : DP :: Oa : O$c = \frac{bn - aa}{a}$. 4°. DB : DQ :: Ob : O$d = \frac{cc - dn}{c}$. Par conséquent si p & q expriment les poids des

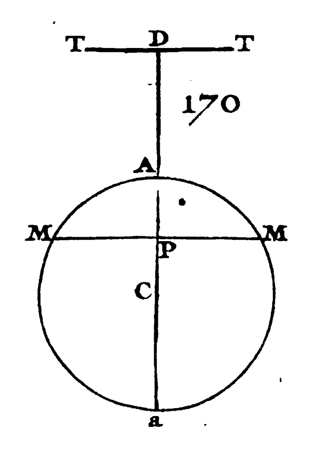

B
N
Q
M
P
E
160
Q
P
F
A
C


161
F
E
G
B
A
S
R
Q
P


T
A
T
G
M
P
E
C


C
T
T
166
N
Q
N
B
M
P
M
m
P
m
A


T
D
T
A
169
M
M
P
E
C
F


T
D
T
170
A
M
M
P
C
a



corps A & B, on aura (D A $\times p$) ap : (D B $\times q$) cq : : (O d) $\frac{cc-dn}{c}$: (O c) $\frac{bn-aa}{a}$, ou D O $= n = \frac{aap+ccq}{bp+dq}$.

Ce qu'on vient de dire à l'égard de deux corps ou points convient également à tout autre nombre, même infini; car on prouvera toujours que la ſomme des forces, ſi les corps ſont tous placés du même côté de l'axe de balancement, diviſée par la ſomme des momens, donnera la valeur de la diſtance cherchée; par conſéquent ſi la ligne D O paſſoit par le centre de gravité des corps, & ſi le pendule pouvoit frapper un obſtacle par ce point O, le centre de percuſſion ſera le même que le centre d'oſcillation.

SECTION V.

Des Problemes Phyſico-Mathématiques.

LEMME.

304. *SI trois puiſſances* P, Q, R, *ſont en équilibre, les côtés* A B, A C, B C *du triangle, qui coupent les directions à angles droits en* G, H, O, *exprimeront les rapports de ces puiſſances.* Fig. 175.

Soit O E A F un parallelogramme fait des directions, enſorte que les côtés O E, A E, ou O F & A O expriment les rapports de ces puiſſances; les triangles ſemblables A O B, A G O, & A O C, A H O donnent l'angle A B O = l'angle A O G, & l'angle A C O = l'angle A O H, égal à ſon alterne O A E; ainſi les triangles A B C & E O A ſont ſemblables; & par conſéquent puiſque les côtés du dernier expriment les rapports de ces puiſſances, ceux du premier les exprimeront auſſi.

PROBLEME I.

305. *L'intrados d'une voûte étant donné, trouver l'extrados, enſorte que tous les vouſſoirs ſoient en équilibre entr'eux.* Fig. 176.

L'on ſuppoſe les côtés des vouſſoirs comme des plans inclinés parfaitement polis & ſans friction.

L'on peut considérer la génération des voûtes de deux manieres, l'une par le mouvement parallele d'un plan, & l'autre par le mouvement circulaire d'un plan ; ce qui donne deux cas différens.

I. CAS. Des voûtes décrites par un mouvement parallele.

I. Soit AHKLBA le plan générateur, & supposons que les côtés HA, I*b*, K*c*, &c. des voussoirs étant prolongés, se rencontrent tous dans le même point C, & qu'ils soient tous perpendiculaires à l'intrados A*bcd*B. Cela posé, si par les centres de gravité V, X, Y des voussoirs, on tire les verticales VR, XS, YT, & la ligne horizontale DQ à volonté, qui rencontre les joints en E, F, G, il est évident que si les parties DE, EF, FG, expriment les pesanteurs absolues des voussoirs correspondans, la ligne CE exprimera les efforts des voussoirs AI, *b*K, l'un contre l'autre, & CF les efforts des voussoirs *b*K, & *c*L, & ainsi de suite.

Car les côtés de chacun de ces triangles sont perpendiculaires aux directions des trois puissances qui tiennent le voussoir en équilibre ; par exemple EF est perpendiculaire à l'effort vertical provenant de la pesanteur absolue du voussoir *b*K ; CE à son effort relatif contre les voussoirs AI, & CF à celui contre le voussoir *c*L. Or puisque les lignes DE, EF, FG, sont dans les rapports des pesanteurs absolues des voussoirs, lorsque les lignes CD, CE, CF, CG, &c. expriment les efforts relatifs dont les voussoirs adjacens se pressent également, il s'ensuit qu'en trouvant la courbe HIKL, telle que les espaces AHI*b*, *b*IK*c*, soient entr'eux comme les lignes DE, EF, on aura la solution du probleme.

A cause que les secteurs circulaires décrits avec les rayons CF, C*b*, CI, sont semblables, & sont aussi comme * les fluxions des espaces CDE, CA*b*, CHI, il s'ensuit que si l'on a toujours $\overline{CE}^2 = \overline{CI}^2 - \overline{Cb}^2$, le triangle CDE sera égal à l'espace AHI*b* ; & comme les triangles CDE, CEF ont la même hauteur CD, ils sont comme les bases DE, EF, &c. & par conséquent il ne s'agit que de déterminer la position de la droite DQ, pour pouvoir construire l'extrados demandé HIKL.

* Art. 244. n. 4.

Si l'on suppose la hauteur CA de la voûte, aussi-bien que l'épaisseur AH de la clef données, on aura lorsque CI devient $= CH$, $Cb = CA$, & $CE = CD$; & par conséquent

l'équation ci dessus deviendra $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CA}^2$; ce qui donne la position de la droite DQ.

II. Supposons à présent que les joints ne se rencontrent pas tous dans un même point, & le reste de même que ci-dessus. Soit le joint MN prolongé, ensorte que DN soit le rayon de la développée de l'intrados en N; & soit d'un point quelconque d du joint vertical CA tirée la droite dQ horizontalement, & du point C la ligne Ce parallele à DN. Cela posé, on prouvera de la même maniere que ci-devant, que si le côté de du triangle Cde, exprime la pesanteur absolue du voussoir AHMN, les côtés Cd, Ce, exprimeront les efforts relatifs de ce voussoir contre les deux qui lui sont adjacens. C'est pourquoi si l'espace AHMN est égal au triangle Cde, la courbe HMZ sera celle que l'on demande. Fig. 177.

Or puisque le mouvement angulaire des lignes Ce, DN, est égal par construction, & les secteurs circulaires décrits par les rayons Ce, DN, DM étant comme les quarrés des rayons, aussi bien comme les fluxions des espaces décrits par ces lignes Ce, DN, DM, il s'ensuit que l'on doit avoir $\overline{DM}^2 = \overline{DN}^2 + \overline{Ce}^2$.

Si l'intrados ANB est une ellipse, CB, CA les demi-axes; & si KN $= c$, $p \times$ CB $= \overline{CA}^2$, on aura * $\overline{DN}^2 = \frac{c^3}{pp}$, & par conséquent $\overline{DM}^2 = \frac{c^6}{p^4} + \overline{Ce}^2$. * Art. 200.

II. CAS. Des voûtes décrites par un mouvement circulaire.

I. Si la surface décrite par la ligne EF exprime la gravité du voussoir décrit par l'espace bIKc dans la révolution de la figure CHKB autour de l'axe CA, les surfaces décrites par les lignes CE, CF, exprimeront les forces relatives avec lesquelles le voussoir décrit par l'espace bK presse ceux qui lui sont adjacens; car si la ligne EF exprime la gravité du plan générateur cI, les lignes CE, CF exprimeront les efforts relatifs de ce plan contre les joints bI & cK; & par conséquent la surface décrite par EF, sera à la surface décrite par CE, ou CF, comme la pesanteur absolue du voussoir décrit par bIKc est à la force relative avec laquelle ce voussoir presse ceux qui lui sont adjacens. Ce que nous venons de dire à l'égard du voussoir décrit par bK, est également vrai à l'égard de tout autre voussoir quelconque; c'est pourquoi si la courbe HIK est telle que le solide décrit par l'espace bIKc est Fig. 176.

toujours égal au solide décrit par le triangle C E F dans le même tems, elle sera celle que l'on demande.

Fig. 178. Or à cause que les secteurs circulaires C E o, C N n, C M m, décrits par les rayons C E, C N, C M dans le même tems, sont comme les quarrés de ces mêmes rayons, & comme les fluxions des solides décrits par les plans C D E, C A N, C H M autour de l'axe C H, sont comme ces secteurs, chacun multiplié par la circonférence de cercle décrit par son centre de gravité, ou à cause que les circonférences sont comme leurs rayons; si de ces centres y, x, u, on tire les perpendiculaires yr, xq, up sur C H, ces fluxions seront comme $CEo \times yr$, $CNn \times Xq$, $CMm \times up$; mais puisque $Cy : Cx : Cu :: yr : xq : up$, & que les distances Cy, Cx, Cu, étant comme les rayons * C E, C N, C M, ces fluxions seront comme les cubes des mêmes rayons; & par conséquent on doit avoir $\overline{CM}^3 - \overline{CN}^3 = \overline{CE}^3$, ou $\overline{CM}^3 = \overline{CN}^3 + \overline{CE}^3$.

* Art. 280.

Lorsque C M = C H, & C N = C A, C E deviendra = C D. Ainsi le rayon C A & l'épaisseur A H de la clef de la voûte étant données, la position de la ligne D Q sera aussi donnée, par le moyen de laquelle on peut décrire la courbe.

L'on voit que telle que puisse être l'épaisseur de la clef, & telle courbe que puisse être l'intrados, pourvû que le point B ne tombe pas au point C, l'extrados sera toujours du genre des conchoïdes, & la ligne D Q sera son asymptote; car C M ne peut point devenir = C E, à moins que C N ne devienne zero.

Mais dans la figure 177, si le rayon de la développée de l'intrados est en quelque point zero, on aura alors C e = M N; ce qui fait voir 1°. que le dernier voussoir doit être d'une pesanteur infinie. 2°. Que tant plus petite C D est, tant moindre le dernier voussoir deviendra, sans néanmoins devenir d'une pesanteur finie. 3°. Que si l'extrados étoit donné au lieu de l'intrados, la même équation serviroit également pour décrire l'intrados.

COROLLAIRE.

Fig. 176. 306. Si dans les voûtes formées par un mouvement parallele, l'intrados est une droite parallele à la droite D Q, on aura $CD : CA :: CE : Cb = \frac{CA \times CE}{CD}$, & par conséquent l'équation $\overline{CI}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{Cb}^2$, deviendra $CI \times CD = CE \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2}$.

Or

Or comme il n'y a que les lignes C I, C E, qui soient variables dans cette équation, il s'ensuit que l'extrados sera aussi une droite parallele à l'intrados.

Et si dans les voûtes formées par un mouvement circulaire, l'intrados est une droite parallele à D Q, on aura aussi C D : C E :: C A : C N $= \frac{CA \times CE}{CD}$; & par conséquent C M $\times$ C D $=$ C E $\sqrt[3]{\overline{CA}^3 + \overline{CD}^3}$; ce qui fait voir que l'extrados est aussi une droite parallele à l'intrados. *Fig.* 178.

M. Chardons est le premier que je sçache qui a donné la solution du probleme des voûtes formées par un mouvement circulaire, à laquelle je suis redevable de celle-ci, quoique je croye qu'il y a une petite erreur dans la sienne.

Construction de quelques voûtes formées par un mouvement parallele.

I. Soit l'intrados A B un quart de cercle, C son centre, & A H l'épaisseur donnée de la clef. Si l'on prend B D $=$ C H, & que l'on tire la droite D Q perpendiculaire au joint vertical C A ; & si après avoir tiré un grand nombre de rayons C I, C K, C L, &c. on prend une droite $ca =$ C A, & sur la perpendiculaire cg à cette ligne, les parties $ce =$ C E, $cf =$ C F, $cg =$ C G, &c. on fait toujours C I $= ae$, C K $= af$, C L $= ag$; la courbe qui passera par tous les points H, I, K, L, sera l'extrados demandé. *Fig.* 179.

Car puisque C A $=$ C B, & C H $=$ B D, on aura $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CB}^2$; & comme $ca =$ C A, $ce =$ C E, & $\overline{ae}^2 = \overline{CI}^2$: donc $\overline{CI}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CA}^2$.

II. Soit l'intrados A B un arc de cercle décrit du centre C, & A H l'épaisseur donnée de la clef. Sur C H comme diametre, soit décrite la demi-circonférence de cercle H M C, & prise C M $=$ C A, C D $=$ H M, & la droite D Q tirée parallele à l'horizontale C B. Cela posé, si l'on prend sur une des jambes de l'angle droit acg, la partie $ac =$ A C, & sur l'autre les parties $ce =$ C E, $cf =$ C F, $cg =$ C G, &c. & que l'on fasse toujours C I $= ae$, C K $= af$, C L $= ag$, &c. la ligne qui passera par tous les points H, I, K, L, &c. sera l'extrados demandé. *Fig.* 180.

Car puisque C M $=$ C A, & H M $=$ D C, on aura $\overline{DC}^2 =$

$\overline{CH}^2 - \overline{CA}^2$; & comme $ca = CA$, & $ce = CE$, il s'ensuit que $\overline{ae}^2$ ou $\overline{CI}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CA}^2$.

Fig. 177. III. Soit l'intrados A N B un quart d'ellipse, C A, C B, les demi-axes, & A H l'épaisseur donnée de la clef. Si l'on fait $\overline{CB}^2 = b \times CA$, & $Cd = \sqrt{\overline{b + AH}^2 - bb}$, & que l'on tire la droite dQ perpendiculaire au joint vertical C A; & après avoir pris sur une jambe de l'angle droit gco la partie $cm = \frac{\overline{KN}^3}{pp}$, & sur l'autre $ce = Ce$, & que l'on fasse toujours $MN = me - cm$, le point M sera toujours dans l'extrados cherché.

* Art. 11. Car puisque * $\overline{CA}^2 = p \times CB$, lorsque le rayon D M tombe sur l'axe C A, on aura $KN = c = CA$, & $\frac{c^3}{pp} = \frac{\overline{CB}^2}{CA} = b$; & ainsi D M devient $= b + AH$ dans ce cas; & par conséquent $Ce = Cd = \sqrt{\overline{b + CH}^2 - bb}$; & comme $cm = \frac{\overline{KN}^3}{pp} = \frac{c^3}{pp}$, & $ce = Ce$ par construction, em sera $= \sqrt{\overline{Ce}^2 + \overline{DN}^2}$, & $em - cm = NM = \sqrt{\overline{Ce}^2 + \frac{c^6}{p^4}} - \frac{c^3}{pp}$; par conséquent $NM + \frac{c^3}{pp} = DM = \sqrt{\overline{Ce}^2 + \overline{DN}^2}$, parce que $DN = \frac{c^3}{pp}$.

M. Chardons a présenté la solution de ce problême à l'Académie des Sciences en 1730; mais comme il s'étoit trompé en ce qu'il faisoit la clef de la voûte infiniment longue, on n'a pas cru devoir le citer dans l'édition Angloise.

PROBLEME II.

Fig. 181. 307. *Soit* B B *une piece de bois placée horizontalement, & soutenue par deux autres pieces* A B, A B, *qui sont un angle donné en* B *avec la premiere; l'on demande la* position *de l'arcboutant* A C *d'une longueur donnée, telle que la piece* B B *soit la mieux soutenue qu'il soit possible.*

L'on suppose que l'arcboutant A C soit si bien arrêté en A, C, qu'il ne puisse glisser, & on néglige sa pesanteur.

Si l'on prend $BH = \frac{1}{2} AC$, & que l'on tire des points A & H les lignes H K, A G, perpendiculaires sur B B; & si A C exprime la force absolue de cette piece, A G exprimera la force relative

avec laquelle elle soutient la piece B B ; ainsi B G multipliée par le bras de levier B C, doit être un plus grand.

Or si A C $= a$, H K $= n$, K B $= m$, A G $= x$, on aura G C $= \sqrt{aa - xx}$; & à cause des triangles semblables HKB, AGB, on aura HK : KB : : AG : GB $= \frac{m}{n} x$. Donc BC $= \sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} x$, & AG × BC $= x\sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} xx$, dont la fluxion étant supposée $= 0$, donne $\dot{x}\sqrt{aa - xx} - \frac{xx\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}} - \frac{2m}{n} x\dot{x} = 0$. D'où l'on tire $x^4 - aaxx + aann = 0$, parce que $4nn + 4mm = aa$; & en extrayant la racine quarrée, on aura $xx - \frac{1}{2}aa \pm am = 0$, ou $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \mp am}$, après avoir mis $4mm$ au lieu de la valeur $aa - 4nn$.

COROLLAIRE I.

308. Si l'on met la valeur de x dans $y = x\sqrt{aa - xx} - \frac{m}{n} xx$, on aura $y = \frac{2ann - aam \pm 2amm}{2n}$. Or lorsque $x = 0$, y sera aussi $= 0$; & lorsque $x = 2n$, on aura encore $y = 0$; mais si $x > 2n$, y sera négative ; c'est pourquoi la premiere valeur $y = \frac{2ann - aam + 2amm}{2n}$ sera un * plus grand, & la seconde $y = \frac{2ann - aam - 2amm}{2n}$ sera aussi un plus grand, mais négatif ; car cette valeur ne peut passer de positive en négative sans devenir $= 0$, par conséquent le moindre qui doit être entre le plus grand est zero.

* Art. 174.

Si l'angle A B C au lieu d'être obtus étoit aigu, on aura $y = x\sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n} xx$, dont la fluxion étant faite $= 0$, ou ce qui est la même chose, K B (m) étant fait négatif dans les valeurs de x & y ci-dessus, donnera $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm am}$, & $y = \frac{2ann + aam \pm 2amm}{2n}$, dont la premiere valeur $y = \frac{2ann + aam + 2amm}{2n} = \frac{a^3 + 2aam}{4n}$, sera celle que l'on cherche, & la seconde sera un moindre. Par conséquent $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ exprimera le sinus A G de l'angle A C G, lorsque l'angle A B C

est obtus, & $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$, lorsqu'il est aigu, & le supplément du premier.

COROLLAIRE II.

309. Puisque la somme des quarrés du sinus & du cosinus d'un angle est égale au quarré du rayon, il s'ensuit que le sinus $\sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ sera celui du complément de l'angle du sinus $\sqrt{\frac{1}{2}aa + am}$; car $\frac{1}{2}aa - am + \frac{1}{2}aa + am = aa$.

Si l'angle A B G est de 60 degrés, K B $= m = \frac{1}{4}a$, & A G $= \sqrt{\frac{1}{2}aa - am} = \frac{1}{2}a$. Donc l'angle A C B sera de 30 degrés, & par conséquent si l'angle A B C est de 60 degrés, l'angle A C B sera aussi de 60 degrés.

Mais si l'angle A C B est droit, m sera $= 0$, & A G $= x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, c'est-à-dire l'angle A C B sera de 45 degrés.

PROBLEME III.

Fig. 182. 310. *Soit* A G *une piece de bois d'une longueur quelconque, fixée en* A, *ensorte que l'angle* C A B *soit constant, l'on demande la* position *d'un arcboutant* D E *d'une longueur donnée, de maniere que la piece* A G *soit le mieux supportée qu'il soit possible.*

Que A C $= \frac{1}{2}$ D E $= \frac{1}{2}a$, la perpendiculaire C B à A D $= n$, A B $= m$, & que du point D l'on tire la ligne D F $= x$ perpendiculaire à A G; cela posé, si A E (a) exprime la force absolue de cette piece, D F exprimera la force relative avec laquelle elle soutient la piece A G; c'est pourquoi D F multipliée par la distance A E, entre le point d'appui A & la direction, doit être un plus grand.

Or à cause des triangles semblables A B C, A F D, on a C B : B A :: D F : F A $= \frac{m}{n}x$; & comme E F $= \sqrt{aa - xx}$, A E sera $= \sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n}x$. Ainsi A E × D F $= y = x\sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n}xx$; & comme cette valeur est la même que celle du probleme précédent, on aura $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm am}$, lorsque y est un plus grand; & par conséquent $y = \frac{a^3 + 2aam}{4n}$ sera le plus grand demandé.

COROLLAIRE.

311. Si l'angle A D E, au lieu d'être obtus étoit aigu, le point E tombera entre les points A & F; ainſi $y = -x \sqrt{aa - xx} + \frac{m}{n} xx$; ce qui donne encore $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \mp am}$, & par conſéquent $y = \frac{2ann - aam \pm 2amm}{2n}$, dont la premiere valeur ſera le plus grand cherché, & la ſeconde un plus grand négatif.

D'où l'on voit que $\sqrt{\frac{1}{2}aa + am}$ eſt le ſinus de l'angle D E F dans le premier cas, & $\sqrt{\frac{1}{2}aa - am}$ dans le ſecond. Mais comme la premiere valeur de y eſt plus grande que la ſeconde, la premiere poſition eſt auſſi préférable à la derniere.

Il eſt aiſé de voir que les deux derniers problemes ſont d'une grande utilité dans l'Architecture; car ſçachant la force du bois par quelques expériences, on pourra calculer d'une maniere préciſe la quantité de bois qu'il faut pour que la charpente ſoit capable de ſoutenir un certain fardeau, ce qui donne deux grands avantages, l'un dans la dépenſe, & l'autre de ne pas ſurcharger un bâtiment par un fardeau inutile.

PROBLEME IV.

312. *Soit* A B C D *un plan incliné ſur lequel gliſſe une boîte cubique* L T, *ouverte par le haut, & mûe uniformément par une puiſſance* P *dans une direction parallele au plan, l'on demande* l'angle d'inclinaiſon B A K *de ce plan ſur l'horizontale* A K, *tel que la puiſſance* P *tire le plus d'eau hors d'un réſervoir* R, *dans un tems donné qu'il ſoit poſſible.* Fig. 183.

Soit la hauteur K B du plan donné, & du point B comme centre, ſoit décrit un arc de cercle K m, & tirée la droite mp perpendiculaire ſur K B. Cela poſé, il eſt évident que ſi l'angle A, ou ſon ſinus Bp augmente, la longueur A B du plan diminue; & ſi E F N V repreſente le niveau de l'eau, & que le priſme L G F N H V E, ou ſeulement ſa hauteur N H, ou G F, à cauſe que les autres dimenſions ſont conſtantes, augmente, le volume d'eau augmentera auſſi. Donc le produit Bp × F G doit être un plus grand.

Soit B K $=$ B$m = a$, B$p = x$, E I $=$ I G $= 1$, on aura $pm = \sqrt{aa - xx}$; & comme les lignes E F, A K, étant hori-

zontales sont paralleles, & les lignes EI, AB le sont par hypothese; les triangles rectangles EIF, & mpB seront semblables; ainsi $mp : pB :: EI : IF = \frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$. Donc $FG = 1 - \frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$, & $Bp \times FG = x - \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$, dont la fluxion étant supposée $= 0$, donne $\overline{aa-xx}^{\frac{3}{2}} = 2aax - x^3$; ou en supposant $ay = xx$, cette équation deviendra $2y^3 - 7ayy + 7aay - a^3 = 0$.

Si l'on fait $a = 1$, on trouvera † $y = \frac{292376}{1714649} = xx$, & $x = \frac{540764}{1309446} = 0,4129716$; par conséquent $1 : 0.4129716 :: 10000000 : 4129716 =$ au sinus de l'angle BAK, qui sera de 24 degrés & 24 minuttes.

Il est évident que la valeur trouvée pour x fait $Bp \times FG$ un plus grand; car lorsque $x = 0$, $y = x - \frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$ sera aussi $= 0$; & lorsque x commence à augmenter depuis zero, y augmente aussi jusqu'à ce que x soit $= 0,4129716$, alors y sera le plus grand, & ensuite elle diminue jusqu'à ce que $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, ou y est encore une fois $= 0$, après cela y augmente négativement à l'infini.

PROBLEME V.

Fig. 184. 313. *Soit* AD *la section d'une riviere dans laquelle on veut bâtir une écluse; l'on demande* l'angle DEA, *que les portes, dont* DE, AE *représentent les sections de cette écluse, doivent faire, afin qu'elles résistent contre la pression, de l'eau le mieux qu'il soit possible.*

Sur AD comme diametre, soit décrite la demi-circonférence de cercle DMBA, & du point de rencontre M, de l'une de ces sections prolongées avec la circonférence, soit tirée la corde DM; soit de plus tiré le rayon BEC perpendiculaire sur AD. Cela posé, à cause que les forces des portes diminue lorsque la pression de l'eau augmente, & les pressions étant comme les surfaces pressées, si la hauteur des portes demeure de même, la pression DE sera comme cette ligne; & comme la force du

† On donnera dans l'article 351 la maniere de trouver les racines des équations.

bois de la même épaisseur diminue en proportion que la longueur augmente, il s'ensuit que la force de la porte A E est réciproquement comme $\overline{AE}^2$; ou à cause que A E : A C :: A D : A M, & A C, A D étant constantes, cette force est dans la raison directe de $\overline{AM}^2$.

Mais outre cette pression, il faut encore avoir égard à l'ouverture de l'angle D E A, qui rend la résistance des portes plus foible, ou, ce qui est la même chose, à mesure que l'angle A ou son sinus D M augmente, la résistance de la porte augmentera aussi; par conséquent $DM \times \overline{AM}^2$, doit être un plus grand.

Si $AD = a$, $DM = x$, on aura $\overline{AM}^2 = aa - xx$, & $DM \times \overline{AM}^2 = aax - x^3$, dont la fluxion $aa\dot{x} - 3xx\dot{x} = 0$, donne $x = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ainsi l'angle E A D sera de 36 degrés & 16 minutes, & l'angle cherché D E A de 109 degrés & 28 minutes.

LEMME II.

314. *Si les particules d'un fluide sont tellement disposées qu'elles puissent toutes agir successivement contre une surface, sans s'empêcher les unes les autres, la force absolue du fluide est à la force relative avec laquelle il frappe une ligne, ou plan* D N, *dans une direction oblique, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de l'angle d'incidence.* Fig. 186.

Du point de milieu C, de D N ou de B A comme centre, soit décrite la circonférence de cercle N B K D A, & du point D soit tiré D P perpendiculaire sur A B. Cela posé, il est évident que la force relative avec laquelle chaque particule frappe la ligne D N dans la direction oblique K C, est à la force absolue avec laquelle elle frapperoit D N dans la direction K F perpendiculaire, comme le sinus K F de l'angle d'incidence K C F, est au sinus total K C; mais le nombre des particules qui frappent D N, est au nombre des particules qui frapperoient en même tems le plan A B perpendiculaire à K C, comme 2 C P est à 2 A C; ou à cause que les triangles semblables C P D, K C F sont égaux; comme K F est à K C, & comme le produit de la force d'une particule multipliée par le nombre des particules qui frappent en même tems, exprime la force totale, il s'ensuit que la force absolue du fluide est à la force relative avec la-

quelle il frappe le plan D N comme le quarré $\overline{KC}^2$ du ſinus total eſt au quarré $\overline{KF}^2$ du ſinus de l'angle d'incidence.

COROLLAIRE.

315. De là il ſuit que les plans inégaux & inégalement inclinés à la direction du fluide, ſont frappés par des forces qui ſont en raiſon des quarrés des ſinus des angles d'incidence multipliés par les plans reſpectifs. Car ſoit le plan $r s$ diviſé également en C, & prolongé juſqu'à la rencontre de la circonférence en d, n, & ſoit tiré $d p$ perpendiculaire ſur A B: cela poſé, Cp ſera le ſinus de l'angle d'incidence K C d; & ſi P, Q, R expriment les forces relatives avec leſquelles les plans D C, dC, rC, ſont
* Art. 314. frappés en même tems, on aura * $\overline{PC}^2 : \overline{pC}^2 :: P : Q$; mais des plans inégaux également inclinés ſont frappés en raiſon de leurs longueurs; donc $dC : rC :: Q : R$; par conſéquent en multipliant par ordre, $dC \times \overline{PC}^2$, ou $CD \times \overline{PC}^2 : rC \times \overline{pC}^2 :: P : R$.

N. B. Quoiqu'il n'y ait peut être point de fluide dans la nature tel que celui que nous venons de ſuppoſer, on ne laiſſe cependant pas que de tirer une grande utilité de l'application de ce principe à l'eau, au feu, à l'air, & autres fluides ſemblables; car l'expérience fait voir qu'en beaucoup de cas l'erreur eſt preſqu'inſenſible, & peut être négligée ſans conſéquence.

De plus, la partie des Mathématiques la plus utile dépend du mouvement des fluides, ce qui fait voir qu'on eſt obligé d'établir quelques principes qui approchent de la vérité le plus qu'il eſt poſſible. Il ſeroit à ſouhaiter que ceux qui ſe mettent à faire des expériences, s'appliquaſſent plutôt à des choſes utiles qu'à certaines propriétés frivoles & ſans conſéquence.

Le lecteur doit faire attention que les problemes qu'on donnera dans la ſuite, & qui dépendent de la Phyſique, approchent d'autant de la rigueur mathématique que les ſuppoſitions dont ils dépendent ſont vraies, ou approchent de la vérité.

PROBLEME VI.

Fig. 185. 316. *Etant donnée la vîteſſe d'un fluide parfait qui fait mouvoir une machine, l'on demande le plus grand effet poſſible que cette machine puiſſe produire dans un tems donné.*

Soit

Soit P le poids à élever par la machine que l'on ſuppoſe être compoſée d'une ou pluſieurs roues, dont K C T H eſt celle qui eſt miſe en mouvement par le fluide. Soient B, T, &c. les aubans, ou palletes; & ſoit v la vîteſſe naturelle du fluide, a le bras de levier du poids P, c'eſt-à-dire le produit des rayons A H, L N de la lanterne F G H, & de l'arbre O I N ſur lequel eſt roulée la corde à laquelle le poids P eſt attaché; & b le bras de levier ſur lequel agit le fluide, ou le produit des rayons L H, A B des roues. Cela poſé, par la régle ordinaire de la Méchanique, la ſomme des produits des puiſſances motrices, chacune multipliée par ſon bras de levier, eſt égale au produit du poids à élever par ſon bras de levier dans le cas d'équilibre. Or comme la force du fluide eſt comme le quarré * de la vîteſſe multiplié par la ſurface frappée; & comme cette ſurface eſt ici conſtante, on aura $aP = bvv$. * Art. 314.

Mais lorſque la machine eſt en mouvement, le fluide ne frappe les aubans que par la différence entre la vîteſſe du fluide & celle des aubans; ainſi ſi x exprime la vîteſſe du centre des forces des aubans, qui eſt le même ici que le centre de gravité, comme il ſera aiſé de le prouver, la force du fluide ſera exprimée par $b \times \overline{v-x}^2$; & pour avoir le moment de cette force, on la doit multiplier par la vîteſſe x. Donc $bx \times \overline{v-x}^2$ ſera le moment, ou l'expoſant de l'effet de la machine; ce qui étant, fait un plus grand donne $b\dot{x} \times \overline{v-x}^2 - 2bx\dot{x} \times \overline{v-x} = 0$. D'où l'on tire $vv - 4vx + 3xx = 0$, ou $x = \frac{1}{3}v$ pour le plus grand, & $x = v$ pour le moindre.

Car ſi $y = bx \times \overline{v-x}^2$, y & x peuvent commencer à croître depuis zero juſqu'à ce que $x = \frac{1}{3}v$, ou y eſt $= \frac{4}{27}v$, ou le plus grand; enſuite y diminue pendant que x augmente juſqu'à ce que $x = v$, alors y eſt $= 0$; après cela y augmente négativement à l'infini.

COROLLAIRE I.

317. D'où il ſuit que ſi la vîteſſe x du centre des forces des aubans eſt égale au tiers de la vîteſſe du fluide, la machine produira le plus grand effet qu'il ſoit poſſible.

COROLLAIRE II.

318. Soit Q le poids que la machine peut élever dans le cas de sa plus grande perfection ; en mettant Q au lieu de P, & $\overline{v-x}^2$, ou son égal $\frac{4}{9}vv$ au lieu de vv dans $aP = bvv$, on aura $aQ = \frac{4}{9}bvv$; & en multipliant ces deux dernieres égalités ensemble, on aura $aQ \times bvv = \frac{4}{9}bvv \times aP$, ou $Q = \frac{4}{9}P$. Ce qui fait voir que le poids Q est égal aux quatre neuviémes de celui qui est justement capable d'arrêter la machine.

COROLLAIRE III.

318. Le bras de levier b de la force motrice est au bras de levier a du poids Q, comme la vîtesse $\frac{1}{3}v$ est à la vîtesse $\frac{av}{3b}$ du poids Q ; par conséquent $\frac{av}{3b}$ Q, ou son égal $\frac{4av}{27b}$ P, sera l'exposant de l'effet de la machine.

Dans la pratique il faut avoir égard aux frotemens, autrement l'effet ne répondra point au calcul.

PROBLEME VII.

Fig. 189. 319. *L'angle que les aîles rectangulaire & plane d'un moulin à vent font avec l'arbre étant constant, l'on demande la* position *de l'arbre à l'égard de la direction du vent qu'on suppose souffler uniformément, ensorte que les aîles tournent avec la plus grande vîtesse possible.*

Soient X, Y, les deux aîles opposées, & qui sont jointes ensemble dans la figure 189, de maniere que ABC soit l'angle que leurs plans font, l'une étant prolongée, & que la perpendiculaire BD sur AC represente la position de l'arbre ; alors les triangles rectangles ADB, CDB seront semblables & égaux. Cela posé, si EB exprime la direction du vent, & que EF soit abaissée perpendiculairement sur AB, le quarré $\overline{EB}^2$ sera au quarré $\overline{EF}^2$ du sinus de l'angle d'incidence ABE, comme la force* absolue du vent est à la force relative avec laquelle il frappe l'aîle X ; mais comme cette force n'agit pas dans la direction AD perpendiculaire à l'arbre BD, elle n'est pas toute employée à faire tourner l'arbre. Si donc l'on abaisse la perpendiculaire FG sur AC, EF sera à GE comme cette force est à la partie qui fait tourner le moulin.

* Art. 314.

De même, *cæteris paribus*, Ef est à Eg comme la force du vent contre l'aîle Y est à la partie qui fait tourner le moulin.

La force du vent contre les deux autres aîles opposées étant égale à celle contre celle-ci, on ne les considérera pas.

Soit $BD = a$, $AB = c$, $AD = b$, $AE = x$, on aura $ED = b - x$, & $\overline{EB}^2 = cc - 2bx + xx$, parce que $cc = aa + bb$. Or les triangles semblables ABD, AEF donnent AB (c) : BD (a) :: AE (x) : $EF = \frac{ax}{c}$, & $\overline{EB}^2 : \overline{EF}^2 :: 1 : \frac{aa}{cc} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx}$ = à la force dans la direction EF, & EF : EG, ou AB : BD :: $\frac{aa}{cc} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx} : \frac{a^3}{c^3} \times \frac{xx}{cc - 2bx + xx}$ = à la force dans la direction GE.

Et comme $CE = 2b - x$, on aura BC (c) : BD (a) :: CE $(2b - x)$: $Ef = \frac{a}{c} \times \overline{2b - x}$; & en faisant le reste du calcul comme ci-dessus, on trouvera $\frac{a^3}{c^3} \times \frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx}$ pour la force dans la direction Eg. Donc la somme de ces forces qui est $\frac{a^3}{c^3} \times \frac{4bb - 4bx + 2xx}{cc - 2bx + xx}$, ou $2 + \frac{4bb - cc}{cc - 2bx + xx}$ doit être un plus grand; ainsi sa fluxion étant faite $= 0$, donne $2b\dot{x} - 2x\dot{x} = 0$, ou $b = x$, c'est-à-dire AE = AD.

Il paroît d'abord que la quantité trouvée est un moindre au lieu d'un plus grand; mais en examinant la chose de plus près, on verra que la quantité $\frac{4bb - 4bx + 2xx}{cc - 2bx + xx}$, ne peut devenir ni $= 0$ ni infinie; & lorsque $x = b$, elle est $= \frac{2bb}{aa}$; & en mettant toute autre valeur au lieu de x, on trouvera toujours qu'elle est moindre que $\frac{2bb}{aa}$, néanmoins avec cette condition que l'angle ABD soit plus grand que de 45 degrés.

PROBLEME VIII.

320. *La direction du vent étant supposée parallele à l'arbre* AB, *l'on demande* l'angle *que les aîles doivent faire avec l'axe, pour qu'elles tournent avec la plus grande vîtesse possible.* Fig. 188.

Comme on cherche ici l'angle ABD, il est clair qu'en supposant $x = b$ dans la force $\frac{4bb - 4bx + xx}{cc - 2bx + xx} \times \frac{a^3}{c^3}$, on aura $\frac{2abb}{c^3}$, ou

$\frac{2a\times\overline{cc-aa}}{c^3}$; & comme c eſt conſtante, & a (BD) variable, ſi l'on ſuppoſe $a=y$, on aura $\frac{2ccy-2y^3}{c^3}$ pour cette force, qui doit être un plus grand. Ainſi $2cc\dot{y}-6yy\dot{y}=0$, d'où l'on tire $y=c\sqrt{\frac{1}{3}}$. Par conſéquent l'angle BAD ſera de 35 degrés & 16 minutes, & ſon complément ou l'angle cherché ABD, de 54 degrés & 44 minutes.

PROBLEME IX.

Fig. 190. 321. *Soit* BC *la pouppe d'un vaiſſeau qui va dans la direction* BC ; *l'on demande* l'angle CBA, *ou* LAB, *que le gouvernail* AB *doit faire avec la pouppe, enſorte que le vaiſſeau tourne avec la plus grande vîteſſe poſſible.*

L'on ſuppoſe ici que l'eau ſoit un fluide parfait, c'eſt-à-dire que les particules ne s'empêchent pas les unes les autres de frapper ſucceſſivement le gouvernail ; & il faut remarquer que cet angle n'eſt vrai que dans le premier inſtant du choc ; car dès que la direction du vaiſſeau change, l'angle changera auſſi.

Soit AK parallele à BC, & KD perpendiculaire ſur AB, & DH ſur AK. Cela poſé, l'effet de l'eau contre AB ſera exprimé par * $\overline{KD}^2$, & la force avec laquelle le gouvernail AB fait tourner le vaiſſeau, ſera exprimée par DH. Ainſi ſi AK $=a$, AD $=x$, on aura $\overline{KD}^2=aa-xx$, & DK : DH, ou AK : AD : : $aa-xx : aax-x^3=$ à l'effet de l'eau pour faire tourner le vaiſſeau, qui doit être un plus grand ; & par conſéquent $aa\dot{x}-3xx\dot{x}=0$, ou $x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ainſi l'angle AKD ſera de 35 degrés & 16 minutes, & l'angle cherché KAD de 54 degrés & 44 minuttes.

* Art. 314.

Comme x a deux valeurs $\pm a\sqrt{\frac{1}{3}}$, l'une poſitive & l'autre négative, il eſt évident que ſi l'angle KAD eſt de 125 degrés & 16 minutes, ou le ſupplément de 54 degrés & 44 minutes, le vaiſſeau tournera également vîte.

PROBLEME X.

Fig. 191. 322. *Trouver la* fluxion *de la réſiſtance des figures qui ſe meuvent uniformément dans un fluide parfait.*

Soit ML la direction de la figure, & Mm une tangente à la figure en M; cela posé, si $\overline{ML}^2$ exprime la force absolue d'une particule, le quarré de la perpendiculaire Lm sur Mm exprimera la force relative avec laquelle cette particule frappe le point M: or en divisant la force Lm en la parallele Lr, & la perpendiculaire mr en la direction de la figure, la derniere sera détruite par la réaction, & la premiere sera celle qui retarde le mouvement de la figure. Ainsi en faisant $ML = 1$, $Mm = \dot{z}$, $mr = \dot{x}$, $Mr = \dot{y}$, on aura $Mm\,(\dot{z}) : mr\,(\dot{x}) :: ML\,(1) : Lm = \frac{\dot{x}}{\dot{z}}$, & $Lm : Lr$, ou $Mm\,(\dot{z}) : mr\,(\dot{x}) :: \frac{\dot{x}^2}{\dot{z}^2} : \frac{\dot{x}^3}{\dot{z}^2} =$ à la résistance du point M, laquelle étant multipliée par la fluxion $\dot{z}$ de la courbe, donnera $\frac{\dot{x}^3}{\dot{z}^2}$ pour la fluxion demandée.

COROLLAIRE.

523. Si c exprime la circonférence dont le rayon est r, & si $CP = x$, on aura $\frac{cx}{r}$ pour la circonférence du rayon x, & $\frac{cx\dot{x}^3}{r\dot{z}^2}$ pour la fluxion de la résistance du solide décrit par la figure CAB autour de l'axe AC.

EXEMPLE I.

524. Soit ABC une demi-parabole dont l'équation est $2py = xx$, on aura * $\dot{z}^2 = \frac{\dot{x}^2}{pp} \times \overline{pp + xx}$, & $\left(\frac{cx\dot{x}^3}{r\dot{z}^2}\right) = \frac{x\dot{x}}{pp+xx} \times \frac{cpp}{r}$, dont la fluente $\frac{cpp}{r} \times \log. \frac{\sqrt{pp+xx}}{p}$ exprimera la résistance de la paraboloïde décrite autour de l'axe AC. * Art. 252.

EXEMPLE II.

525. Soit ABC un quart de cercle, & $aa - xx = yy$ son équation; si $a = r$, on aura $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{y}$, & $\left(\frac{cx\dot{x}^3}{r\dot{z}^2} = \frac{cx\dot{x}yy}{a^3}\right) = \frac{c}{a^3} \times \dot{y}y^3$ sera la fluxion de la résistance, dont la fluente $\frac{c}{4a^3}y^4$ donnera $\frac{ac}{4}$ lorsque $y = a$, pour la résistance de la sphere, laquelle est par conséquent la moitié de celle de son grand cercle.

EXEMPLE III.

326. Soit AMB un quart d'ellipse, $CB = 1 = r$, $CA = a$, $CP = y$, & $aayy = aa - xx$ l'équation, dont la fluxion $aay\dot{y} = -x\dot{x}$, donnera $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{y}^2 + \frac{aay^2\dot{y}^2}{1-yy}$, d'où en faisant $aa - 1 = dd$, on aura $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 \times \frac{1+ddyy}{1-yy}$; & comme x est ici $= CP = y$, $\frac{cx\dot{x}^3}{r\dot{z}^2}$ sera $= \frac{cy\dot{y}^3}{r\dot{z}^2} = \frac{cy\dot{y} - cy\dot{y}^3}{1+ddyy}$, ou $= \frac{c}{dd} \times$ par $\frac{aay\dot{y}}{1+ddyy} - y\dot{y}$, parce que $dd + 1 = aa$; & par conséquent si $L = \log. \sqrt{1+ddyy}$, la fluente de cette fluxion sera $\frac{c}{dd} \times$ par $\frac{aa}{dd}L - \frac{1}{2}yy$; & lorsque $y = 1 = CB$, $\sqrt{1+ddyy}$ deviendra $= a$; & $\frac{caa}{d^4}la - \frac{c}{2dd}$ exprimera la résistance du sphéroïde décrit autour du premier axe CA.

Si CA étoit le second axe, on aura $1 > a$, & $dd = (aa - 1)$ sera négative; ainsi $\frac{aac}{d^4}la + \frac{c}{2dd}$ exprimera alors la résistance demandée.

EXEMPLE IV.

Fig. 192. 327. Soit DAB la section d'un cone décrit par le triangle ABC autour de l'axe AC; si $AB = d$, $BC = a = r$, les triangles semblables BPM, BCA, donneront BC (a) : BA (d) :: PC (x) : $AM = z = \frac{dx}{a}$. Ainsi $\left(\frac{cx\dot{x}^3}{r\dot{z}^2}\right) = \frac{acx\dot{x}}{dd}$ dont la fluente $\frac{acxx}{2dd}$ donnera $\frac{ca^3}{2dd}$, lorsque $x = a$ pour la résistance demandée, laquelle est à celle de sa base $\frac{ac}{2}$, comme $\overline{CB}^2$ (aa) est à $\overline{AB}^2$ (aa).

Fig. 191. * Art. 325. N. B. La résistance de la demi-sphere, dont le rayon est a, & sa circonférence c étant * $= \frac{ac}{4}$, celle du cone inscrit sera aussi $= \frac{ac}{4}$, ce qui est remarquable.

PROBLEME XI.

Fig. 193. 328. *Entre tous les cones tronqués, décrits par le trapeze* ABCD *autour de la base* AD, *qui ont la même base* AB *& la*

même hauteur A D, *& qui se meuvent dans la direction de l'axe* A D, *trouver celui de moindre résistance.*

Soit B C prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe en E, & tirées A H, D F perpendiculaires sur C B. Cela posé, la résistance de la surface décrite par B E est à celle de la base décrite par A B, comme * $\overline{AB}^2$ est à $\overline{BE}^2$, ou comme $\overline{BH}^2$ est à $\overline{AB}^2$; de même la résistance du cone retranché D E C, sera à celle de sa base D C, comme $\overline{CF}^2$ est à $\overline{CD}^2$. Donc la différence $\overline{DF}^2$ des quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{CF}^2$ exprimera la différence entre les résistances de la base C D, & du cone D E C. Par conséquent $\overline{DF}^2 + \overline{BH}^2$ doit être un moindre. Or si l'on mene D G parallele à B C jusqu'à la rencontre de A H en G, on aura H G = F D, & $\overline{DF}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{BG}^2$. * Art. 327.

Mais il est clair que le point G sera toujours placé dans la circonférence du cercle décrite sur le diametre A D; & comme entre toutes les droites qu'on puisse mener d'un point fixe B à la rencontre de la circonférence de cercle A G D, celle qui étant prolongée passe par le centre O, sera la plus courte; il s'ensuit, puisque O G = O D, que si O E = O B, le point E sera le sommet du cone cherché.

PROBLEME XII.

329. *L'on demande le* solide *de moindre résistance décrit par l'arc de cercle* B M, *& par les tangentes* M N, A N, *autour de la ligne* O A *de direction.* Fig. 194.

Si A O = 1, O P = x, P M = y, on aura * $\frac{1}{4}y^4$ pour la résistance de la partie du solide décrit par O B M P, & $\overline{TM}^2 : \overline{PM}^2$, ou $\overline{OM}^2 (1) : \overline{OP}^2 (xx) :: \overline{PM}^2 (yy) : xxyy$ = à * la résistance du cone décrit par P M T. De même $\overline{TN}^2 : \overline{AN}^2$; ou $\overline{OM}^2 (1) : \overline{OP}^2 (xx) :: \overline{AN}^2 : xx\overline{AN}^2$ = à la résistance du cone décrit par T A N. Ainsi $y^2x^2 - x^2\overline{AN}^2$ exprimera la résistance de la partie décrite par P M N A; & par conséquent $\frac{1}{4}y^4 + y^2x^2 - x^2\overline{AN}^2 + \overline{AN}^2$, exprimera la résistance totale. Mais $yy = 1 - xx$, & $AN = \frac{1-x}{y}$ par la propriété du cercle. * Art. 325. * Art. 327.

Donc cette résistance sera $= 1 + \frac{1}{2}xx - \frac{3}{4}x^4 - \frac{xx+x^3}{1+x}$, donc

la fluxion étant $= 0$, donne $1 = 4x - 6x^3 - 3x^4$, & $x = \frac{28729}{98068}$. D'où l'on trouve l'angle A N T de 73 degrés *proximæ*, & non pas de 45 degrés, comme le dit M. le Chevalier Newton dans ses principes *Scholium, après prop. 34: liv. 2.*

COROLLAIRE.

330. Il est évident que $\frac{1}{4}y^4 + y^2 x^2$, ou son égal $yy - \frac{3}{4}y^4$, exprimera la résistance du solide décrit par O B M T autour de O T, ce qui étant fait un moindre donne $2y\dot{y} = 3y^3\dot{y}$, ou $\frac{2}{3}\overline{OM}^2 = \overline{PM}^2$.

PROBLEME XIII.

331. *Entre tous les solides décrits par l'espace* O B N A, *terminé par les droites données* O A, O B, A N, *& par une autre ligne* B M N *quelconque, autour de la ligne* A O *de direction, l'on demande celui de moindre résistance.*

* Art. 322. Soit A P $= x$, P M $= y$, N M $= z$, on aura * $\frac{cy\dot{y}^3}{r\dot{z}^2}$, ou seulement $\frac{y\dot{y}^3}{\dot{z}^2}$ pour la fluxion de la résistance de la partie du solide décrit par P M N A, & si n exprime celle de la résistance de l'autre, il est évident que $\frac{y\dot{y}^3}{\dot{z}^2} + n$ doit être un moindre.

Donc en supposant $\frac{y}{\dot{z}^2}$ constante, on aura $\frac{3\dot{y}^2\ddot{y}}{\dot{z}^2} + \dot{n} = 0$; & comme $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2$, on aura $-\ddot{y} = \frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{y}}$: cette valeur étant mise, donnera $\frac{3y\dot{x}\ddot{x}\dot{y}}{\dot{z}^2} = \dot{n}$. Or puisque la fluxion $\dot{n}$ doit être composée des parties semblables à celles du premier membre, & que la somme des abscisses O P, P A, étant constante, la seconde fluxion positive de l'une sera égale à la seconde fluxion négative de l'autre, il s'ensuit que $\frac{3y\dot{x}\dot{y}}{\dot{z}^2}$, ou $\frac{y\dot{x}\dot{y}}{\dot{z}^2}$ sera toujours égale à une quantité semblable; ou, ce qui est la même chose, cette quantité doit être toujours de même. Par conséquent, si a est une constante, on aura $y\dot{y}\dot{x} = a\dot{z}^2$ pour l'équation de la courbe.

COROLLAIRE I.

332. En mettant $\dot{y}^2 + \dot{x}^2$ au lieu de $\dot{z}^2$ dans $y\dot{y}\dot{x} = a\dot{z}^2$, on aura $y\dot{y}\dot{x} = a\dot{y}^2 + a\dot{x}^2$, & en faisant $\dot{x} = \frac{v\dot{y}}{a}$, on trouvera

vy

$vy = aa + vv$; & si l'on met la valeur de la fluxion $\dot{y}$ prise dans cette derniere équation, dans $\dot{x} = \frac{v\dot{y}}{a}$, on aura $\dot{x} = \frac{v\dot{v}}{a} - \frac{a\dot{v}}{v}$, dont la fluente sera $x = \frac{vv}{2a} - a\,\mathrm{L}\,v$; $\mathrm{L}\,v$ exprime le logarithme de v.

COROLLAIRE II.

333. Si l'on fait y un moindre, on trouvera $v = a$, cette valeur de v étant mise dans celle de y & de x, donnera $2a = y$, & $x = \frac{1}{2}a - \mathrm{L}\,a$. D'où l'on voit que la moindre appliquée AN est $= 2a$; & que si l'on veut que les abscisses commencent en A, il faut retrancher $\frac{1}{2}a\,\mathrm{L}\,a$ de la valeur de x ci-dessus, pour avoir $x = \frac{vv}{2a} - \frac{1}{2}a + a\,\mathrm{L}\,\frac{a}{v}$

D'où l'on voit qu'en prenant v égale à différentes quantités arbitraires, on aura différentes valeurs pour x & y par le moyen desquelles on peut décrire la courbe. On observera que si l'on prend les logarithmes de $\frac{a}{v}$ dans les tables ordinaires, il les faut multiplier * par le logarithme hyperbolique de 10, c'est-à-dire par 2, 30258, &c. * Art. 224.

PROBLEME XIV.

334. *Trouver les* points *le plus haut & le plus bas de l'hélice de la vis d'Archimede, l'angle* AKB *fait par la section* AK *d'un plan horizontal, & par le demi-cylindre* AMBDYE *sur lequel l'hélice est formée, étant donné.* Fig. 195.

Soit KSsA une section horizontale BMA, DYE, les demi-bases circulaires, CQ l'axe, VRrA l'hélice, R un des points cherchés, MPTS la section d'un plan qui passe par le point R, & qui est perpendiculaire au plan ABDE, & parallele à l'axe CQ: cela posé, il est évident que PM & TS sont paralleles, & égales aussi-bien que PT & MS, puisque PM, TS sont dans le même plan PMST, & perpendiculaires au plan ABDE, & PT, MS sont toutes les deux perpendiculaires sur PM dans le même plan.

Si $AC = Bc = a$, $CP = x$, $PM = y$, $BV = d$, $BK = b$, AP sera $= a + x$; & à cause des triangles semblables, AB $(2a)$: BK (b) :: AP $(a + x)$: PT $=$ MS $= \frac{ab + bx}{2a}$. Or la

nature de l'hélice eſt telle que la demi-circonférence $A\,m\,M\,B$ (c) eſt à la hauteur BV (d) de la vis, comme un arc quelconque AM (z) eſt à ſa hauteur correſpondante $MR = \frac{dz}{c}$. Donc $MS - MR = RS = \frac{ab + bx}{2a} - \frac{dz}{c}$, ce qui doit être un plus grand ; & par conſéquent $\frac{b\dot{x}}{2a} = \frac{d\dot{z}}{c}$, mais on a $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{y}$, à cauſe du cercle ; ainſi $\frac{b\dot{x}}{2a} = \frac{ad\dot{x}}{cy}$, ou $y = \frac{2aad}{bc}$, & $x = \frac{a}{bc}\sqrt{bbcc - 4aadd}$. D'où ſi l'on prend $CP = Cp = \frac{a}{bc}\sqrt{bbcc - 4aadd}$, & que l'on tire les perpendiculaires PM, pm, au diametre AB, les perpendiculaires MS, ms, à la baſe du cylindre rencontreront l'hélice aux points R, r demandés.

Si l'on veut ſe ſervir de cette vis pour élever de l'eau, il faut que $bbcc$ ſoit plus grand que $4aadd$; car lorſque $bc = 2ad$, la partie concave de la vis entre les points R, r, deviendra nulle.

COROLLAIRE.

335. Si l'on ſuppoſe qu'une puiſſance N ſoit appliquée en B, dans la direction de la tangente BN à la baſe du cylindre en B, & que l'on tire par le point R le plus bas, la ligne RL perpendiculaire au plan horizontal $KSsA$, & dans ce même plan la ligne FR perpendiculaire à MR ; & ſoit enfin tirée de l'axe CQ, la ligne GH perpendiculaire à FR prolongée. Cela poſé, ſi RL (p) exprime la peſanteur de l'eau, la droite FR, terminée par la perpendiculaire LF à FH, exprimera ſon effort dans la direction FR, ou BA ; & comme FR eſt dans un plan qui eſt parallele au plan ABK, on aura $GH = TS = PM = \frac{2aad}{bc}$, & à cauſe des triangles ſemblables ABK, LFR, on aura AK (r) : BK (b) : : RL (p) : $FR = \frac{bp}{r}$. Ainſi le produit $\frac{2aadp}{rc}$ du levier GH multiplié par la puiſſance FR, doit être égal au produit aN de la puiſſance N, multipliée par ſon levier BC, dans le cas d'équilibre ; ſçavoir $rcN = 2adp$.

Or en tirant BX parallele, & DX perpendiculaire à la ligne horizontale AK, les triangles ſemblables ABK, DXD, donneront AK (r) : AB ($2a$) : : BD (n) : DX (m), ou $r = \frac{2an}{m}$. En mettant cette valeur dans $rcN = 2adp$, on aura $ncN =$

mdp. Enfin par la nature de l'hélice, la demi-circonférence A m M B (c) est à la hauteur B V (d), comme la demi-circonférence (c) multipliée par le nombre (s) des tours de l'hélice avant d'arriver en D, est à la longueur B D (n) du cylindre, ou $d = \frac{n}{s}$. D'où l'on tire $s c N = m p$; ce qui montre que la puissance N est au poids p comme la hauteur m (D X) est au chemin ($c s$) parcouru par l'eau.

PROBLEME XV.

336. *Soit l'extension d'un ressort parfait toujours comme la longueur pliée, l'on demande une* courbe D M V *telle que la surface qu'elle décrit autour de l'axe* C X *soit telle qu'une chaîne parfaitement flexible & sans pesanteur étant roulée dessus, soutienne par-tout le ressort également.* Fig. 196.

Si les droites K E, X L perpendiculaires sur C X, expriment les tensions du ressort aux deux bouts, en tirant L E jusqu'à la rencontre de K X en C. Cela posé, si C K $= a$, K E $= b$, K P $= x$, P M $= y$, les triangles semblables C K E, C P N, donneront C K (a) : K E (b) :: C P ($a + x$) : P N $= \frac{ab + bx}{a}$. Cette force P N étant multipliée par son bras de levier P M (y), doit toujours être de même, c'est-à-dire égale à une quantité constante m.

Ainsi $am = aby + bxy$, sera l'équation de la courbe cherchée. Lorsque $x = 0$, on aura $\frac{m}{b} = y =$ K D; & comme K D est arbitraire, nous la supposerons $= a$, ce qui donne $m = ab$, & $aa + ay + xy$ sera l'équation, qui est celle de l'hyperbole ordinaire, C X une asymptote, & C le centre.

Si la loi des tensions étoit telle que $\overline{PN}^n$ exprime l'effort en M, on aura $\overline{PN}^n = \frac{b^n \times \overline{a + x}^n}{a^n}$, & $a^{n+1} = y \times \overline{a + x}^n$ pour l'équation de la courbe.

PROBLEME XVI.

337. *Trouver la* nature *de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible* D A K, *fixée par les bouts dans un plan vertical, sera étant pressée en chaque point par des puissances quelconques dont la loi est donnée.* Fig. 197.

Cas I. Soit tirée la droite O T, enſorte qu'elle coupe D K à angles droits au milieu B, & rencontre la courbe en A; & d'un point quelconque M de la courbe, ſoit tirée la tangente M T, & l'appliquée M P à l'axe A B; enfin ſoit achevé le rectangle M H T P. Cela poſé, la puiſſance dans la direction M H, ou P T, ſera aux puiſſances dans les directions T M, T H des tangentes aux points M & A, comme M H eſt à T M & T H; ou ſi d'un point O pris à volonté dans l'axe A B prolongé, l'on tire la ligne O g perpendiculaire à la tangente T M, laquelle
* Art. 304. coupe D K en E, comme la ligne B E eſt aux lignes * O E & O B, qui ſont perpendiculaires à leurs directions. De même, ſi la ligne O h perpendiculaire à la tangente en m, coupe D K en F, la puiſſance appliquée en m dans une direction perpendiculaire à D K, ſera aux puiſſances dans les directions des tangentes T M, mh, comme E F eſt à E O & F O. Or comme cela arrive toujours, il s'enſuit que la puiſſance appliquée en M dans la direction M H perpendiculaire à D K, ſera comme la fluxion de la ligne correſpondante B E.

Si A P $= x$, P M $= y$, B O $= a$, B E $= u$, & l'arc A M $= z$, les triangles ſemblables B O E, P M T, donnent P M ($\dot{y}$) : P T ($\dot{x}$) : : B O (a) : B E $= u = \frac{a\dot{x}}{\dot{y}}$, dont la fluxion ſera $\dot{u} = \frac{a\dot{y}\ddot{x} - a\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^2}$. Or comme $\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, dont la fluxion en prenant $\dot{z}$ ſera $-\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\dot{z}} = \ddot{x}$, on aura $\dot{u} = \frac{a\dot{z}^2\ddot{y}}{\dot{x}\dot{y}^2}$, parce que $\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

Cas II. Soit tirée H R perpendiculaire à T M, & ſoit achevé le rectangle R M S H, on aura H M eſt à S M, ou T M eſt à T H, comme la puiſſance $\dot{u}$ dans la direction H M eſt à la puiſſance n dans la direction S M, ou $n = \frac{\dot{u}\dot{y}}{\dot{z}}$. Mais à cauſe que les directions S M des puiſſances perpendiculaires à la courbe ne ſont pas paralleles entr'elles, il y a une partie de leurs forces détruite par des forces contraires. C'eſt pourquoi ſi l'on tire S V perpendiculaire à M H, on aura M S à M V, ou M T ($\dot{z}$) à T H ($\dot{y}$), comme la puiſſance $n = \left(\frac{\dot{u}\dot{y}}{\dot{z}}\right)$ dans la direction M S eſt à ſon effet $\frac{\dot{u}\dot{y}^2}{\dot{z}^2}$; ou à cauſe que $\dot{u} = \frac{a\dot{z}^2\ddot{y}}{\dot{x}\dot{y}^2}$, cet effet ſera $n = \frac{a\ddot{y}}{\dot{x}}$.

EXEMPLE I.

338. *Trouver la* nature *de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant pressée par l'atmosphere de l'air.*

Par la nature des fluides la pression se fait par-tout perpendiculairement à la surface pressée, & elle est toujours comme le produit de cette surface multipliée par la hauteur du fluide; & comme la différence entre les hauteurs des colonnes d'air qui pressent deux points différens A, M de la ligne, est si petite, eu égard aux mêmes hauteurs, qu'on la peut négliger sans aucune erreur sensible, c'est pourquoi la fluxion $\dot{z}$ de la courbe multipliée par la hauteur de l'athmosphere $= 1$, doit être égale $\frac{a\ddot{y}}{\dot{x}}$.

Ainsi $a\ddot{y} = \dot{x}\dot{z}$, dont la fluente, à cause de $\dot{z}$ constante, sera $a\dot{y} = x\dot{z}$, ou $\frac{aa\dot{y}^2}{x^2} = \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$; d'où l'on tire $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{aa-xx}}$, dont la fluente sera $y = A - \sqrt{aa-xx}$.

Mais lorsque $y = 0$, on aura aussi $x = 0$: donc $A = a$; par conséquent $a - y = \sqrt{aa-xx}$, ou $xx = 2ay - yy$ sera l'équation de la courbe, laquelle est par conséquent un cercle.

EXEMPLE II.

339. *Trouver la* nature *de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant remplie par un fluide homogene.*

Si $BP = x$, $x\dot{z}$ exprimera la puissance appliquée en M dans la direction SM; donc $x\dot{z} = \frac{a\ddot{y}}{\dot{x}}$, ou en suppléant l'homogenité $2x\dot{x}\dot{z} = aa\ddot{y}$, dont la fluente, à cause de $\dot{z}$ constante, sera $xx\dot{z} = aa\dot{y}$, ou $\frac{a^4\dot{y}^2}{x^4} = \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$; d'où l'on tire $x^2\dot{x} = \dot{y}\sqrt{a^4 - x^4}$ pour l'équation de la courbe.

EXEMPLE III.

340. *Trouver la* nature *de la courbe qu'une chaîne parfaitement flexible fera étant suspendue par ses bouts dans un plan vertical.*

A cause que toutes les particules de la chaîne sont supposées égales & de la même pesanteur, la force qui presse le point M verticalement, sera comme $\dot{z}$. Ainsi $\dot{z} = \frac{a\dot{z}^2\ddot{y}}{\dot{x}\dot{y}^2}$, ou $\dot{x} = \frac{a\dot{z}\ddot{y}}{\dot{y}^2}$, dont

la fluente sera $x = A - \frac{a\dot{z}}{\dot{y}}$. Or au point le plus bas A, où $x = o$, $\dot{z}$ & $\dot{y}$ deviennent égales; c'est pourquoi $A - a = o$, ou $A = a$. Donc $a\dot{z} = a\dot{y} + x\dot{y}$, dont le quarré sera $(aa\dot{z}^2) = aa\dot{y}^2 + aa\dot{x}^2 = aa\dot{y}^2 + 2ax\dot{y}^2 + xx\dot{y}^2$, d'où l'on tire $a\dot{x} = \dot{y}\sqrt{2ax + xx}$ pour l'équation de la courbe.

En mettant au lieu de $\frac{a\dot{x}}{\dot{y}}$ sa valeur dans $(u) = z = \frac{a\dot{x}}{\dot{y}}$, on aura $z = \sqrt{2ax + xx}$.

COROLLAIRE.

341. En réduisant $\sqrt{2ax - xx}$ en une suite infinie, on aura $y = \sqrt{2ax} \times$ par $1 - \frac{x}{12a} + \frac{3xx}{160aa} - \frac{5x^3}{896a^3} +$ &c. pour la fluente de $a\dot{x} = \dot{y}\sqrt{2ax - xx}$. En supposant, pour une plus grande facilité, $r = \sqrt{2x}$, $s = \frac{1}{12}x\sqrt{2x}$, $t = \frac{3}{160}x^2\sqrt{2x}$, on aura $y = ra^{\frac{1}{2}} - sa^{-\frac{1}{2}} + ta^{-\frac{3}{2}} -$ &c. d'où en supposant la suite $a^{\frac{1}{2}} = by + cy^{-1} + dy^{-3} +$ &c. & en substituant les valeurs de $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$, dans celle de y, & en comparant les coefficiens des termes homologues, on trouvera les valeurs des indéterminées b, c, d, &c. & par conséquent $a = \frac{yy}{2x} + \frac{1}{6}x - \frac{37x^3}{360yy} - \frac{x^5}{288y^4} -$ &c. Or en mettant les valeurs de x prise dans $z = \sqrt{2ax + xx}$ dans cette derniere équation, & en supposant $z = AMD$, & $y = DB$, on aura la valeur de la constante a, & par conséquent aussi celle de l'axe AB.

EXEMPLE IV.

342. *Trouver la* nature *de la courbe qu'une ligne parfaitement flexible fera étant pressée par le vent qui souffle uniformément dans une direction perpendiculaire à* DK.

Par la nature des fluides en mouvement, le quarré $\dot{z}^2$ du sinus total est au quarré $\dot{y}^2$ du sinus de l'angle d'incidence, comme la force absolue du fluide (1) est à la force relative $\frac{\dot{y}^2}{\dot{z}^2}$ contre le

* *Art.* 337. *n.* 2. point M; ainsi * $\dot{z} \times \frac{\dot{y}^2}{\dot{z}^2} = \frac{a\ddot{y}}{\dot{x}}$, ou $a\dot{z}\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2$, ce qui est la même équation que dans l'exemple précédent.

COROLLAIRE I.

343. Il est évident que telle que la loi qui régne entre les puissances puisse être, & telles que soient leurs directions, on trouvera toujours une équation algébrique, ou du moins fluxionaire, qui exprime la nature de la courbe.

Car si les directions étoient toutes différentes, on les pourra toujours changer par la décomposition des forces, en d'autres qui soient perpendiculaires à la courbe, ou à la ligne DK.

COROLLAIRE II.

344. Il est aussi manifeste que si la nature de la courbe est donnée, on pourra toujours trouver le rapport qui régne entre les puissances qui agissent dans certaines directions, ensorte que leur pression fasse prendre à la ligne la courbe demandée, comme on verra dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

345. *Trouver le* rapport *entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires à* DK, *ensorte que la figure* DAK *soit un demi-cercle.*

Si $AB = DB = a$, $BP = x$, $PM = y$, on aura à cause du cercle $yy = aa - xx$, dont la fluxion sera $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$; en substituant cette valeur de $\dot{y}$ dans $u = \frac{a\dot{x}}{\dot{y}}$, on aura $u = -\frac{ay}{x}$, dont la fluxion sera $\dot{u} = \frac{ay\dot{x} - ax\dot{y}}{xx}$. Or si l'on nomme q la puissance appliquée en M, on aura $\dot{u} = q\dot{z} = \frac{ay\dot{x} - ax\dot{y}}{xx}$, ou parce que $\dot{z} = \frac{a\dot{x}}{y}$, & $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$, à cause du cercle, cette équation sera $\frac{aq\dot{x}}{y} = \frac{axx\dot{x} - ayy\dot{x}}{yxx}$, ou $q = \frac{aa}{xx}$, parce que $aa = xx + yy$.

EXEMPLE II.

346. *Trouver le* rapport *entre les puissances qui pressent une ligne parfaitement flexible dans les directions perpendiculaires à* DK, *ensorte que la figure* DAK *soit une parabole.*

Soit $2px = yy$, l'équation de la parabole, on aura $p\dot{x} = y\dot{y}$;

ou $\dot{x} = \frac{q\dot{y}}{p}$. Ainsi $u = \left(\frac{a\dot{y}}{\dot{x}}\right) = y$, ou $\dot{u} = \dot{y}$, en supposant $a = p$. Or si q exprime la puissance appliquée en M, on aura $\dot{u} = q\,\dot{z} = \dot{y}$, ou à cause que * $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{p}\sqrt{pp+yy}$, on aura $q\,\dot{z} = \frac{q\dot{y}}{p}\sqrt{pp+yy} = \dot{y}$. D'où l'on tire $q = \frac{p}{\sqrt{pp+yy}}$.

* Art. 252.

N. B. Si chaque puissance q est considérée comme la pesanteur d'un voussoir de voûte dont le centre de gravité est toujours placé dans la courbe que ces puissances feroient prendre à une ligne parfaitement flexible, agissant dans des directions perpendiculaires à DK, & que les joints soient perpendiculaires à la même courbe, il est manifeste que tous les voussoirs seront en équilibre entr'eux. Car les directions des poids & des puissances seront exactement les mêmes, & par conséquent leurs efforts des unes contre les autres seront aussi de même.

PROBLEME XVII.

Fig. 198.

347. *Soit une ligne* CH *d'une pesanteur donnée, qui tourne autour du centre* C, *& qui est attachée par l'autre bout à un fil* HER, *qui passe pardessus une poulie* E, *& soutient un poids cylindrique* R *par le moyen d'une courbe* KMN *dont on demande la* nature *telle que le poids* R *soit toujours en équilibre avec la ligne* CH, *en quelque position qu'elle puisse être.*

Soit CB la position horizontale de la ligne CH, A le point de milieu ou le centre de gravité, & K le point touchant du poids R dans ce cas : cela posé, le produit du poids A par la distance CA du point d'appui C à sa direction, doit être égal au produit du poids R par la perpendiculaire CX à la direction BE dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire on doit avoir CA × A = CX × R, en supposant que A exprime la pesanteur donnée de la ligne CH.

Or lorsque cette ligne est dans quelqu'autre situation, comme CH, en tirant du milieu m & du centre du poids R les perpendiculaires mp, MP aux verticales CF, DK, on aura le produit du poids R multiplié par sa descente verticale KP, égal au produit du poids A multiplié par sa montée Cp verticale, ou KP × R = Cp × A; cette égalité étant multipliée par celle ci-dessus, donnera CA × KP = Cp × CX. D'où l'on tire cette construction.

Soit

Soit K P une quatriéme proportionnelle aux lignes C A, C X & C*p*, & tirée la perpendiculaire P M; & soit tourné le fil autour de la poulie E, ensorte que son bout rencontre P M en quelque point M, lequel sera la place du centre du poids, on trouvera tant de ces points que l'on voudra: cela étant fait, on décrira de plusieurs points de cette courbe, comme centres, & avec un rayon égal à celui du poids cylindrique R, des cercles, & la courbe qui touchera tous ces cercles du côté de D K, sera celle demandée.

On peut rendre ce probleme plus général en supposant un poids O, figure 199, au lieu de la ligne C H, figure 198, qui soit soutenu par une courbe quelconque B *m* F, ensorte que si B est la place du poids Q, lorsque le poids R est placé en K, on aura toujours R : Q :: C B : à la distance du point C à la direction du poids Q placé en B, & R : Q :: C*p* : K P; par conséquent l'une de ces courbes, & le rapport des poids étant donné, on pourra décrire l'autre courbe. *Fig.* 199.

Ce problême a été proposé par M. Jean Bernoulli, & résolu par lui-même dans les *Acta Eruditorum* de Leipsick, année 1695, pag. 60, par M. le Marquis de Lhôpital dans les mêmes Actes & année, pag. 56 & 65; par Wolffius dans ses *Opera Math.* tome 2, pag. 87, par M. Belidor dans la Science des Ingénieurs, liv. 4 pag. 40. Ce dernier nomme la courbe K M N, figure 198, la *Sinusoïde*; & il fait voir son application aux ponts-levis, pag. 43.

Tous ces auteurs ont considéré les poids Q, R comme des points; mais M. Belidor ayant trouvé neuf ponts à peu près pour le rayon du poids cylindrique R, il est évident que cette courbe K M N doit être décrite par le centre de gravité de ce poids, autrement elle ne sera point vraie.

PROBLEME XVIII.

348. *Soit* X Y *une masse de terre uniforme dans toutes ses parties; l'on demande la ligne de rupture* D A, *que le prisme* A C D *fera par son propre poids, n'étant point soutenu en* A C, *en supposant que la résistance causée par le poids & la tenacité des particules, soit au produit de la masse par* D A *dans un rapport donné.* *Fig.* 200.

Si du point fixe A l'on abbaisse la perpendiculaire A B sur la ligne horizontale D C, & du point B la perpendiculaire B E sur

AD ; & si DB $= y$, CB $= b$, AB $= h$, on aura AD $= \sqrt{hh+yy}$, & $\overline{b+y} \times \frac{1}{2} h$ pour la superficie ou pesanteur du triangle DCA ; & à cause des triangles semblables ABE, DBE, on a AB : AE ou DA ($\sqrt{hh+yy}$) : AB (h) :: $\overline{b+y} \times \frac{1}{2} h : \frac{\overline{b+y} \times hh}{2\sqrt{hh+yy}} =$ à l'effort du poids $\overline{b+y} \times \frac{1}{2} h$, dans la direction AE opposée à celle de la résistance. Donc si r exprime le rapport de DA $\times$ DCA, on aura $\frac{\overline{b+y} \times hh}{2\sqrt{hh+yy}} = \frac{bh+by}{2r} \times \sqrt{hh+yy}$, dans le cas de l'équilibre. D'où l'on tire $rh = hh + yy$; ou $y = \sqrt{rh - hh}$, & $r = \frac{hh+yy}{h}$.

COROLLAIRE I.

349. De là il suit 1°. que si la quantité r est connue par quelqu'expérience, on trouvera la valeur de DB (y), & ainsi la ligne de rupture DA. 2°. Au contraire le talut DA étant donné, on trouvera la valeur de DB (y), & par conséquent celle de r. 3°. Enfin r doit être plus grande que h, autrement la résistance surpassera l'effort du poids, ce qui fera qu'il n'y aura point de rupture.

COROLLAIRE II.

350. Si $r = \frac{5}{4} h$, on aura $\frac{5}{4} hh - hh = \frac{1}{4} hh = yy$, ou $\frac{1}{2} h = y$; & l'angle CDA sera de 30 degrés. Mais si $r = 2h$, on aura $2hh - hh = hh = yy$, ou $h = y$; & l'angle CDA sera alors de 45 degrés, comme M. Couplet, & après lui Mr. Belidor, l'ont supposé.

PROBLEME XIX.

351. *Trouver la moindre racine d'une équation quelconque rationnelle, & qui ne contient qu'une quantité variable.*

Il faut égaler l'équation à l'unité, ensorte que l'équation générale $1 = ax + bxx + cx^3 +$ &c. puisse exprimer l'équation particuliere ; il faut ensuite prendre autant de termes arbitraires A, B, C, qu'il y a de racines dans l'équation, & multiplier ces termes par ordre renversé, chacun par le coefficient des termes de l'équation, & leur somme sera le terme suivant ; comme, par exemple, $aC + bD + cA = D$, & $aD + bC + cB = E$,

$aE + bD + cC = F$, & ainſi de ſuite, ce qui donne, en ſuppoſant $A = B = 0$, & $C = 1$, 0. 0. 1. a. $aa + b$. $a^3 + 2ab + c$. $a^4 + 3aab + 2ac + bb$. $a^5 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc$, & l'avant dernier terme diviſé par le dernier ſera la racine cherchée *proximæ*. Ainſi $x = \frac{a^4 + 3aab + 2ac + bb}{a^5 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc}$.

Il faut remarquer que l'on approchera d'autant plus de la vraie racine, que l'on en continuera la ſuite, & que l'on doit toujours choiſir des unités & des zeros pour les termes arbitraires A, B, C. Tout l'artifice de cette maniere conſiſte à bien choiſir les termes arbitraires, pour que la ſuite converge beaucoup; mais je crois qu'il n'y a que la pratique qui puiſſe indiquer le chemin le plus court.

DEMONSTRATION.

Si l'on réduit cette valeur de x en une ſuite infinie, on aura $x = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} + \frac{5abc - 5b^3}{a^7} +$ &c. Or comme on trouve la même choſe en cherchant la valeur de x par le moyen des ſuites, il s'enſuit que l'on a trouvé la valeur approchante de la racine demandée.

EXEMPLE I.

352. Soit $1 = 7y - 7yy + 2y^3$, l'équation propoſée, qui eſt celle de l'article 312, en ſuppoſant 0. 0. 1, on aura 7, $7 \times 7 - 7 = 42$, $42 \times 7 - 7 \times 7 + 2 = 247$, & ainſi de ſuite, ce qui donne la ſuite ſuivante, 0. 0. 1. 7. 42. 247. 1449. 8501. 49855. 292376. 1714649, & $y = \frac{292376}{1714649}$.

EXEMPLE II.

353. Soit $1 = 4x + 0 - 6x^3 - 3x^4$ l'équation, qui eſt celle de l'article 329, en ſuppoſant 0. 0. 0. 1, on aura 0. 0. 0. 1. 4. 16. 58. 205. 712. 2452. 8404. 28729. 98068, & $x = \frac{28729}{98068}$.

Il peut y avoir deux difficultés, l'une quand la moindre racine eſt négative, & l'autre lorſqu'elle eſt imaginaire. Dans le premier cas, il faut prendre les termes alternatifs, & leur racine quarrée donnera la moindre racine poſitive. Comme, par exemple, ſi $1 = -y + 4yy + 4y^3$, on aura la ſuite 1. 1. 0. −4. 36. −20. 148. −84. 596. −340. 2388, ce qui donne $yy = \frac{596}{2388}$, & $y = \frac{149}{597}$ *proxima*, l'erreur n'étant que $\sqrt{\frac{1}{2388}}$; car la ra-

cine est $\mp \frac{1}{2}$. On peut aussi trouver la moindre racine positive en supposant $x = y \pm a$; car quand on a x, on aura aussi y.

Lorsque la moindre racine est imaginaire, il faut supposer $x = y + a$, si la racine est positive; ou $x = y - a$, si elle est négative. Cette régle ne manquera jamais, pourvû que x soit assez petite.

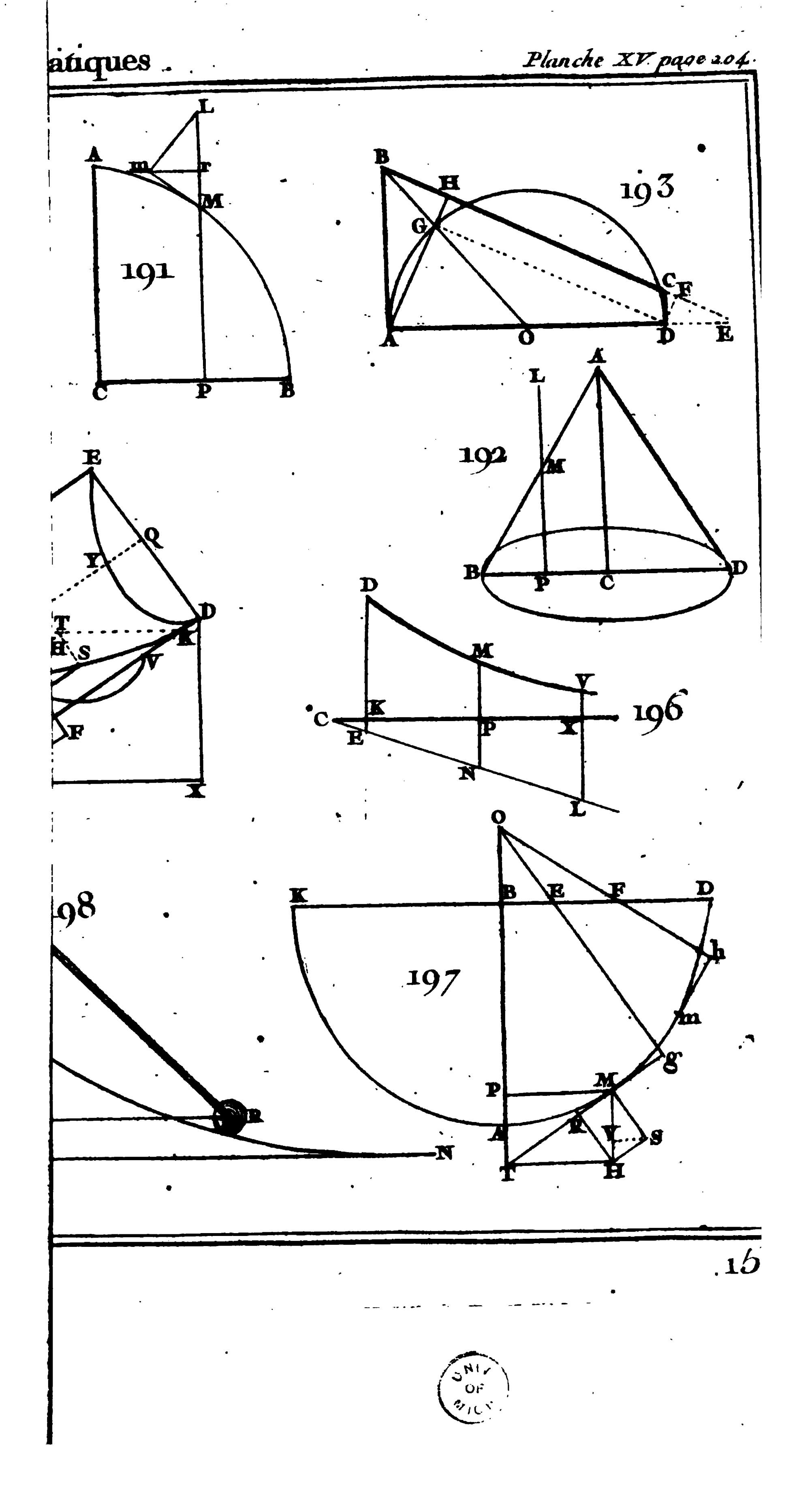
Si par exemple $2 = x + xx - x^3$, ou $1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x^3$, on aura $1.\ 1.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ -\frac{1}{8}\ -\frac{3}{16}$, &c. d'où l'on voit que la suite diverge. Mais si l'on suppose $x = 8z - 2$, on aura $1 = 15z - 56zz + 64z^3$, ce qui donne 1. 1. 1. 23. 353. 4071. 42769. 436151, & $z = \frac{42769}{436151}$, ce qui donne $x = -\frac{530150}{436151}$.

Si $1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x^3$, on ne trouvera rien selon la régle; mais si l'on fait $x = 13z + 3$, on aura $1 = -20z - 104zz - 169z^3$, d'où l'on forme la suite 0. 0. 1. $-$20. 296. $-$4009. 52776. $-$688608. 8960977. Ainsi $z = -\frac{688608}{8960977}$, & $x = \frac{17927029}{8960977} = 2.0005$, *proximæ*, la racine est $+2$.

Cette régle n'est pas moins utile pour extraire la racine d'un nombre quelconque; car si par exemple on veut extraire la racine quarrée de 26, en supposant $5 + y$ pour la racine demandée, on aura $26 = 25 + 10y + yy$, ou $1 = 10y + yy$, & 0. 1. 10. 101. 1020. 10301. 104030, & $y = \frac{10301}{104030}$; par conséquent $5 + \frac{10301}{104030} = 5.0990195136$ sera la racine cherchée vraie jusqu'à 10 figures.

Cette régle sert encore pour trouver la valeur de y dans la suite infinie $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 +$ &c. Car en divisant par z, on aura $1.\ \frac{a}{z},\ \frac{aa}{zz} + \frac{b}{z},\ \frac{a^3}{z^3} + \frac{2ab}{zz} + \frac{c}{z},\ \frac{a^4}{z^4} + \frac{3aab}{z^3} + \frac{bb + 2ac}{zz},\ \frac{a^5}{z^5} + \frac{4a^3b}{z^4} + \frac{3abb + 3aac}{z^3} + \frac{2bc + 2ad}{zz}$; & par conséquent $y = \frac{a^4z + 3aabzz + \overline{bb + 2ac},\ z^3 + dz^4}{a^5 + 4a^3bz + \overline{3abb + 3aac},\ zz + \overline{2bc + 2ad},\ z^3}$, ou bien $y = \frac{z}{a} - \frac{bzz}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 +$ &c.

Si la suite étoit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ &c. il faudroit la disposer ainsi, $1 = \frac{a}{z}y + 0 +$ [illegible]$y^3 + 0 + \frac{c}{z}y^5 + 0 + \frac{d}{z}y^7 +$ &c. ce qui donnera $1.\ \frac{a}{z},\ \frac{aa}{zz},\ \frac{a^3}{z^3} + \frac{b}{z},\ \frac{a^4}{z^4} + \frac{2ab}{zz},\ \frac{a^5}{z^5} + \frac{3aab}{z^3} + \frac{c}{z},\ \frac{a^6}{z^6} + \frac{4a^3b}{z^4} + \frac{bb + 2ac}{zz},\ \frac{a^7}{z^7} + \frac{5a^4b}{z^5} + \frac{3abb + 3aac}{z^3} + \frac{d}{z},\ \frac{a^8}{z^8} + \frac{6a^5b}{z^6} + \frac{60abb + 4a^3c}{z^4} + \frac{2bc + 2ad}{zz}$; & par conséquent


191
A
m
r
L
M
C
P
B
193
B
H
G
C
F
A
O
D
E
192
A
L
M
B
P
C
D
E
Q
Y
T
D
H
S
K
V
F
X
196
D
M
V
C
K
P
X
E
N
L
98
N
197
O
K
B
E
F
D
h
m
g
P
M
A
R
V
S
T
H

$y = \frac{za^7 + 5a^4bz^3 + \overline{3abb + 3aac}, z^5 + dz^7}{a^8 + 6a^5bzz + \overline{6aabb + 4a^3c}, z^4 + \overline{2bc + 2ad}, z^6}$, ou bien si l'on veut

$y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3bb - ac}{a^7} z^5 + \frac{8abc - 12b^3 - aad}{a^{10}} z^7 +$ &c.

Il est aisé de voir que la suite converge d'autant plus vîte, que le premier coefficient a est plus grand.

PROBLEME XX.

354. *Trouver la plus grande racine d'une équation quelconque rationnelle, & qui ne renferme qu'une seule inconnue.*

Il faut mettre l'inconnue élevée à la plus haute puissance d'un côté, & tous les autres termes de l'autre, ensorte que l'équation puisse être comparée avec la formule générale $x^n = a\,x^{n-1} + b\,x^{n-2} + c\,x^{n-3}$ - - - - - d, & suivre la régle du probleme précédent, excepté qu'il faut diviser le conséquent par son antécédent. Ainsi on aura $1.\,a$, $aa + b$, $a^3 + 2ab + c$, $a^4 + 3aab + 2ac + bb + d$, $a^5 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc + 2ad$, & $x = \frac{a^5 + 4a^3b + 3aac + 3abb + 2bc + 2ad}{a^4 + 3aab + 2ac + bb + d}$ pour la racine demandée.

La démonstration est la même que celle du probleme précédent; & il y a aussi la même remarque à faire, qui est que la suite convergera d'autant plus vîte que le coefficient a du second terme est plus grand.

EXEMPLE I.

355. Soit $x^4 = 4x^3 - 5xx + 2x - 1$, l'équation proposée. On aura la suite 1. 1. 1. 0. — 4. — 15. — 41. — 97. — 209. — 428. — 902. — 1983; & ainsi $x = \frac{1983}{902}$.

Comme il n'y a rien de si utile que de sçavoir trouver d'une maniere aisée & générale les racines de toutes sortes d'équations, j'ai cru ne pouvoir mieux faire que de donner celle-ci, qui est sans doute la meilleure qu'on ait publiée jusqu'à présent, & dont le public est redevable au sçavant Daniel Bernoulli, comme on peut voir dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Petersbourg.

DE LA METHODE DES DIFFERENCES.

PROBLEME XXI.

356. *Trouver la somme d'une suite de nombres quelconques* a, b, c, d, e, *dont il y a quelque rang de différences constantes.*

Ayant soustrait le premier a du second b, le second b du troisiéme c, le troisiéme c du quatriéme d, &c. on aura les différences premieres $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, &c. on soustraira la premiere différence $b-a$ de la seconde $c-b$, la seconde $c-b$ de la troisiéme $d-c$, &c. pour avoir les différences secondes; on soustraira de même la premiere des secondes différences de la seconde, & la seconde de la troisiéme, &c. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on trouve quelque différence constante : cela fait, on posera ces différences comme on voit cidessous.

	1re. Diff.	2me. Diff.	3me. Diff.	4me. Diff.
a	$b-a$	$c-2b+a$	$d-3c+3b-a$	$e-4d+6c-4b+a$
b	$c-b$	$d-2c+b$	$e-3d+3c-b$	
c	$d-c$	$e-2d+c$		
d	$e-d$			
e				

En nommant la premiere des différences premieres A, la premiere des secondes B, la premiere des troisiémes C, &c. on aura,

$$A = b - a,$$
$$B = c - 2b + a,$$
$$C = d - 3c + 3b - a,$$
$$D = e - 4d + 6c - 4b + a,$$

&c. &c.

D'où l'on tire les valeurs des termes de la suite

$$a = a.$$
$$b = a + A.$$
$$c = a + 2A + B.$$
$$d = a + 3A + 3B + C.$$
$$e = a + 4A + 6B + 4C + D.$$

&c. &c.

D'où l'on voit 1°. que les coefficiens de la valeur d'un terme quelconque, sont de même que ceux d'un binome élevé à une puissance égale au nombre des termes qui la précédent : par exemple, les coefficiens de la valeur du quatriéme terme d, sont de même que ceux d'un binome élevé à la troisiéme puissance ; de même les coefficiens de la valeur du cinquiéme terme e, sont de même que ceux d'un binome élevé à la quatriéme puissance.

D'où l'on peut tirer cette conclusion générale, que le $z + 1^{me}$ terme est $a + zA + z \times \frac{z-1}{2} B + z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} C + z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4} D +$ &c.

2°. Si dans la valeur d'un terme quelconque, l'on efface le premier terme a, & que la premiere différence A soit $= a$, la seconde $B = A$, la troisiéme $C = B$, &c. la valeur de ce terme ainsi changée, exprimera toujours la somme des termes qui la précédent.

Par exemple, si dans $d = a + 3A + 3B + C$, on ôte a, & que l'on fasse $A = a, B = A, C = B$, on aura $3a + 3A + B = a + b + c$. De même si dans $e = a + 4A + 6B + 4C + D$, on ôte a, & si l'on fait $A = a$, $B = A$, $C = B$, $D = C$, on aura $4a + 6A + 4B + C = a + b + c + d$.

Par conséquent si dans le terme général ci-dessus on ôte a, & que l'on fasse $A = a$, $B = A$, $C = B$, $D = C$, on aura $az + z \times \frac{z-1}{2} A + z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} B +$ &c. pour la somme de z termes, & dont le premier est a.

COROLLAIRE.

357. De là il suit qu'il est manifeste que dans toute suite de nombres dont la premiere différence est constante, on aura $a + zA$ pour terme général, & $az + \frac{z \times z-1}{2} A$ sera la somme de z termes. Et dans toute suite de nombres, dont la seconde différence est constante, on aura $a + zA + \frac{z \times z-1}{2} B$ pour terme général, & $az + z \times \frac{z-1}{2} A + z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} B$ sera la somme de z termes.

EXEMPLE I.

358. Soit 3. 5. 7. 9. 11. &c. la suite proposée, on aura $a = 3$, $A = 2$, $B = C = 0$, & par conséquent $3z + z \times \overline{z-1}$, ou

$z \times \overline{z+2}$ sera la somme de z termes : si l'on veut avoir 100 termes de cette suite, on aura $z = 100$, & 10200 pour la somme demandée.

EXEMPLE II.

359. Soit 4. 9. 16. 25, &c. la suite proposée, en prenant les différences on aura les nombres ci à côté ; ainsi $a = 4$, $A = 5$, $B = 2$, $C = D = 0$; & par conséquent la formule générale devient ici $4z + 5z \times \frac{z-1}{2} + z \times z - 1 \times \frac{z-2}{3}$, ou $\frac{2z^3 + 9zz + 13z}{6}$; & lorsque $z = 4$, on aura 54 pour la somme de quatre termes.

4. 9. 16. 25
5. 7. 9
2. 2

EXEMPLE III.

360. Soit 1. 8. 27. 64. 125, &c. la suite proposée, dont les termes sont les cubes des nombres naturels. En prenant les différences, on aura les nombres à côté, & $a = 1$, $A = 7$, $B = 12$, $C = 6$, $D = 0$; par conséquent la somme générale devient ici $z + 7z \times \frac{z-1}{2} + 12z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + 6z \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4}$, ou $\frac{\overline{zz+z}^2}{2}$. Si $z = 20$, on aura 44100 pour la somme de 20 termes.

1. 8. 27. 64. 125
7. 19. 37. 61
12. 18. 24
6. 6

PROBLEME XXII.

361. *La somme telle que* $\frac{A}{z.\, z+n.\, z+2n \ldots z+xn}$ *d'une suite infinie étant donnée, l'on demande le terme général de cette suite.*

L'on suppose A, n, x des quantités constantes, & z variable, n la différence des facteurs, dont le nombre est $x + 1$; les points entre les facteurs representent le signe de multiplication, & l'on suppose la suite telle qu'en augmentant ou en diminuant chaque facteur de la différence commune n, on diminue ou augmente la somme d'un terme de la suite.

Cela posé, en augmentant chaque facteur de la différence commune n, on aura $\frac{A}{z+n.\, z+2n.\, z+3n \ldots z+xn+n}$ pour la somme de cette suite d'un terme moins que la premiere ; par conséquent

conséquent la différence de ces deux sommes ; qui est $\frac{A}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}\ldots\overline{z+xn}} - \frac{A}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}\ldots\overline{z+nx+n}}$, ou $\frac{A}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}} \times \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z+n}.\overline{x+n}}$, ou bien $\frac{n \times \overline{1+x} \times A}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}\ldots\overline{z+nx+n}}$ sera le terme général demandé.

COROLLAIRE.

362. D'où il suit que si le terme général $\frac{n \times \overline{1+x} \times A}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}\ldots\overline{z+nx+n}}$ d'une suite telle que nous venons de supposer, est donnée, on trouvera la somme des termes à l'infini de cette suite, en rejettant le dernier facteur $z+nx+n$, & en divisant le reste par le produit $\overline{1+x} \times n$ de la différence commune n des facteurs, multipliée par le nombre $\overline{1+x}$ des facteurs restans.

Si le terme général contient plusieurs termes, on prendra la somme de chaque terme de la même maniere que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

363. *Soit* $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} +$ *&c. continuée à l'infini, la suite proposée.*

Il est clair que z est le terme général des premiers facteurs 1, 2, 3, 4, &c. & $z+1$ celui des seconds 2, 3, 4, 5, &c. Ainsi le terme général de cette suite sera $\frac{1}{z.\overline{z+1}}$. Car si l'on met les nombres 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de z, on aura les termes de la suite proposée. Donc en rejettant le dernier facteur $z+1$, il restera $\frac{1}{z}$; & comme la différence commune est l'unité aussi bien que le nombre des facteurs restans, cette suite sera $= \frac{1}{z}$.

Si $z = 1$, on aura $1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} +$ &c.

Si $z = 2$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} +$ &c.

Si $z = 3$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} +$ &c.

EXEMPLE II.

364. *Soit proposée la suite* $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} +$ *&c. continuée à l'infini.*

Le terme général des premiers facteurs 1, 2, 3, 4, &c. sera z; celui des seconds 2, 3, 4, 5, &c. sera $z + 1$, & celui des troisiémes 3, 4, 5, 6, &c. sera $z + 2$. Donc le terme général sera $\frac{1}{z.\overline{z+1}.\overline{z+2}}$. Car en mettant 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de z, on aura les termes de la suite. Ainsi rejettant le dernier facteur $z + 2$, & en divisant le reste par 2, le nombre des facteurs restans, on aura $\frac{1}{2z.\overline{z+1}}$ pour la somme cherchée.

Si $z = 1$, on aura $\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} +$ &c.

Si $z = 2$, on aura $\frac{1}{12} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} +$ &c.

REMARQUES.

I. La suite commence toujours par le terme qui provient de la substitution de la valeur de z dans le terme général. Comme, par exemple, lorsque $z = 1$ dans la derniere suite, le terme général $\frac{1}{z.\overline{z+1}.\overline{z+2}}$ devient $\frac{1}{1.2.3}$; & la somme de la suite commençant par le terme $\frac{1}{1.2.3}$, & continuée jusqu'à l'infini, sera $= \frac{1}{4}$, & ainsi des autres.

II. z est toujours le moindre facteur de la suite, & le terme général doit avoir au moins deux facteurs. Car s'il n'y avoit que $\frac{A}{z}$, en rejettant le facteur z, & en divisant le reste par 0 le nombre des facteurs restans, on aura $\frac{A}{0} = \infty$ pour la somme de la suite.

III. Lorsque les termes d'une suite sont si composés qu'on ne peut aisément voir quel est son terme général, il faut chercher celui des numérateurs, s'ils ne sont des unités, & les diviser par celui des dénominateurs. Car on peut toujours trouver les uns & les autres en prenant leurs différences de la même maniere qu'on a fait pour trouver le terme général d'une suite de nombres entiers. Il faut néanmoins remarquer que si le nombre

des facteurs n'est pas constant dans tous les termes, on ne sçauroit trouver le terme général par cette méthode.

IV. Quand on a le terme général d'une suite, il faut que z ne soit point multipliée par quelqu'autre nombre; & les facteurs doivent avoir la différence commune qui est entre les valeurs de z; autrement on ne sçauroit avoir la somme par ce qui a été dit, sans les réduire sous la forme du probleme précédent.

PROBLEME XXIII.

365. *Trouver la somme de la suite dont le terme général est* $\frac{1}{z.\,z+m}$, *& dont* n *est la différence commune des facteurs.*

Soit $\frac{1}{z+m} = \frac{a}{z+n} + \frac{b}{z+n.\,z+2n} + \frac{c}{z+n \ldots z+3n} + \frac{d}{z+n \ldots z+4n} + \&c.$

L'on suppose ici, comme on fera toujours par la suite, que les points... entre les facteurs marquent les facteurs moyens qui manquent entre le premier & le dernier pour faire la progression.

En multipliant par $z+m$, on aura

$$1 = \frac{a.\,z+m}{z+n} + \frac{b.\,z+m}{z+n.\,z+2n} + \frac{c.\,z+m}{z+n \ldots z+3n} + \frac{d.\,z+m}{z+n \ldots z+4n} + \&c.$$

Et en faisant les divisions, il viendra

$$\begin{aligned} 1 = a + \frac{a.\,\overline{m-n}}{z} - \frac{an.\,\overline{m-n}}{zz} + \frac{ann.\,\overline{m-n}}{z^3} - \&c.\\ \frac{b}{z} + \frac{b.\,\overline{m-3n}}{zz} - \frac{bn.\,\overline{3m-7n}}{z^3} + \&c.\\ \frac{c}{zz} + \frac{c.\,\overline{m-6n}}{z^3} - \&c.\\ \frac{d}{z^3} + \&c. \end{aligned}$$

D'où en faisant $a = 1$, & les coefficiens des autres termes chacun $= 0$; cela donne

$$\begin{aligned} a &= 1.\\ b &= a.\,\overline{n-m}.\\ c &= b.\,\overline{2n-m}.\\ d &= c.\,\overline{3n-m}.\\ &\&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Par conséquent $\frac{1}{z+m} = \frac{1}{z+n} + \frac{n-m}{z+n.z+2n} + \frac{b.2n-m}{z+n\ldots z+3n}$ $+ \frac{c.3n-m}{z+n\ldots z+4n} +$ &c. & en divisant par z, la suite se réduira à la formule de l'article 362, & dont on peut trouver la somme par le même article.

COROLLAIRE.

366. En faisant $m = 0$, & en divisant par z, on aura $\frac{1}{zz} = \frac{1}{z.z+n} + \frac{n}{z\ldots z+2n} + \frac{1.2nn}{z\ldots z+3n} + \frac{2.3n^3}{z\ldots z+4n} + \frac{2.3.4n^4}{z\ldots z+5n}$ $+$ &c.

EXEMPLE I.

367. *Soit* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ *&c. continué à l'infini la suite proposée.*

Le terme général est $\frac{1}{zz}$, & les valeurs de z sont 1, 2, 3, 4, &c. Ainsi $n = 1$, & $\frac{1}{zz} = \frac{1}{z.z+1} + \frac{1}{z.z+2} + \frac{1.2}{z\ldots z+3} +$ $\frac{1.2.3}{z\ldots z+4} +$ &c. dont la somme est $\frac{1}{z} + \frac{1}{2z.z+1} + \frac{1.2}{3z\ldots z+2} +$ $\frac{1.2.3}{4z\ldots z+3} + \frac{1.2.3.4}{5z\ldots z+4} +$ &c. ou en faisant $A = \frac{1}{z}$, $B =$ $\frac{A}{z+1}$, $C = \frac{2B}{z+2}$, $D = \frac{3C}{z+3}$, $E = \frac{4D}{z+4}$, &c. cette somme deviendra $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E +$ &c.

Cette derniere suite convergera d'autant plus vîte que z est plus grand. Or si l'on fait $z = 1$, elle sera la somme de $1 + \frac{1}{4}$ $+ \frac{1}{9} +$ &c. si $z = 2$, de $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. si $z = 3$, de $\frac{1}{9} +$ $\frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ &c. D'où l'on voit que plus on prendra de termes de la premiere suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. & plus vîte convergera la derniere $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C +$ &c.

Si l'on prend la somme des douze premiers termes de la suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. on aura 1, 5649766378, & en mettant la treiziéme valeur 13 de z dans la somme ci-dessus, on aura $A = \frac{1}{13}$, $B = \frac{A}{14}$, $C = \frac{2}{15}B$, $D = \frac{3}{16}C$, $E = \frac{4}{17}D$, &c. dont la somme de $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D +$ &c. sera

.0769230770
1747252
244200
34341
6464
1496
405
124
42
16
6
3
1

.0799574270

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 1, 644934065 pour la valeur de la suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ &c.

EXEMPLE II.

368. *Soit* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ *&c. la suite proposée, laquelle exprime le logarithme hyperbolique de* 2.

En soustrayant les termes négatifs des positifs, elle sera $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} +$ &c. dont le terme général des premiers facteurs 1, 3, 5, 7, &c. sera z, & celui des seconds 2, 4, 6, 8, &c. sera $z + 1$. Donc $\frac{1}{z.\overline{z-1}}$ sera le terme général de la suite; car les valeurs de z sont 1, 3, 5, 7, &c.

Ainsi en faisant $m = 1$, $n = 2$, dans le terme général $\frac{1}{z.\overline{z+m}}$, on aura $\frac{1}{z.\overline{z+1}} = \frac{1}{z.\overline{z+2}} + \frac{1}{z \ldots \overline{z+4}} + \frac{3}{z \ldots \overline{z+6}} + \frac{3.5}{z \ldots \overline{z+8}} + \frac{3.5.7}{z \ldots \overline{z+10}} +$ &c. dont la somme est $\frac{1}{zz} + \frac{1}{2.2z.\overline{z+2}} + \frac{3}{3.2z.\overline{z+4}} + \frac{3.5}{4.2z.\overline{z+6}} +$ &c. ou si $A = \frac{1}{zz}$, $B = \frac{A}{z+2}$, $C = \frac{3B}{z+4}$, $D = \frac{5C}{z+6}$, $E = \frac{7D}{z+8}$, &c. elle sera $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E +$ &c.

Or en prenant la somme des vingt premiers termes de la suite $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} +$ &c.

On aura,	50000.	00000.	00000
	8333.	33333.	33333
	3333.	33333.	33333
	1785.	71428.	57143
	1111.	11111.	11111
	757.	57575.	75757
	549.	45054.	94505
	416.	66666.	66667
	326.	79338.	56209
	263.	15789.	47368
	216.	45021.	64502
	181.	15942.	02899
	153.	84615.	38462
	132.	27513.	22752
	114.	94252.	87356
	100.	80645.	16129
	89.	12655.	97148
	79.	36507.	93651
	71.	12375.	53343
	64.	10256.	41026
	68080.	33817.	92694.

Et en mettant la vingt-uniéme valeur 41 de z dans la somme ci-dessus, on aura $A = \frac{1}{82}$, $B = \frac{A}{43}$, $C = \frac{3B}{45}$, $D = \frac{5C}{47}$, $E = \frac{7D}{49}$, &c. & la somme $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E +$ &c. donnera

01219. 51219. 51220
14. 18037. 43619
63023. 88605
5028. 50155
574. 68589
84. 51263
15. 03459
3. 10943
72735
18862
5341
1632
533
185
67
26
10
4
2
1
01234. 37987. 67251

Cette somme étant ajoutée au nombre ci-dessus, donnera 69314. 71805. 59945, pour le logarithme hyperbolique vrai dans toutes les figures.

Il seroit impossible de trouver la somme de l'une ou l'autre de ces deux dernieres suites par la seule addition des termes; car il faudroit en ajouter plus de 100000. 00000. 00000 termes pour avoir le logarithme hyperbolique de 2 vrai à 15 figures, comme nous venons de le trouver, & l'autre suite converge encore moins.

PROBLEME XXIV.

369. *L'on demande la somme de la suite dont le terme général est* $\frac{1}{z.\,z+n.\,z+m}$, *& dont la différence commune des facteurs est* n.

Soit $\frac{1}{z+m} = \frac{a}{z+2n} + \frac{b}{z+2n.\,z+3n} + \frac{c}{z+2n..\,z+4n} + \frac{d}{z+2n...\,z+5n}$ + &c. en multipliant par $z+m$, il viendra

$$1 = \frac{a.z+m}{z+2n} + \frac{b.z+m}{z+2n.z+3n} + \frac{c.z+m}{z+2n\ldots z+4n} + \frac{d.z+m}{z+2n\ldots z+5n}$$

+ &c. & en réduiſant chaque terme en une ſuite par une diviſion continuelle, on trouvera

$$1 = a + \frac{a.m-2n}{z} - \frac{2na.m-2n}{zz} + \frac{4nna.m-2n}{z^3} + \&c.$$

$$\frac{b}{z} + \frac{b.m-5n}{zz} - \frac{nb.5m-19n}{z^3} + \&c.$$

$$\frac{c}{zz} + \frac{c.m-9n}{z^3} - \&c.$$

$$\frac{d}{z^3} + \&c.$$

D'où en ſuppoſant $a = 1$, & les coefficiens des autres termes chacun égal à zero, on aura

$a = 1.$
$b = 2n - m.$
$c = b.\overline{3n-m}.$
$d = c.\overline{4n-m}.$
$e = d.\overline{5n-m}.$
&c. &c.

Par conſéquent ſi l'on diviſe $\frac{1}{+m} = \frac{a}{z+2n} + \frac{b}{z+2n.z+3n}$ + &c. par $z.\overline{z+n}$, on trouvera la ſomme par l'article 362.

PROBLEME XXV.

370. *L'on demande la ſomme de la ſuite dont le terme général eſt* $\frac{1}{z^3}$, *& la différence commune des facteurs* n.

Soit $\frac{1}{zz} = \frac{a}{z+n.z+2n} + \frac{b}{z+n\ldots z+3n} + \frac{c}{z+n\ldots z+4n} + \frac{d}{z+n\ldots z+5n}$ + &c. En multipliant par zz, & en réduiſant chaque terme en une ſuite par une diviſion continuelle, on trouvera

$$1 = a - \frac{3an}{z} + \frac{7ann}{zz} - \frac{15an^3}{z^3} + \&c.$$

$$\frac{b}{z} - \frac{6bn}{zz} + \frac{25bnn}{z^3} - \&c.$$

$$\frac{c}{zz} - \frac{10cn}{z^3} + \&c.$$

$$\frac{d}{z^3} + \&c.$$

D'où

D'où en faiſant $a = 1$, & les coefficiens des autres termes chacun égal à zero, on aura $a = 1$, $b = 3n$, $c = 11nn$, $d = 50n^3$, &c. Ces valeurs étant miſes, & le tout étant diviſé par z, on trouvera la ſomme demandée par l'article 362.

COROLLAIRE.

371. Si l'on veut avoir la ſomme du terme général $\frac{1}{z^4}$, en ſuppoſant $a = 1$, $b = 6n$, $c = 35nn$, $d = 225n^3$, &c. on aura $\frac{1}{z^4} = \frac{a}{z\ldots z+3n} + \frac{b}{z\ldots z+4n} + \frac{c}{z\ldots z+5n} + \frac{d}{z\ldots z+6n}$ + &c.

Pour avoir la ſomme du terme général $\frac{1}{z^5}$; en faiſant $a = 1$, $b = 10n$, $c = 85nn$, $d = 735n^3$, &c. on aura $\frac{1}{z^5} = \frac{a}{z.z+4n} + \frac{b}{z..z+5n} + \frac{c}{z..z+6n}$ + &c.

Pour abréger ce travail on a conſtruit la table ſuivante.

zz	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8	z^9	z^{10}
1								
1	1							
2	3	1						
6	11	6	1					
24	50	35	10	1				
120	274	225	85	15	1			
720	1764	1624	735	175	21	1		
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36	1

La premiere colonne verticale contient les coefficiens de la valeur de zz, la ſeconde ceux de z^3, la troiſiéme ceux de z^4, &c.

Tout nombre eſt égal à la ſomme des colonnes au-deſſus & à gauche, multiplié par le nombre au-deſſus, plus le nombre qui eſt à gauche un degré au-deſſus.

Par exemple, le nombre 11 de la ſeconde colonne eſt = $\overline{1+2}$

$\times 3 + 2$, c'est-à-dire une colonne à gauche, 2 au-dessus, leur somme 3 multipliée par le nombre 3 au-dessus, plus au nombre 2 au-dessus à côté. De même le nombre 85 de la quatriéme colonne est $= \overline{3+2} \times 10 + 35$, & le nombre 1764 de la seconde est $= \overline{1+5} \times 274 + 120$, $120 = \overline{0+5} \times 24 + 0$, $40320 = \overline{0+8} \times 5040 + 0$.

Quand on a trouvé les coefficiens par le moyen de cette table, il faut multiplier le premier par 1, le second par n, le troisiéme par nn, le quatriéme par n^3, &c. en supposant que n exprime la différence commune des facteurs, ou entre les valeurs de z.

PROBLEME XXVI.

372. *La somme* S *d'une suite étant exprimée par* $v^{z+m} \times$ *par* $\frac{a}{z} + \frac{b}{z.\overline{z+n}} + \frac{c}{z..\overline{z+2n}} + \frac{d}{z..\overline{z+3n}} +$ *&c. l'on demande la valeur du terme général* T *de cette suite.*

En augmentant z de la différence commune n des facteurs, en nommant Ś cette nouvelle somme, on aura Ś $= v^{z+m+n} \times$ par $\frac{a}{z+n} + \frac{b}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}} + \frac{c}{\overline{z+n}...\overline{z+3n}} + \frac{d}{\overline{z+n}...\overline{z+4n}} +$ &c.

Mais $\frac{a}{z+n} = \frac{a}{z} - \frac{na}{z.\overline{z+n}}$.

$$\frac{b}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}} = \frac{b}{z.\overline{z+n}} - \frac{2nb}{z..\overline{z+2n}}.$$

$$\frac{c}{\overline{z+n}...\overline{z+3n}} = - - - \frac{c}{z...\overline{z+2n}} - \frac{3nc}{z...\overline{z+3n}}.$$

$$\frac{d}{\overline{z+n}...\overline{z+4n}} = - - - - - - - - - - - - \frac{d}{z...\overline{z+3n}} - \&c.$$

Donc Ś $= v^{z+m} \times$ par $\frac{av^n}{z} + \frac{\overline{b - na}, v^n}{z.\overline{z+n}} + \frac{\overline{c - 2nb}, v^n}{z..\overline{z+2n}} + \frac{\overline{d - 3nc}, v^n}{z..\overline{z+3n}} +$ &c.

La différence entre les sommes S, Ś, sera $=$ T; par conséquent T $= v^{z+m} \times$ par $\frac{a - av^n}{z} + \frac{b - \overline{b+na}, v^n}{z.\overline{z+n}} + \frac{c - \overline{c+2nb}, v^n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}} + \frac{d - \overline{d+3nc}, v^n}{z....\overline{z+3n}} +$ &c.

COROLLAIRE.

373. D'où il suit que si la valeur de T exprime le terme général d'une suite, la valeur de S exprimera la somme de cette suite.

EXEMPLE I.

374. *Soit* $1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1}{9}x^4 +$ *&c. la suite proposée.*

Le terme général des dénominateurs 1, 3, 5, 7, &c. sera $1 + 2z$, & celui des exposans 1, 2, 3, 4, &c. de x sera z. Donc $\frac{x^z}{1+2z}$ sera le terme général de la suite, ou en mettant $z - \frac{1}{2}$ pour z, ce terme sera $\frac{x^{z-\frac{1}{2}}}{2z}$, & les valeurs de z seront $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. Or en comparant ce terme général avec la valeur de T, on aura $n = 1$, $m = -\frac{1}{2}$, $v = x$, $a - av^n = \frac{1}{2}$, $b - bv^n + nav^n = 0$, $c - cv^n + 2nbv^n = 0$, $d - dv^n + 3ncv^n = 0$, &c. ou $a = \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, $b = \frac{ax}{x-1}$, $c = \frac{2bx}{x-1}$, $d = \frac{3cx}{x-1}$, &c. & par conséquent $S = x^{z-\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{ax}{x-1.z.z+1} + \frac{2bx}{x-1.z..z+2} + \frac{3cx}{x-1.z...z+3} +$ &c.

Soit par exemple $x = -1$, la suite $1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 +$ &c. deviendra $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ &c. qui exprime un arc de cercle de 45 degrés, dont le rayon est l'unité. Ce qui donne $S = \pm 1 \times$ par $\frac{1}{4z} + \frac{A}{2z+2} + \frac{2B}{2z+4} + \frac{3C}{2z+6} + \frac{4D}{2z+8} +$ &c. en supposant que les lettres A, B, C, D, &c. expriment chacune le terme qui les précéde.

Il y aura $+1$, lorsque $z - \frac{1}{2}$ est un nombre pair, & -1, lorsque $z - \frac{1}{2}$ est un nombre impair.

Si l'on prend vingt termes de la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ &c. ou dix de la suite $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} +$ &c. on aura

66666. 66666. 66666
5714. 28571. 42857
2020. 20202. 02020
1025. 64102. 56410
619. 19504. 64396
414. 07867. 49482
296. 29629. 62963
222. 46941. 04562
173. 16017. 31602
138. 60013. 86001

77290. 59516. 66959

Et en mettant la 21[me] valeur $20\frac{1}{2}$ de z dans la suite $\frac{r}{4z} + \frac{A}{2z+z} +$ &c. on aura $\frac{1}{82} + \frac{A}{43} + \frac{2B}{45} + \frac{3C}{47} + \frac{4D}{49} + \frac{5E}{51} +$ &c. &c

01219. 51219. 51219
28. 36074. 87238
1. 26047. 77211
8045. 60248
656. 78387
64. 39058
7. 28950
92775
13021
1986
326
57
11
2

01249. 22117. 30489

Ce nombre étant ajouté à la somme trouvée ci-dessus, donnera 78539. 81633. 97448 pour l'arc cherché, vrai dans toutes les figures.

EXEMPLE II.

375. *Soit* $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 +$ *&c. la suite proposée.*

Le terme général sera $\frac{x^z}{z}$, & les valeurs de z, 1, 2, 3, 4, 5, &c. ce terme étant comparé avec la valeur de T, donne $m = 0$, $n = 1$, $v = x$, $a - ax = 1$, $b - bx + ax = 0$, $c - cx + 2bx = 0$, $d - dx + 3cx = 0$, ou $a = \frac{1}{1-x}$, $b = \frac{ax}{x-1}$, $c = \frac{2bx}{x-1}$, $d = \frac{3cx}{x-1}$, &c. Par conséquent $S = \frac{x^z}{1-x.z} + \frac{Ax}{x-1.z+1} + \frac{2Bx}{x-1.z+2} + \frac{3Cx}{x-1.z+3} + \frac{4Dx}{x-1.z+4} +$ &c.

Les lettres A, B, C, D, &c. expriment chacune le terme qui les précede.

Si $x = \frac{1}{5} = z$, la somme des onze premiers termes de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 +$ &c. sera 22314. 35508. 95468. 97546. 89755, & en mettant la douziéme valeur 12 de z dans la somme S, on aura $S = \frac{0^7.128}{3} - \frac{A}{4.13} + \frac{2B}{4.14} - \frac{3C}{4.15} + \frac{4D}{4.16} -$ &c. ce qui donne

+ 4. 26666. 66666. 66666	− 8205. 12820. 51282
293. 04029. 30403	14. 65201. 46520
91575. 09157	6733. 46261
561. 12188	51. 68228
5. 16822	55373
6292	752
94	12
2	
+ 4. 26960. 62837. 41624	− 8219. 84807. 68428
− 8219. 84807. 68428	
+ 4. 18740. 78029. 73196	

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 22314. 35513. 14209. 75576. 62951 pour la somme de la suite proposée, c'est-à-dire pour le logarithme hyperbolique de $\frac{4}{5}$.

Si x est négatif, on aura $-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 -$ &c. & la somme de cette suite sera $\frac{-x^z}{1+x.z} + \frac{Ax}{1+x.z+1} + \frac{2Bx}{1+x.z+2}$ + &c. Par conséquent $S = -\frac{-x^z}{1+x.z} - \frac{Ax}{1+x.z+1} - \frac{2Bx}{1+x.z+2} - \frac{3Cx}{1+x.z+3} -$ &c. sera la somme de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.

Si $x = \frac{1}{5} = .2$, la différence des onze premiers termes de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ &c. sera 1.8232. 15570. 82135. 64213. 56420, & en mettant la douziéme valeur 12 de z dans S, on aura $S = -\frac{0^7.2048}{6.12} - \frac{A}{6.13} - \frac{2B}{6.14} - \frac{3C}{6.15} - \frac{4D}{6.16} -$ &c. ainsi

— 2. 84444. 44444. 44444
3646. 72364. 67237
86. 82675. 34934
2. 89422. 51165
12059. 27132
591. 14075
32. 84115
2. 01656
13444
960
73
6
— 2. 88181. 01592. 39241

Ce nombre étant retranché de la somme ci-dessus, donnera 18232. 15567. 93954. 62621. 17179 pour la somme demandée, c'est-dire pour le logarithme hyperbolique de $\frac{6}{5}$.

AUTREMENT.

En partageant la suite en ces deux suivantes $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ &c. & $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{8}x^8 +$ &c. le terme général de l'une & de l'autre est $\frac{x^z}{z}$, & les valeurs de z sont 1, 3, 5, 7, &c. dans la premiere, & 2, 4, 6, 8, &c. dans la seconde. D'où en comparant $\frac{x^z}{z}$ avec T, on aura $m = 0$, $n = 2$, $v = x$, $a - av^n = 1$, $b - bv^n + nav^n = 0$, $c - cv^n + 2nbv^n = 0$, $d - dv^n + 3cnv^n = 0$, ou $a = \frac{1}{1 - xx}$, $-b = \frac{2axx}{1 - xx}$, $c = \frac{4bxx}{1 - xx}$, $-d = \frac{6cxx}{1 - xx}$, &c. Par conséquent $S = \frac{x^z}{1 - xx.z} - \frac{2Axx}{1 - xx.z + 2} + \frac{4Bxx}{1 - xx.z + 4} - \frac{6Cxx}{1 - xx.z + 6} + \frac{8Dxx}{1 - xx.z + 8} -$ &c.

Si l'on suppose $x = \frac{1}{5} = .2$, les 8 premiers termes de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 +$ &c. donneront,

20000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
266.	66666.	66666.	66666.	66666.	66667
6.	40000.	00000.	00000.	000 0.	00000
	18285.	71428.	57142.	85714.	28571
	568.	88888.	88888.	88888.	88889
	18.	61818.	18181.	81818.	18182
		63015.	38461.	53846.	15385
		2184.	53333.	33333.	33333
20273.	25540.	54002.	22675.	10267.	51027

Et en mettant la neuviéme valeur 17 de z dans S, on aura $\frac{0^{10}.32768}{24.17} - \frac{2A}{24.19} + \frac{4B}{24.21} - \frac{6C}{24.23} + \frac{8D}{24.25} -$ &c. ce qui donne

+ 80.	31372.	54901.	96078
	279.	56601.	74401
		4051.	68141
		1.	07803
			41
+ 80.	31652.	15556.	46464
—	35228.	35758.	39758
+ 79.	96423.	79798.	06706

— 35225.	31819.	74544
3.	03876.	10591
	62.	52595
		2028
— 35228.	35758.	39758

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 20273. 25540. 54082. 19098. 90065. 57733. pour la somme de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ &c.

La somme des 8 premiers termes de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{8}x^8 +$ &c. sera

02000.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
40.	00000.	00000.	00000.	00000.	00000
1.	06666.	66666.	66666.	66666.	66667
	3200.	00000.	00000.	00000.	00000
	102.	40000.	00000.	00000.	00000
	3.	41333.	33333.	33333.	33333
		11702.	85714.	28571.	42857
		409.	60000.	00000.	00000
02041.	09972.	60112.	45714.	28571.	42857

Et en mettant la neuviéme valeur 18 de z dans la somme S, on aura $\frac{0^{11}.65536}{24.18} - \frac{2A}{24.20} + \frac{4B}{24.22} - \frac{6C}{24.24} + \frac{8D}{24.26} -$ &c. ce qui donne

+ 15. 17037. 03703. 70370
47. 88627. 01085
639. 50680
15861
6

+ 15. 17084. 92970. 38002
— 6321. 48656. 48282

+ 15. [illegible]763. 44313. 89720

— 6320. 98765. 43210
49881. 53136
9. 51647
289

— 6321. 48656. 48282

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donnera 02041. 09972. 60127. 56477. 72885. 32577. pour la somme de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 +$ &c. laquelle étant ajoutée à celle de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 +$ &c. donnera A, 22314. 35513. 14209. 75576. 62950. 90310. pour la somme de la suite $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 +$ &c. & en la retranchant de ladite somme, on aura B, 18232. 15567. 93954. 62621. 17180. 25156. pour la somme de la suite $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.

Si l'on suppose à présent $x = \frac{1}{10} = 1$, en prenant huit termes de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 +$ &c. on aura

10000. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000
33. 33333. 33333. 33333. 33333. 33333
20000. 00000. 00000. 00000. 00000
142. 85714. 28571. 42857. 14286
1. 11111. 11111. 11111. 11111
909. 09090. 90909. 09091
7. 69230. 76923. 07691
6666. 66666. 66666

10033. 53477. 31075. 58004. 21800. 42178

Et en mettant la neuviéme valeur 17 de z dans S, on aura $\frac{0^{14}.1}{99.17} - \frac{2A}{99.19} + \frac{4B}{99.21} - \frac{6C}{99.23} + \frac{8D}{99.25} -$ &c. ce qui donne

+

+ 59. 41770. 64765
12. 15521
10

+ 59. 41782. 80296
— 6317. 70416

+ 59. 35464. 09880

— 6317. 67214
3202

— 6317. 70416.

Ce nombre étant ajouté à la somme ci-dessus, donne 10033. 53477. 31075. 58063. 57265. 52058. pour la somme de la suite $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 +$ &c.

Or si l'on prend les huit premiers termes de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 +$ &c. on aura

00500. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000
2. 50000. 00000. 00000. 00000. 00000
1666. 66666. 66666. 66666. 66666
12. 50000. 00000. 00000. 00000
10000. 00000. 00000. 00000
83. 33333. 33333. 33333
71428. 57142, 85714
625. 00000. 00000

00502. 51679. 26750. 72053. 57142. 85713

Et en mettant la neuviéme valeur 18 de z dans la somme S, on aura $\frac{0^{15}.1}{99.18} - \frac{2A}{99.20} + \frac{4B}{99.22} - \frac{6C}{99.24} +$ &c. ce qui donne

+ 5. 61167. 22783
1. 04103

+ 5. 61168. 26886
— 566. 83821

+ 5. 60601. 43065

— 566. 83558
263

— 566. 83821

Cette différence étant ajoutée au nombre ci-dessus, donnera 00502. 51679. 26750. 72059. 17744. 28778. pour la somme de la suite $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 +$ &c.

Les sommes des deux suites donneront C. 10536. 05156. 57826. 30122. 75009. 80836. pour la somme de la suite de $x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 +$ &c. ou pour le logarithme hyperbolique de $\frac{9}{10}$, & leur différence D. 09531. 01798. 04324. 86004. 39521. 23280. pour la somme de la suite $x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 +$ &c. ou pour le logarithme hyperbolique de $\frac{11}{10}$.

De là puisque $\frac{1.2 \times 1.2}{.8 \times .9} = 2$; & comme les logarithmes de .8 & de .9 sont négatifs, en ajoutant la somme des logarithmes A & C au double de celui de B, on aura le logarithme de 2; & comme $\frac{2 \times 2 \times 2}{.8} = 10$, $.9 \times 10 = 9$, $.11 \times 10 = 11$, $1.2 \times 10 = 12$, on aura

Nomb.	*Logarithmes hyperboliques.*
2.	, 69314. 71805. 59945. 30941. 72321. 21458
9.	2, 19722. 45773. 36219. 38279. 04904. 73848
10.	2, 30258. 50929. 94045. 68401. 79914. 54684
11.	2, 39789. 52727. 98370. 54406. 19435. 77964
12.	2, 48490. 66497. 88000. 31022. 97094. 79840

EXEMPLE III.

376. Soit $x = \frac{1}{11}$, en prenant cinq termes de la suite $x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 +$ &c. on aura

06666. 66666. 66666. 66666. 66666. 66666
9. 87654. 32098. 76543. 20987. 65432
2633. 74485. 59670. 78189. 30038
.8. 36109. 47808. 47867. 26762
2890. 25498. 59721. 02265
06676. 56963. 12250. 76187. 73431. 91163

En mettant la sixiéme valeur 11 de z dans la somme S, elle viendra $\frac{1}{11.224.15 - 9} - \frac{2A}{224.13} + \frac{4B}{224.15} - \frac{6C}{224.17} + \frac{8D}{224.19} - \frac{10E}{224.21} +$ &c. ainsi

+ 10. 55693. 78546. 05893	− 725. 06441. 30910
86317. 19203	136. 00392
25565	54
+ 10. 55694. 64863. 50661	− 725. 06577. 31356
− 725. 06577. 31356	
+ 10. 54969. 58286. 19305	

Ce nombre étant ajouté à la ſomme précédente, donnera 06676. 56963. 12261. 31157. 31718. 10468. pour la ſomme demandée, laquelle eſt le logarithme de $\sqrt{\frac{8}{7}}$, & par conſéquent le double de cette ſomme étant retranché du logarithme de 8, donnera 1, 94591. 01490. 55313. 30510. 53527. 43440. pour le logarithme de 7.

Il y a d'autres ſuites pour trouver le logarithme de 7, & des autres nombres premiers qui convergent plus vîte que celles dont on s'eſt ſervi ici; mais comme c'eſt principalement aux ſuites qui ne convergent que très-lentement qu'il faut appliquer la méthode des Différences, on a choiſi celles qui convenoient le mieux à notre ſujet.

EXEMPLE IV.

377. Soit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 -$ &c. dont les ſignes ſont alternativement poſitifs & négatifs; en changeant cette ſuite en les deux ſuivantes $x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{13}x^{13} +$ &c. & $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{11}x^{11} +$ &c. dont le terme général de l'une & de l'autre eſt $\frac{x^z}{z}$, 1, 5, 9, 13, &c. les valeurs de z dans la premiere, & 3, 7, 11, 15, &c. dans la ſeconde.

En comparant $\frac{x^z}{z}$ avec le terme général T, on aura $m = 0$, $n = 4$, $v = x$, & $a - av^n = 1$, $b - bv^n + nav^n = 0$, $c - cv^n + 2nbv^n = 0$, $d - dv^n + 3ncv^n = 0$, ou $a = \frac{1}{1 - x^4}$, $-b = \frac{4ax^4}{1 - x^4}$, $c = \frac{8bx^4}{1 - x^4}$, $-d = \frac{12cx^4}{1 - x^4}$, &c.

Par conſéquent $S = \frac{x^z}{1 - x^4 . z} - \frac{4Ax^4}{1 - x^4 . z + 4} + \frac{8Bx^4}{1 - x^4 . z + 8} - \frac{12Cx^4}{1 - x^4 . z + 12} +$ &c.

Soit x la tangente d'un arc de cercle de 30 degrés, dont le rayon est l'unité, on aura $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, & en multipliant la suite par 6, pour avoir la valeur de la demi-circonférence, on aura $\sqrt{12} \times$ par $1 + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.81} + \frac{1}{13.729} +$ &c. pour la suite $x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ &c. ou si $A = \sqrt{12}$, $B = \frac{1}{9}A$, $C = \frac{1}{9}B$, $D = \frac{1}{9}C$, &c. cette suite deviendra $A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{9}C + \frac{1}{13}D + \frac{1}{17}E +$ &c. dont la somme des 13 premiers termes est A. 3, 54623. 31721. 82093. 00410. 46758. 28940. 16197. 40688. & en mettant la quatorziéme valeur 53 de z dans la somme S, elle deviendra $\frac{\sqrt{12}}{8.53.3^{-49}} - \frac{4A}{8.57} + \frac{8B}{8.61} - \frac{12C}{8.65} + \frac{16D}{8.69} -$ &c. ce qui donne

— 25375. 21915. 89785. 52857. 74518
9. 59970. 45998. 65782. 92222
952. 91886. 04194. 74183
1. 60424. 05057. 56690
381. 70957. 17598
1. 16361. 96900
427. 92238
1. 82397
876
4

— 25384. 82840. 88477. 15641. 87626

+ 28. 92774. 98412. 35550. 25782. 95001
415. 98719. 93275. 17259. 96304
27825. 23072. 42486. 46151
37. 12670. 88475. 11981
7549. 36708. 59138
20. 52201. 99871
6912. 59222
27. 48125
12471
64

+ 28. 93191. 24994. 72138. 69855. 28328
— 25384. 82840. 88477. 15641. 87626

+ 28. 67806. 42153. 83661. 54212. 40702

Cette différence étant ajoutée à la somme A, donnera B. 3. 54623. 31721. 82121. 68216. 88912. 12601. 70410. 81390. pour la somme de la suite $x + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 +$ &c.

En supposant de même que ci-dessus, $A = \frac{1}{3}\sqrt{12}$, $B = \frac{1}{9}A$, $C = \frac{1}{9}B$, &c. la suite $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{11}x^{11} +$ &c. deviendra $\frac{1}{3}A + \frac{1}{7}B + \frac{1}{11}C + \frac{1}{15}D +$ &c. dont la somme des 13 premiers termes sera C. 40464. 05185. 92319. 22928. 49418. 81754. 85827. 63949. & en mettant la quatorziéme valeur 55 de z dans la somme S, elle deviendra $\frac{\sqrt{12}}{8.55.3^{51}} - \frac{4A}{8.59} + \frac{8B}{8.63} - \frac{12C}{8.67} + \frac{16D}{8.71} -$ &c. ce qui donne

— 7874. 52871. 89804. 01456. 93356

2. 79833. 99854. 23028. 23629

262. 75492. 82087. 35045

42076. 05225. 24282

95. 66362. 77054

27971. 82097

98. 98385

40710

189

— 7877. 32969. 07323. 06231. 74747

\+ 9. 29194. 38883. 96873. 71918. 15970

124. 99251. 93488. 95261. 22117

7882. 64784. 62620. 51370

9. 97803. 52484. 32976

1934. 53113. 80427

5. 03492. 77739

1629. 42646

6. 24222

2736

13

\+ 9. 29319. 46028. 54890. 40526. 50216

— 7877. 32969. 07323. 06231. 74747

\+ 9. 21442. 13059. 47567. 34294. 75469

Cette différence étant ajoutée à la somme C, donnera D. 40464. 05185. 92328. 44370. 62478. 29322. 20122. 39418. pour la somme de la suite $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{11}x^{11} +$ &c. Par conséquent la différence entre les sommes B & D, donnera 3,14159 26535. 89793. 23846. 26433. 83279. 50288. 41972. pour la demi-circonférence, vrai dans toutes les figures.

N. B. En prenant seulement la somme des treize premiers termes de la premiere suite, comme on vient de faire, on épargne vingt termes; & si l'on en prenoit davantage, on épargneroit beaucoup plus.

PROBLEME XXVII.

378. *Soit* $S = T \times$ *par* $a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z.\overline{z+n}} + \frac{d}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}$ $+$ *&c. la somme d'une suite dont* T *est le terme général; l'on demande la relation entre deux termes successifs* T, $\acute{T}$, *de cette suite.*

En mettant $\acute{S}$, $\acute{T}$, $z+n$, pour S, T, z, on aura $\acute{S} = \acute{T} \times$ par $a + \frac{b}{z+n} + \frac{c}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}} + \frac{d}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+3n}} +$ &c. Par conséquent la différence entre S, $\acute{S}$, donnera la relation demandée.

EXEMPLE I.

379. Soit $T, \overline{z-m} + \overline{p-1}, z\acute{T} = 0$, la relation des termes successifs d'une suite, on aura $\acute{T} = \frac{m}{\overline{p-1}.z} - \frac{1}{p-1} \times T$; cette valeur étant mise dans celle de $\acute{S}$, donnera

$$\frac{\acute{S}}{T} = \begin{cases} \frac{ma}{p-1} + \frac{mb}{\overline{p-1}.z.\overline{z+n}} + \frac{mc}{\overline{p-1}.z\ldots\overline{z+2n}} + \frac{md}{\overline{p-1}.z\ldots\overline{z+3n}} + \text{\&c.} \\ \frac{-1}{p-1} \times \text{par } a + \frac{b}{z+n} + \frac{c}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}} + \frac{d}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+3n}} + \text{\&c.} \end{cases}$$

Or cette derniere partie de la valeur de $\acute{S}$, est $= \frac{-a}{p-1} + \frac{ma-b}{\overline{p-1}.z} + \frac{\overline{m+n}, b-c}{\overline{p-1}.z.\overline{z+n}} + \frac{\overline{m+2n}, c-d}{\overline{p-1}.z\ldots\overline{z+2n}} +$ &c.

Par conséquent $S - \acute{S}$, ou $T = T \times \frac{ap}{p-1} + \frac{pb-ma}{\overline{p-1}.z} + \frac{pc-b, \overline{m+n}}{\overline{p-1}.z.\overline{z+n}} + \frac{pd-c, \overline{m+2n}}{\overline{p-1}.z\ldots\overline{z+2n}} +$ &c.

D'où en faisant $\frac{ap}{p-1} = 1$, $pb - ma = 0$, $pc - b, \overline{m+n}$

$= 0$, $pd - c, \overline{m+2n} = 0$, on aura $a = \frac{p-1}{p}$, $b = \frac{ma}{p}$, $c = \frac{b, \overline{m+n}}{p}$, $d = \frac{c, \overline{m+n}}{p}$, &c.

Par conséquent la somme de cette suite sera $S = \frac{p-1}{p} T + \frac{A}{p} \times \frac{m}{z} + \frac{B}{p} \times \frac{m+n}{z+n} + \frac{C}{p} \times \frac{m+2n}{z+2n} + \frac{D}{p} \times \frac{m+3n}{z+3n} +$ &c.

Soit par exemple $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. la suite proposée; en faisant $a = 1$, $b = \frac{1}{3} a$, $c = \frac{3}{5} b$, $d = \frac{5}{7} c$, &c. l'on verra que si $z - 2$ exprime un des numerateurs quelconques, z exprimera le dénominateur correspondant; ainsi $\frac{z-2}{z} T = - \dagger$, ou $T, \overline{z-2} + z \dagger = 0$, exprimera la relation entre deux termes successifs de cette suite; & les valeurs de z sont 3, 5, 7, 9, &c.

En comparant cette équation avec $T, \overline{z-m} + \overline{p-1}, z \dagger = 0$, on a $m = 2$, $p - 1 = 1$, ou $p = 2$, $n = 2$. Par conséquent $S = \frac{1}{2} T + \frac{A}{2} \times \frac{2}{z} + \frac{B}{2} \times \frac{4}{z+2} + \frac{C}{2} \times \frac{6}{z+4} + \frac{D}{2} \times \frac{8}{z+6} +$ &c.

Ce qui est la même valeur que nous avons trouvée ci-devant pour la même suite.

EXEMPLE II.

380. Soit $\dagger = \frac{z-p}{z} \times \frac{z-m}{z-m+n} \times T$, la relation des termes successifs, on aura $\dagger = \overline{1 - \frac{p}{z}} \times \frac{z-m}{z-m+n} T$. Or si l'on suppose que la valeur de S soit multipliée par $\underline{z-m}$, celle de $\mathfrak{S}$ sera multipliée par $z - m + n$. Donc $S = \overline{z-m}, T \times$ par $a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z . z+n} + \frac{d}{z \ldots z+2n} +$ &c. & $\mathfrak{S} = \overline{z-m+n}, \dagger \times$ par $a + \frac{b}{z+n} + \frac{c}{z+n . z+2n} + \frac{d}{z+n \ldots z+3n} +$ &c.

En mettant la valeur de $\dagger$, on aura $\mathfrak{S} = \overline{z-m}, T \times$ par

$$\begin{cases} a + \frac{b}{z+n} + \frac{c}{z+n . z+2n} + \frac{d}{z+n \ldots z+3n} + \text{\&c.} \\ - \frac{pa}{z} - \frac{pb}{z . z+n} - \frac{pc}{z \ldots z+2n} - \frac{pd}{z \ldots z+3n} - \text{\&c.} \end{cases}$$

Et comme la premiere partie de cette valeur est égale à $a + \frac{b}{z} + \frac{c-nb}{z . z+n} + \frac{d-2nc}{z \ldots z+3n} +$ &c.

Par conséquent $\dot{S} = \overline{z - m}, T \times$ par $a + \frac{b - pa}{z} + \frac{c - b, \overline{p + n}}{z . \overline{z + n}} + \frac{d - c, \overline{p + 2n}}{z \ldots \overline{z + 2n}} +$ &c.

Par conséquent la différence entre S, $\dot{S}$, divisée par $\overline{z - m}$, T donne $\frac{1}{z - m} = \frac{ap}{z} + \frac{\overline{p + n}, b}{z . \overline{z + n}} + \frac{\overline{p + 2n}, c}{z \ldots \overline{z + 2n}} + \frac{\overline{p + 3n}, d}{z \ldots \overline{z + 3n}} +$ &c.
Et comme $\frac{1}{z - m} = \frac{1}{z} + \frac{m}{z . \overline{z + n}} + \frac{m . \overline{m + n}}{z \ldots \overline{z + 2n}} + \frac{m . \overline{m + n} . \overline{m + 2n}}{z \ldots \overline{z + 3n}} +$ &c.

Si l'on compare les coefficiens des termes correspondans des deux valeurs de $\frac{1}{z - m}$, on aura $1 = ap$; $m = \overline{p + n}, b$; $m . \overline{m + n} = \overline{p + 2n} . c$ $m . \overline{m + n} . \overline{m + 2n} = \overline{p + 3n}, d$, ou

$$a = \frac{1}{p}.$$
$$b = \frac{m}{p + n}.$$
$$c = \frac{m . \overline{m + n}}{p + 3n}.$$
$$d = \frac{m . \overline{m + n} . \overline{m + 2n}}{p + 4n}.$$

Et si l'on fait $A = \overline{z - m}, T$; $B = \frac{m}{z} A$, $C = \frac{m + n}{z + n} B$, $D = \frac{m + 2n}{z + 2n} C$, &c. on aura $S = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + n} + \frac{C}{p + 2n} + \frac{D}{p + 3n}$ $\frac{E}{p + 4n} +$ &c. pour la somme de la suite dont l'équation qui exprime le rapport des termes successifs est $\dot{T} = \frac{z - p}{z} \times \frac{z - m}{z - m + n}$ T.

Soit par exemple $1 + \frac{1 . 1}{2 . 3} A + \frac{3 . 3}{4 . 5} B + \frac{5 . 5}{6 . 7} C + \frac{7 . 7}{8 . 9} D +$ &c. la suite proposée, laquelle exprime là demi-circonférence d'un cercle dont le diametre est l'unité. Si $z - 1$ exprime un des numerateurs quelconques, z, $z + 1$ expriment les dénominateurs ; ainsi $\dot{T} = \frac{z - 1}{z} \times \frac{z - 1}{z + 1}$ T exprime la relation des termes successifs, & les valeurs de z sont 2, 4, 6, 8, &c.

D'où l'on a $p = m = 1$, $n =$ [illegible], & $A = \overline{z - 1}, T$, $B = \frac{1}{z} A$, $C = \frac{3}{z + 2} B$, $D = \frac{5}{z + 4} C$, $E = \frac{7}{z + 6} D$, &c. Par conséquent $S = A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{5} C + \frac{1}{7} D + \frac{1}{9} E +$ &c.

Ceux

Ceux qui voudront approfondir davantage ce sujet, n'ont qu'à lire l'excellent Livre de M. Stirling, intitulé *Methodus differentialis*, à qui je suis redevable de ce que j'écris ici sur ce sujet.

Application de la Méthode des Différences à la Quadrature des courbes.

Quand on ne peut pas trouver la fluente d'une expression fluxionaire en un nombre de termes fini, ni la réduire à la quadrature des sections coniques, & que l'on est obligé de se servir des suites infinies, il arrive fort souvent que la suite ne converge que lentement ou point du tout ; & alors il n'y a point d'autre moyen de résoudre la question, que par approximation, ce qui ne se peut mieux faire que par le problême suivant ; & pour faciliter les opérations, on donnera une table, laquelle contiendra des espaces compris entre deux ou plusieurs ordonnées ; & pour ne rien laisser à deviner au lecteur, on donnera plusieurs exemples pour bien concevoir l'usage de cette table.

PROBLEME XXVIII.

381. *Etant donné plusieurs ordonnées* a, b, c, d, e, *&c. d'une courbe, l'on demande de trouver l'espace compris entre la premiere & la derniere de ces ordonnées.*

En supposant $A = b - a$, $B = c - 2b + a$, $C = d - 3c + 3b - a$, $D = e - 4d + bc - 4b + a$, &c. c'est-à-dire, si A, B, C, D, E, &c. expriment la premiere des premiere, seconde, troisiéme, quatriéme différences, & l'inconnue z, la distance de la premiere ordonnée à une autre quelconque, on aura $a + Az + Bz \times \frac{z-1}{2} + Cz \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + Dz \times \frac{z-1}{1} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4} +$ &c. pour la valeur de cette ordonnée par le vingt-uniéme problême, qui sera toujours déterminée lorsque la distance z est connue ; par exemple, si $z = 0$, on aura le premier terme a ; si $z = 1$, on aura $a + A$, ou parce que $A = b - a$, le second terme b ; si $z = 2$, on aura $a + 2A + B$, ou c, c'est-à-dire le troisiéme terme, & ainsi des autres.

Or si l'on multiplie l'ordonnée $a + Az +$ &c. par la flu-

xion de la base z, & qu'on prenne la fluente, on aura $az + \frac{1}{2}Azz + \frac{1}{12}Bzz \times \overline{2z-3} + \frac{1}{24}C \times \overline{zz-2z}^2 + \frac{1}{720}Dzz \times \overline{6z^3 - 45zz + 110z - 90}$ + &c. pour la valeur de l'espace compris entre la premiere ordonnée & celle dont la distance est exprimée par z; cette valeur sera toujours exprimée par autant de termes qu'il y a de valeurs de z, en y comprenant o, comme on va voir.

Exemple.

Soit $z = 1$, l'expression ci-dessus deviendra $az + \frac{1}{2}Bzz$, ou en gardant z, $\frac{a+b}{2}z$. Si $z = 2$, on aura $az + \frac{1}{2}Azz + \frac{1}{12}Bzz \times \overline{2z-3}$, d'où en gardant z au lieu d'une de ces valeurs, & en y mettant celles de A, B, marquées ci-dessus, il viendra $a + b - a + \frac{c-2b+a}{6}$ multiplié par z, ou bien $\frac{a+4b+c}{6} \times z$, après la réduction faite. Mais si $z = 3$, on aura $az + \frac{1}{2}Azz + \frac{1}{12}Bzz \times \overline{2z-3} + \frac{1}{24}C \times \overline{zz-2z}^2$; en gardant z au lieu d'une de ses valeurs, & mettant celles de A, B, C, il viendra $a + \frac{3b-3a}{2} + \frac{3c-6b+3a}{4} + \frac{a+3b-3c+d}{8}$, le tout multiplié par z, ce qui donnera après la réduction faite $\frac{a+3b+3c+d}{8} \times z$.

On trouvera de la même maniere la valeur des espaces lorsqu'il y a plusieurs ordonnées; mais pour épargner la peine de faire de longs calculs, on a construit la table suivante, où A exprime toujours la somme de la premiere & de la derniere ordonnée, B la somme de la seconde & de la pénultiéme, C celle de la troisiéme & l'antepénultiéme, ainsi du reste, & la derniere lettre les deux du milieu, si elles sont en nombre pair, ou celui du milieu si leur nombre est impair, & la lettre R exprime la base ou la distance entre la premiere & la derniere ordonnée.

Nomb. des ordonnées.	*Superficies.*
III.	$\frac{A + 4B}{6} R.$
IV.	$\frac{A + 3B}{8} R.$
V.	$\frac{7A + 32B + 12C}{90} R.$
VI.	$\frac{19A + 75B + 50C}{288} R.$
VII.	$\frac{41A + 216B + 27C + 272D}{840} R.$
VIII.	$\frac{751A + 3577B + 1323C + 2989D}{17280} R.$
IX.	$\frac{989A + 5888B - 928C + 10496D - 4540E}{28350} R.$
X.	$\frac{2857A + 15741B + 1080C + 19344D + 5778E}{89600} R.$

Pour entendre l'usage de cette table, nous supposerons l'ordonnée $\frac{1}{1+x}$ de l'hyperbole équilaterale par rapport aux asymptotes, & il s'agit de trouver l'espace entre la premiere ordonnée qui est l'unité, & celle qui est distante de ce premier d'une unité; ou, ce qui revient au même, il s'agit de trouver le logarithme hyperbolique du nombre 2.

Nous supposerons neuf ordonnées, dont les distances ou les valeurs de x seront $\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$, & en mettant ces valeurs au lieu de x dans $\frac{1}{1+x}$, on aura $\frac{8}{8}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{8}{12}, \frac{8}{13}, \frac{8}{14}, \frac{8}{15}, \frac{8}{16}$; ce qui donne $A = \frac{8}{8} + \frac{8}{16} = \frac{3}{2}$, $B = \frac{8}{9} + \frac{8}{15} = \frac{64}{45}$, $C = \frac{8}{10} + \frac{8}{14} = \frac{48}{35}$, $D = \frac{8}{11} + \frac{8}{13} = \frac{192}{143}$, $E = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. En substituant ces valeurs dans la septiéme formule, ou opposée au nombre IX, & ayant l'unité pour la base R, on trouvera 69314721 pour la valeur cherchée, laquelle est vraie, excepté la derniere figure.

On trouvera d'autres exemples ci-après, où on traite du mouvement dans un milieu de résistance.

Messieurs Cotes & Stirling ont donné la même table dans leurs ouvrages sans en avoir donné la démonstration; & comme

elle est d'un grand usage dans les problêmes les plus difficiles ; on a cru faire plaisir au lecteur en lui faisant voir comme elle a été construite, & son application.

PROBLEME XXIX.

Fig. 201. *Si l'on suppose qu'un corps* Q *soit fixé en* B *à une ligne inflexible* D B *sans pesanteur, l'on demande la* distance *du centre d'oscillation d'un autre corps* P *fixé à la même ligne, au point de suspension* D, *ensorte que cette ligne tourne avec la plus grande vîtesse possible.*

Soient D B $= a$, D A $= x$, les distances des centres d'oscillation des corps Q (c), & P (d) au point de suspension D; & soit n la distance du centre d'oscillation commun C de ces

* Art. 188. corps au point D, on aura * $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$. Or il est évident que la vîtesse du pendule augmente lorsque la longueur D C (n) diminue ; c'est pourquoi la valeur de n doit être un moindre, ce qui donne $\frac{2acdx + ccxx - aacd}{\overline{ad + cx}^2} = 0$. D'où l'on tire $xx + \frac{2ad}{c}x - \frac{aad}{c} = 0$, ou $x = \frac{a}{c}\sqrt{cd + dd} - \frac{ad}{c}$.

COROLLAIRE I.

382. De là il suit que si l'on substitue cette valeur de x dans $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, on trouvera $n = \frac{2a}{c}\sqrt{cd + dd} - \frac{2ad}{c}$; ce qui fait voir que $n = 2x$.

N. B. Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, on aura $n = a$; & lorsque x est infinie, n sera aussi infinie ; & par con-

* Art. 181. séquent cette équation ne contient qu'un moindre, * & point de plus grand.

PROBLEME XXX.

383. *La distance* (n) *du centre d'oscillation d'une sphere au point de suspension* D *étant donnée, aussi-bien que le diametre* ($2a$) *de la sphere, trouver la distance* (d) *de la sphere au point de suspension.*

* Art. 296. A cause que * $n = \frac{5dd + 10ad + 7aa}{5a + 5d}$, on aura $5an + 5dn = 5dd + 10ad + 7aa$, ou $dd + 2ad - nd = an - \frac{7}{5}aa$.

D'où en extrayant la racine quarrée, on trouvera $d = \frac{1}{2} n - a + \sqrt{\frac{1}{4} nn - \frac{2}{3} aa}$ pour la valeur cherchée.

PROBLEME XXXI.

384. *Soient le centre commun* C *d'oscillation de deux corps* P, Q, *& celui du corps* Q *donnés ; trouver la* distance DA *du corps* P *au point de suspension* D.

La même chose étant supposée que dans l'article 304, on aura $n = \frac{aad + cxx}{ad + cx}$, ou $xx - nx = \frac{adn - aad}{c}$. D'où en extrayant la racine quarrée, on trouvera $x = \frac{1}{2} n + \sqrt{\frac{adn - aad}{c} + \frac{1}{4} nn}$ pour la valeur demandée.

SECTION VI.

Des Roulettes ou Cycloïdes.

COmme les cycloïdes sont d'un grand usage pour la perfection des Horloges, on a cru devoir placer leur explication immédiatement après la section du centre d'oscillation ; & comme leurs propriétés sont fort remarquables, il m'a paru qu'il conviendroit mieux d'en faire une section séparée, pour mieux s'appercevoir de leur connexion, que de les placer dans les différentes sections, comme on a fait à l'égard des autres courbes.

DEFINITION.

Si l'on conçoit qu'un cercle GMT roule sur une ligne droite ou courbe FGB, ensorte que toutes les parties de sa circonférence soient successivement appliquées à cette ligne, & que le point M placé dans quelque diametre de cercle, décrive une courbe EMA pendant ce roulement, le tout dans le même plan ; cela posé, *Fig. 202, 203, 204.*

La ligne courbe EMA est nommée *roulette ;* la ligne FGB sur laquelle le cercle roule, la *base ;* le cercle mobile GMT, le *cercle* générateur ; & la droite AB qui passe par le point tou-

chant B, & le point décrivant A, & en même tems par le centre du cercle, est nommée l'*axe*.

* Fig. 202. Lorsque la base E G B est une droite, la courbe * E M A F est aussi nommée *cycloïde*; & lorsque la base est un arc de cercle, une épicycloïde.

Nous ne considérons ici que les roulettes dont la base est une droite, ou un arc de cercle.

COROLLAIRE I.

Fig. 202. 203. 385. De là il suit; I. que la partie E G de la base, entre le point de commencement E & le point touchant G, est continuellement égale à l'arc M G du cercle générateur entre ce même point E & le point décrivant M; & l'autre partie G B de la base, égale à l'arc M T, qui est la différence entre la demi-circonférence G M T & l'arc G M.

Fig. 202. II. Si la ligne M Q perpendiculaire sur l'axe A B de la roulette dont la base est une droite, rencontre le diametre G T du cercle générateur en P, il est clair que B G, ou son égale Q P, sera = l'arc M T; & par conséquent Q M = P M + l'arc M T.

III. La corde M G, dans toutes les roulettes, est perpendiculaire à la tangente M T en M. Car la différence entre les vîtesses

* Art. 189. angulaires des points M & G, est comme le rayon * G M, & est aussi dans la direction perpendiculaire à ce rayon, aussi-bien que dans la direction de la tangente M T.

COROLLAIRE II.

Fig. 202. 203. 386. Lorsque le point décrivant M est placé dans la circonférence du cercle générateur, si la droite b G exprime la fluxion de la partie E G de la base, ou de son égale de l'arc G M, la perpendiculaire ba sur G M exprimera la fluxion de la corde M T. Car soit la perpendiculaire M P $= y$ sur G T, & G T $= a$, T P $= x$, on aura T M $= \sqrt{ax}$, & $\frac{a\dot{x}}{2y} =$ G b = à la fluxion de l'arc M G; & à cause des triangles semblables T M P, G ba, on a T M $(\sqrt{ax})$: P M (y) :: G b $\left(\frac{a\dot{x}}{2y}\right)$: $ba = \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax}} =$ G c.

COROLLAIRE III.

387. Il est évident que TP : TM ; ou TM : TG :: $\dot{x}$: $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{ax}}$ = à la fluxion ($\dot{v}$) de l'arc AM ; & par conséquent la fluente $2\sqrt{ax} = 2$ TM = l'arc AM, & $2a$ = AME. Fig. 202.

Si la ligne TR est perpendiculaire sur la ligne OM tirée par le centre O de l'arc EGB, & le point décrivant M ; & si OY est perpendiculaire sur TM prolongée, les triangles semblables OMY, TMR, aussi-bien que TGM, TOY, donneront TG (a) : TM ($\sqrt{ax}$) :: GO (b) : MY $= \frac{b\sqrt{ax}}{a}$, & MY $\left(\frac{b\sqrt{ax}}{a}\right)$: OM (z) :: MR ($\dot{z}$) : $\frac{az\dot{z}}{b\sqrt{ax}}$ = à la fluxion ($\dot{v}$) de l'arc AM. Or comme OP $= b + a - x$, & $\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{a+b}^2 - ax - 2bx = zz$, ou $z\dot{z} = \frac{a+2b}{2}\dot{x}$, il s'ensuit que $\left(\frac{az\dot{z}}{b\sqrt{ax}}\right) = \frac{a+2b}{b} \times \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax}} = \dot{v}$, dont la fluente $\frac{a+2b}{b}\sqrt{ax}$ = arc AM, & $\frac{aa+2ab}{b}$ = AME. Fig. 203.

PROBLEME I.

388. *Trouver la longueur du rayon MD de la développée, mené par un point donné M.* Fig. 202. 203.

Puisque ba, ou son égale cG exprime la vitesse circulaire du point G à l'égard du rayon DG, & $\dot{v}$ celle du point M à l'égard du rayon MD, on aura $\dot{v} - c$G : $\dot{v}$ :: MG : MD. C'est pourquoi en substituant les valeurs de $\dot{v}$ * & de cG, on trouvera DM = 2 GM, figure 202. & DM $= \frac{a+2b}{a+b}$ GM, figure 203. Et en A ces rayons seront MD = 2 AB, & MD $= \frac{aa+2ab}{a+b}$. * Art. 386. 387.

COROLLAIRE.

389. De là il suit que $\overline{cG + \dot{v}} \times \frac{1}{2}$ GM sera la fluxion de l'espace EGM ; & comme $\dot{v} = 2c$G * figure 202, & que $\frac{1}{2}c$G × GM est la fluxion du segment circulaire GxM, on aura $\frac{3}{2}c$G × GM = à la fluxion de l'espace GEM, qui par conséquent * Art. 387.

est triple du segment circulaire GxM, & l'aire de la demi-roulette $BAME$, triple du demi-cercle générateur.

* Art. 387. Dans la figure 203 on a * $v = \frac{a+2b}{b}\ cG$, & ainsi $\frac{a+3b}{b} \times \frac{1}{2} Gc \times GM$, sera la fluxion de l'espace EGM; & par conséquent $EGM = \frac{a+3b}{b} \times GxM$, & $AMEGB = \frac{a+3b}{b} \times GxMTG$.

PROBLEME II.

390. *La même chose étant supposée, trouver la* nature *de la développée* F d I *de la roulette.*

Fig. 202. *Cas. I.* Soit FH perpendiculaire sur la base FB, & $= AB$; & soit sur FH, comme diametre, décrite la demi-circonférence de cercle FLH. Cela posé, si le rayon md de la développée
* Art. 388. rencontre la base en g, on aura * $gd = gm$; ainsi les arcs mg, FL, terminés par les lignes mp, dL paralleles à FB, seront égaux, aussi-bien que $Fg = Ld$. Or comme $Fg =$ l'arc mg, il s'ensuit que Ld est aussi $=$ l'arc FL; & comme cela arrive toujours, il est manifeste que la développée EdI est une autre roulette égale à la premiere, & dont le sommet est en F, & FH son axe.

Fig. 203. * Art. 388. *Cas II.* Soit tirée dk parallele à mt; cela posé, puisque * $md = \frac{a+2b}{a+b} mg$, on aura $md - mg = gd = \frac{b}{a+b} mg$; & à cause des triangles semblables gmt, gdk, on aura $gm : gt\ (a) :: dg\left(\frac{b}{a+b} mg\right) : gk = \frac{ab}{a+b}$, & $Og - gk = Ok = \frac{bb}{a+b}$. Donc les lignes Ok, kg sont constantes, & par conséquent les points k, d, g, seront toujours dans la circonférence de cercle du diametre kg.

C'est pourquoi si le cercle kdg roule sur l'arc fkI décrit du centre O avec le rayon $Ok = \left(\frac{bb}{a+b}\right)$, le point d décrira la développée, pendant que le point m décrit la roulette. D'où l'on voit que la développée fkI est aussi une roulette dont le sommet est en F, & dont OF est l'axe.

COROLLAIRE.

Fig. 204. 391. Si le cercle générateur TMG, au lieu de rouler sur la partie convexe d'un cercle, roule sur la partie concave BGE,

le

le ſommet A tombera alors entre les points B & O ; ce qui fait que A O (a) de poſitive qu'elle étoit, deviendra ici négative ; on aura par conſéquent * l'arc A M $= \frac{2b-a}{b}$ T M, E M A $=$ * *Art.* 387.
$\frac{2ba-aa}{b}$, le rayon de la développée * M $d = \frac{2ab+aa}{b-a}$, G $k =$ * *Art.* 388.
$\frac{ab}{b-a}$, & O $k = \frac{bb}{b+a}$.

PROBLEME III.

392. *Soit* A M E *la roulette ordinaire, ſa baſe* B E *poſée horizontalement, & ſon ſommet* A *vers le bas, l'on demande le* tems *de la deſcription d'un arc quelconque* A M, *par un corps preſſé par la ſeule gravité dans un milieu ſans réſiſtance.* Fig. 205.

Soit M P perpendiculaire ſur l'axe A B ; cela poſé, puiſque $\sqrt{AP}$ exprime la vîteſſe de la deſcente par A M, & $\sqrt{AP} = \frac{AN}{\sqrt{AB}} =$ * $\frac{\text{arc } AM}{2\sqrt{AB}}$, il s'enſuit, puiſque $2\sqrt{AB}$ eſt conſtant, que * *Art.* 387.
les vîteſſes ſont comme les longueurs parcourues ; & par conſéquent les tems ſont conſtans. *D'où l'on voit que ſi le corps commence ſon mouvement en quelque point quelconque* M *de la courbe, il arrivera toujours au point le plus bas* A *dans le même tems que le même corps, commençant ſon mouvement en* E, *décrira la demi-roulette* E M A.

COROLLAIRE.

393. Si A B $= a$, A P $= x$, $\sqrt{a-x}$ ($= \sqrt{BP}$) exprimera la vîteſſe acquiſe dans la deſcente par E M ; & $\frac{-a\dot{x}}{\sqrt{ax}}$ ſera la fluxion de l'arc E M. Or la fluxion de la longueur parcourue diviſée par la vîteſſe acquiſe à la fin du tems, ſera égale à la fluxion de ce tems. Donc $\dot{t} = \frac{-a\dot{x}}{\sqrt{ax}} \times \frac{1}{\sqrt{a-x}} = \frac{-a\dot{x}}{\sqrt{a}x\sqrt{ax-xx}}$; & comme $\frac{-a\dot{x}}{2\sqrt{ax-xx}}$ eſt la fluxion de l'arc de cercle B N ($= z$), on aura $t = \frac{2z}{\sqrt{a}}$; ou en nommant T le tems de la deſcente par la demi-roulette, c la demi-circonférence A N B, il viendra T $= \frac{2c}{\sqrt{a}}$.

Mais si l'on nomme B P, x : la fluxion $\dot{x}$ de la hauteur tombée B P, divisée par la vitesse $\sqrt{x}$, donnera $\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}}$ pour la fluxion du tems π de la descente par l'axe A B, dont la fluente $2\sqrt{x}$ sera $= \pi$, $2\sqrt{a} = \pi$ exprimera le tems de la descente entiere. Par conséquent $\pi : T :: (2\sqrt{a} : \frac{2c}{\sqrt{a}}) :: a : c$, & $\pi : 2T :: a : 2c$, c'est-à-dire *le tems de la descente d'un corps par l'axe* A B *est au tems de la description de la roulette entiere, comme le diametre d'un cercle est à sa circonférence.*

REMARQUE.

M. Huyghens a trouvé après plusieurs expériences réitérées qu'un corps tomboit de 15 pieds 1 pouce $1 + \frac{7}{9}$ de ligne, ou $\frac{19564}{1296}$ parties de pieds, dans une seconde de tems, dans la latitude de Paris. Or comme les tems écoulés sont entr'eux comme les racines quarrées des hauteurs tombées, on aura $\sqrt{\frac{19564}{1296}} : 1 :: \sqrt{a} : \pi = \sqrt{\frac{1296a}{19564}}$; & $1 : 3.1415926 :: (\pi =) \sqrt{\frac{1296a}{19564}} : T = 3.1415926 \sqrt{\frac{1296a}{19564}}$, ou $T = 0.80858 \sqrt{a}$, & $a = 1.52954$ T T.

Pour qu'un pendule décrive un arc de cycloïde, il faut que le fil de suspension se plie sur un autre arc de cycloïde *; & ainsi la longueur du pendule sera égale à la longueur de la demi-cycloïde, ou égale au double du * diametre du cercle générateur. Donc connoissant la longueur du pendule dans une certaine latitude qui fait ses vibrations dans un tems donné, on pourra trouver la hauteur qu'un corps tombe en un certain tems dans cette latitude, & au contraire connoissant la hauteur d'où un corps tombe dans un certain tems, on pourra trouver la longueur du pendule qui fait ses vibrations dans un tems donné.

* *Art.* 390.
* *Art.* 387.

Par exemple, voulant avoir la longueur d'un pendule à secondes dans la latitude de Paris, on aura $T = 1$, & $2a = 3.05908$, ou 3 pieds 0 : $8\frac{1}{2}$.

PROBLEME IV.

394. *Lorsque le point décrivant* M *n'est point dans la circon-*

férence du cercle générateur; trouver la longueur du rayon M D *de la développée, mené par un point donné* M.

Cas I. Soit la base B E une droite; outre la construction de la figure 202. soit de l'extrêmité m du diametre mn, dans lequel est placé le point décrivant, menée une perpendiculaire mp sur le diametre C P, qui passe par le point touchant G, & d'un point quelconque T de la tangente M T, la droite T R perpendiculaire sur la parallele M R à G P; cela posé, si G C, ou Cm $= a$, C M $= c$, nM $= d = a + c$, $mp = y$, C$p = a - x$, M G $= n$, les triangles semblables Cmp, C M P, donneront Cm (a) : C M (c) :: Cp $(a - x)$: C P $= \frac{ac - cx}{a}$ :: pm (y) : P M $= \frac{cy}{a}$. Ainsi G C + C P = G P $= a + \frac{ac - cx}{a} = \frac{da - cx}{a}$, dont la fluxion $\frac{c\dot{x}}{a}$ sera = M R. Or les triangles semblables G P M, T R M donnent M P $\left(\frac{cy}{a}\right)$: G M (n) :: M R $\left(\frac{c\dot{x}}{a}\right)$: M T $= \frac{n\dot{x}}{y}$, en supposant que M T exprime la fluxion de l'arc A M, & les triangles semblables baG, G P M, donnent G M (n) : G P $\left(\frac{da - cx}{a}\right)$ :: * bG $\left(\frac{n\dot{x}}{y}\right)$: $ba = \frac{ad - cx}{ny}\dot{x}$. Par conséquent T M * Art. 308. 309.
$-\, ba$ $\left(\frac{nn - ad + cx}{ny}\dot{x}\right)$: M G (n) :: M T $\left(\frac{n\dot{x}}{y}\right)$: M D $= \frac{n^3}{nn - ad + cx}$.

Cas II. Outre la construction de la figure 203. soit du point G tirée G Q perpendiculaire sur O Y, & de l'extrêmité m du diametre dans lequel est placé le point décrivant, soit aussi tirée mp perpendiculaire sur O G P: cela posé, si O C $= f$, O G $= b$, O M $= z$, & le reste comme dans la figure précédente, on aura, à cause des triangles semblables cpm, C P M, P M $= \frac{cy}{a}$, G P $= \frac{ad - cx}{a}$, & O P $= f + \frac{ac - cx}{a}$; ainsi $(\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2)$. $zz = \frac{ccyy}{aa} + \frac{\overline{af + ac - cx}^2}{aa}$, dont la fluxion $z\dot{z} = \frac{ccy\dot{y}}{aa} - \frac{afc\dot{x} + acc\dot{x} - ccx\dot{x}}{aa}$ deviendra $z\dot{z} = \frac{fc\dot{x}}{a}$, parce que $y\dot{y} = a\dot{x} - x\dot{x}$, à cause du cercle. Or les triangles semblables G P M, O Q G, donnent M G (n) : M P $\left(\frac{cy}{a}\right)$ :: O G (b) : G Q = M Y = $\frac{bcy}{na}$, & les triangles semblables O Y M, T R M, donnent Y M

Fig. 206.207.

Fig. 208.209.

$\left(\frac{bcy}{na}\right)$: MO $(\dot{z})$: : MR $(\dot{z})$: MT $= \frac{naxz}{bcy} = \frac{fn\dot{x}}{by}$. Et comme nous avons trouvé * $ba = \frac{ad - cx}{ny}\dot{x}$ dans la figure précédente, il s'ensuit que TM $-$ $ba \left(\frac{fnn - abd + bcx}{bny}\dot{x}\right)$: MG (n) : : MT $\left(\frac{fn\dot{x}}{by}\right)$: MD $= \frac{fn^3}{fnn - nbd + bcx}$.

* Cas I.

COROLLAIRE.

395. Lorsque CM $=$ Cm $(a = c)$, on aura $d = (a + c) = 2a$, $nn = 4aa - 2ax$. Donc MD $= \frac{n^3}{nn - ad + cx}$, deviendra $= \frac{n^3}{2aa - ax} = 2n$; ce qui est la même chose que dans la figure 202. & MD $= \frac{fn^3}{fnn - abd + bcx}$, deviendra $= \frac{\overline{a+b} \times n^3}{\overline{a + \frac{1}{2}b} \times nn} = \frac{2a + 2b}{2a + b}n$, ce qui est encore la même chose que ce que nous avons trouvé ci-devant figure 203. pour le même cas, parce que nm est là $= a$, & ici $= 2a$.

PROBLEME V.

396. *Trouver la valeur de l'espace* BAMG.

* Art. 394. Cas I.

Puisque * TM $= \frac{fn\dot{x}}{by}$, & $ba = \frac{ad - cx}{ny}\dot{x}$, on aura $(\overline{\text{TM} + ba} \times \frac{1}{2}\text{GM} =) \frac{fnn\dot{x}}{2by} + \frac{ad\dot{x} - cx\dot{x}}{2y} = \dot{v}$ pour la fluxion de cet espace. Or comme $\overline{GM}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{CM}^2 + 2CG \times CP$, * CP $= \frac{ac - cx}{a}$, on aura $nn = dd - 2cx$, parce que $d = a + c$. En substituant cette valeur, on trouvera $\dot{v} = \frac{fdd + abd - 2cfx - bcx}{2by}\dot{x}$, ou en supposant $\frac{fdd + abd}{2b} = g$, & $\frac{2cf + bc}{2b} = h$; cette fluxion deviendra $\dot{v} = \frac{g\dot{x}}{y} - \frac{hx\dot{x}}{y}$. Mais si l'arc G$n$ $= u$, on aura à cause du cercle $x\dot{x} = a\dot{x} - y\dot{y}$, & $\frac{a\dot{x}}{y} = \dot{u}$; donc $\dot{v} = \frac{g\dot{u}}{a} - h\dot{u} + h\dot{y}$, dont la fluente sera $v = \frac{gu}{a} - hu + hy$ $=$ BAMG; & lorsque le point M arrive en E, le point G arrivera en F, & y sera $= 0$, $u =$ à la demi-circonférence nGm $= k$; & par conséquent $\left(\frac{gk}{a} - hk =\right) \frac{ddf + abd - 2acf - abc}{2ab} \times k =$ BAMEFGB.

* Art. 394. Cas I.

COROLLAIRE.

397. Si l'on ſuppoſe que le centre O s'éloigne à une diſtance infinie, enſorte que la baſe F G B devienne une droite, on aura (fig. 6. 7.) $\frac{3c}{2} = h$, $\frac{dd + ad}{2} = g$; & par conſéquent $\frac{dd + ad}{2a} u - \frac{3c}{2} u - \frac{3c}{2} y$ B A M G, & $\frac{dd + ad - 3ac}{2a} k =$ B A E F.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes décrites par le roulement d'un cercle ſur la partie convexe d'un autre arc de cercle, doit auſſi s'entendre des roulettes décrites dans la partie concave de l'arc. Or comme il n'y a point d'autre différence, ſinon que C M (c), *&* C G (a) *de poſitives qu'elles étoient deviennent alors négatives, on ne s'arrêtera pas à en donner une démonſtration particuliere.*

PROBLEME VI.

398. *Trouver la* valeur *de la ſurface décrite par la roulette ordi-* Fig. 205.
naire A M E, *autour de la tangente* A T *en* A.

Si A B $= a$, A P $= x$, 2 A N B $= c$, on aura $\frac{2cx}{a}$ pour la circonférence du rayon A P, & $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{ax}}$ pour la * fluxion de l'arc * Art. 387.
A M. Ainſi $\frac{2cx\dot{x}}{\sqrt{ax}}$ ſera la fluxion de la ſurface décrite par l'arc A M, dont la fluente $\frac{4cx}{3a}\sqrt{ax}$ ſera la valeur, & $\frac{4ac}{3}$ celle de la ſurface cherchée.

COROLLAIRE.

399. Il eſt évident qu'en diviſant $\frac{4ac}{3}$ par l'arc A M E ($= 2a$) on aura $\frac{2c}{3}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc A M E, autour de A T, & $2c : a :: \frac{2c}{3} : \frac{1}{3}a =$ à la diſtance de ce centre à la tangente A T, & ($a - \frac{1}{3}a =$) $\frac{2}{3}a$, égale à ſa diſtance à la baſe B E. Donc en multipliant l'arc A M E ($2a$) par la circonférence $\frac{4c}{3}$ décrite par ce centre de gravité autour de la baſe, on aura $\frac{8}{3}ac$ pour la valeur de la ſurface décrite par l'arc A M E autour de la baſe B E.

PROBLEME VII.

400. *Trouver la valeur de la surface décrite par l'arc* A M E *autour de l'axe* A B.

Si P M $= z$, on aura $\frac{2cz}{a}$ pour la circonférence du rayon P M, & $\frac{2cz\dot{x}}{\sqrt{ax}}$ pour la fluxion de la surface décrite par l'arc A M. Or si l'on suppose que $Az\sqrt{ax} + Bx\sqrt{aa-ax} + C\sqrt{aa-ax}$ soit la fluente cherchée, sa fluxion étant posée par ordre, sera

* *Art.* 385. à cause de * $z = \sqrt{ax-xx} + u$, l'arc A N étant $= u$, & $\dot{z} = \frac{a\dot{x}-x\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$.

$$\frac{\frac{1}{2}Aaz\dot{x}}{\sqrt{ax}} + \frac{Aaa\dot{x} - Aax\dot{x} + Baa\dot{x} - \frac{3}{2}Bax\dot{x} - \frac{1}{2}Ca\dot{x}}{\sqrt{aa-ax}}.$$

Or si l'on compare le coefficient du premier terme de cette fluxion avec celui de la fluxion proposée, & que l'on fasse les autres des termes homologues égal à zero, on aura $\frac{1}{2}Aa = 2c$, $Aa + Ba = \frac{1}{2}C$, $A = \frac{3}{2}B$, d'où l'on tire $A = \frac{4c}{a}$, $-B = \frac{8c}{3a}$, $C = \frac{8c}{3}$; par conséquent $\frac{4cz}{a}\sqrt{ax} - \frac{8cx}{3a}\sqrt{aa-ax} + \frac{8c}{3}\sqrt{aa-ax} - \frac{8ac}{3}$ sera la fluente complette, laquelle devient $\frac{6cc-8ac}{3}$, qui est la valeur cherchée, parce que x devient $= a$, & $z = \frac{1}{2}c$.

COROLLAIRE.

401. Si l'on divise $\frac{6cc-8ac}{3}$ par $2a$, on aura $\frac{3cc-4ac}{3a}$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc A M E autour de l'axe A B; & $\frac{1}{2}c - \frac{2}{3}a$ pour sa distance de cet axe; & par conséquent puisque B E $= \frac{1}{2}c$, $\frac{2}{3}a$ sera sa distance de la tangente en E, & $\frac{4c}{3}$ pour la circonférence décrite par ce centre autour de cette tangente; ainsi $\frac{8ac}{3}$ sera la valeur de la surface

décrite par l'arc AME autour de la tangente en E.

D'où l'on voit que les distances du centre de gravité de l'arc AME, *à la base* BE *& à la tangente en* E, *aussi-bien que les surfaces décrites par l'arc* AME, *autour de cette base & de cette tangente, sont égales chacune à chacune.*

PROBLEME VIII.

402. *Trouver la* valeur *du solide décrit par la partie extérieure* AMET *de la roulette autour de la tangente* AT.

Soit MQ prolongée jusqu'à la rencontre de la tangente AT en p, on aura pM $=$ AP $= x$, Ap $=$ PM $= z = \sqrt{ax-xx} + u$, & $\dot{z} = \frac{\dot{x}}{x}\sqrt{ax-xx}$, parce que $\dot{u} = \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax-xx}}$. Et comme $\frac{cxx}{a}$ exprime le cercle décrit par pM, on aura $\left(\frac{cxx\dot{z}}{a}\right) = \frac{cx\dot{x}}{a}\sqrt{ax-xx}$ pour la fluxion du solide décrit par AMp. Si l'espace ANP, ou la fluente de $\dot{x}\sqrt{ax-xx}$ est $= v$; $\frac{cv}{2} - \frac{c}{3a} \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}}$ sera la fluente de cette fluxion; & lorsque $x = a$, v devient $\frac{ac}{8}$, & $\frac{acc}{16}$ sera la valeur cherchée.

COROLLAIRE.

403. Si de la valeur $\frac{acc}{2}$ du cylindre décrit par le rectangle BT, l'on retranche $\frac{acc}{16}$, la différence $\frac{7acc}{16}$ sera la valeur du solide décrit par l'espace intérieur AMEB autour de la tangente AT.

Si l'on divise $\frac{7acc}{16}$ par le plan générateur * $\frac{3ac}{8}$, le quotient $\frac{7}{6}c$ * *Art.* 389.
sera la valeur de la circonférence décrite par le centre de gravité de l'espace AMEB, & $\frac{7}{12}a =$ à la distance de ce centre à la tangente AT; & par conséquent $\frac{5}{12}a$ sera la distance à la base BE; ainsi la circonférence $\frac{5c}{6}$ du rayon $\frac{5}{12}a$, multiplié par le plan générateur $\frac{3ac}{8}$, donnera $\frac{5acc}{16}$ pour la valeur du solide décrit par l'espace AMEB autour de la base BE; & $\frac{3acc}{16}$ pour celui décrit par l'espace AMET autour de cette base.

PROBLEME IX.

404. *Trouver la* valeur *du solide décrit par l'espace* AMEB *autour de l'axe* AB.

On aura $\frac{c}{a}zz$ pour le cercle décrit par PM, & ainsi $\frac{c}{a}zz\dot{x}$ sera la fluxion du solide décrit par l'espace APM. Or si l'on suppose que $Azzx + Bzx\sqrt{ax-xx} + Czz + Dz\sqrt{ax-xx} + Ex^3 + Fxx + Gx$, soit la fluente de cette fluxion ; si l'on prend la fluxion de cette fluente, en mettant au lieu de $\dot{z}$ son égal $\frac{a\dot{x}-x\dot{x}}{\sqrt{ax-xx}}$, & en posant les termes par ordre, on trouvera

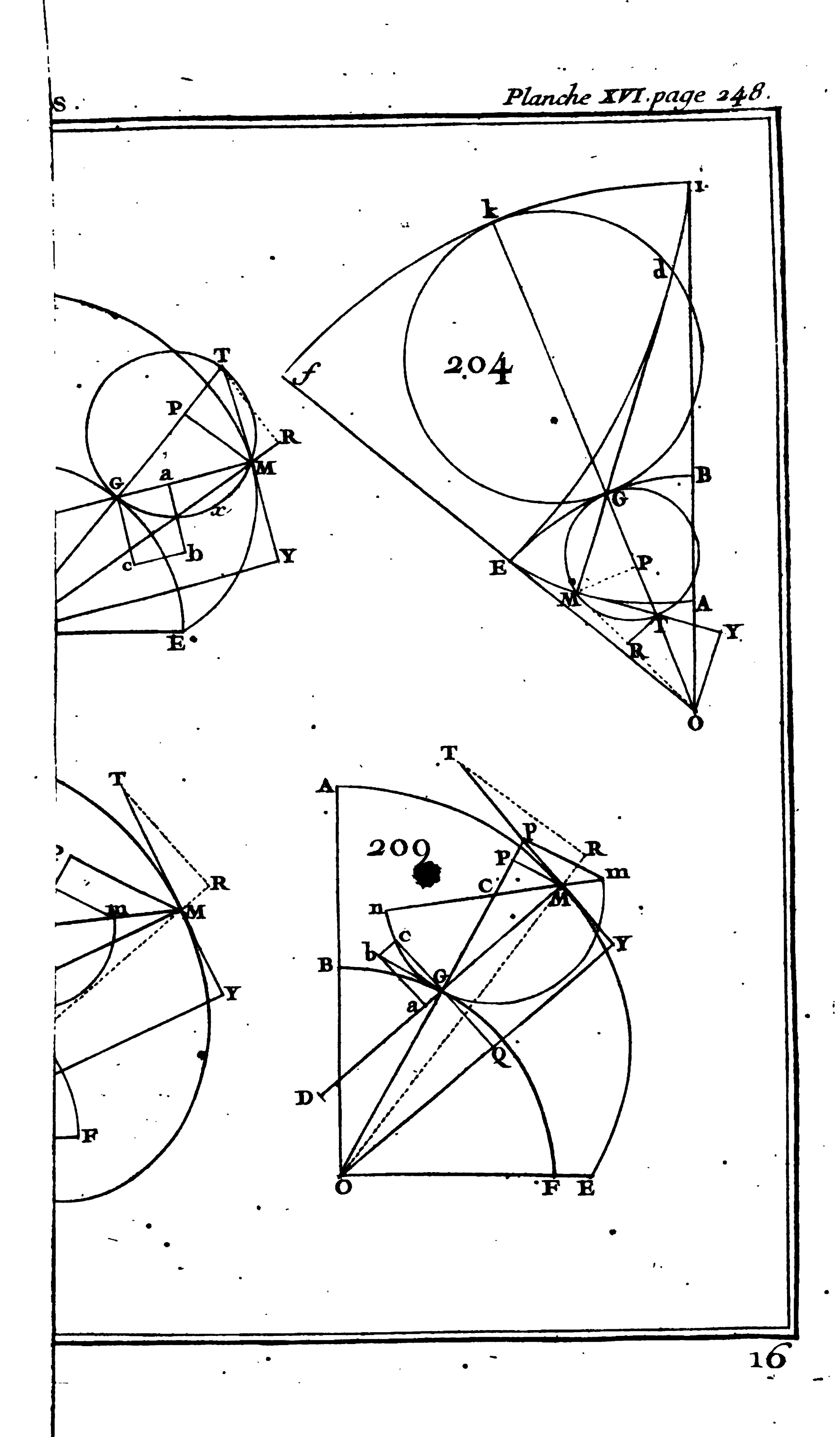
$$\begin{array}{l} Azz\dot{x} - 2Azxx\dot{x} + 2Aazx\dot{x} + 2Caz\dot{x} - Bxx\dot{x} + Bax\dot{x} + Da\dot{x}. \\ \left. \begin{array}{c} -2Bzxx\dot{x} + \frac{3}{2}Bazx\dot{x} + \frac{1}{2}Daz\dot{x} \\ -2Czx\dot{x} \\ -Dzx\dot{x} \\ \hline \sqrt{ax-xx}. \end{array} \right. \quad + 3Exx\dot{x} - Dx\dot{x} + G\dot{x}. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2Fx\dot{x}. \end{array}$$

Si l'on fait à présent le coefficient du premier terme égal à celui de la fluxion proposée, & les autres des termes homologues égal à zero, on aura $A = \frac{c}{a}$, $A + B = 0$, $2Aa + \frac{3}{2}Ba - 2C - D = 0$, $2C + \frac{1}{2}D = 0$, $3E - B = 0$, $Ba - D + 2F = 0$, $Da + G = 0$. D'où l'on tire $A = \frac{c}{a}$, $-B = \frac{c}{a}$, $-C = \frac{c}{4}$, $D = c$, $-E = \frac{c}{3a}$, $F = c$, $-G = ac$; ces valeurs étant substituées donnent $\frac{c}{a}zzx - \frac{c}{a}zx\sqrt{ax-xx} - \frac{c}{4}zz + cz\sqrt{ax-xx} - \frac{c}{3a}x^3 + cxx - acx$, pour la fluente cherchée. Et lorsque $x = a$, z sera $= \frac{1}{2}c$, & $\frac{3c^3}{16} - \frac{1}{3}aac$ sera la valeur cherchée du solide.

COROLLAIRE.

405. En divisant $\frac{3}{16}c^3 - \frac{1}{3}aac$ par le plan générateur, ou l'aire de la demi-roulette $\frac{3ac}{8}$, on aura $\frac{cc}{2a} - \frac{8}{9}a$ pour la circonférence décrite par le centre de gravité de la demi-roulette, & ainsi $\frac{1}{4}c - \frac{4aa}{9c}$ sera la distance de centre à l'axe AB, & $\frac{c}{4} +$

4aa



204
k
i
d
f
B
G
E
P
M
A
T
Y
R
O
T
P
R
M
G
a
x
c
b
Y
E
200
A
T
p
R
P
C
m
M
n
c
b
Y
B
G
a
Q
D
O
F
E
T
R
m
M
Y
F

$\frac{4aa}{9c}$ ſera ſa diſtance à la tangente E T. Et par conſéquent la circonférence $\frac{cc}{2a} + \frac{8a}{9}$ du rayon $\frac{c}{4} + \frac{4aa}{9c}$ étant multipliée par le plan générateur $\frac{3ac}{8}$, donnera $\frac{3c^3}{16} + \frac{aac}{3}$ pour la valeur du ſolide décrit autour de la tangente ET.

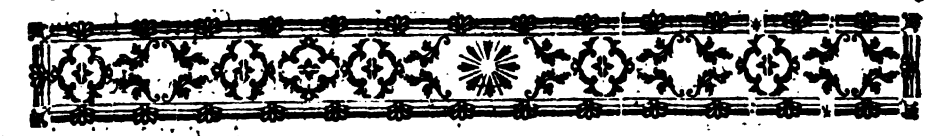
REMARQUE.

La maniere dont on a trouvé la fluente des fluxions $\frac{2cz\dot{x}}{\sqrt{ax}}$, $\frac{c}{a}zz\dot{x}$, peut ſervir d'exemple pour d'autres cas ſemblables, où il y a des inconnues différentes dont on a ſeulement le rapport de leurs fluxions. Car on trouveroit à peu près de la même maniere la fluente de cette expreſſion, ſi z exprimoit quelqu'eſpace hyperbolique ; il faut ſeulement obſerver en général, 1°. que la fluxion du premier terme de la fluente ſuppoſée doit avoir un terme qui puiſſe être comparé avec la fluxion propoſée : la fluxion du ſecond terme doit avoir autant de termes qu'il ſoit poſſible comparables à ceux du premier, & le troiſiéme autant qu'il ſoit poſſible qui ſoient comparables aux précédens, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à quelque fluxion dont on puiſſe avoir la fluente. 2°. On doit avoir autant de termes dans la fluxion qu'il y en a dans la fluente ſuppoſée, afin qu'on puiſſe déterminer les coefficiens A, B, C, &c.

Conſtruction de la Cycloïde ordinaire.

Soit A B l'axe de la cycloïde, A M B le cercle générateur, & ſoit diviſée la demi-circonférence A M B en autant de parties égales que l'on pourra, & de ces points de diviſions ſoient tirées des droites indéfinies perpendiculaires à A B : cela poſé, ſi l'on porte autant de ces parties ſur chacune des droites qu'elles ſont diſtantes du point A, par exemple M N étant tirée par la ſeptiéme diviſion M, doit être de ſept de ces parties, & ainſi des autres ; par ce moyen on trouvera autant de points de la courbe que l'on voudra. *Fig.* 110.

Comme il eſt fort aiſé, par ce que nous avons dit ci-devant, de conſtruire les autres cycloïdes, je ne m'arrêterai pas à les décrire.



TRAITÉ DES QUADRATURES.

INTRODUCTION.

ENtre toutes les figures géométriques, il n'y en a point qui ait tant de propriétés que le cercle, dont la raison est que sa circonférence rentrant en elle-même, on peut considérer cette ligne courbe comme faisant une infinité de révolutions autour d'elle-même, & par conséquent ses propriétés sont aussi infinies; car si l'on veut trouver le rapport entre les sinus de deux arcs qui sont dans une raison commensurable quelconque, l'équation qui en provient contient non seulement ce rapport, mais aussi ceux du sinus du plus grand arc aux sinus d'autant d'autres arcs, que le moindre arc est contenu dans le plus grand.

Monsieur le Marquis de l'Hôpital a donné plusieurs theorêmes à la fin de son Traité des Sections coniques, touchant les cordes des arcs qui sont en progression arithmétique, & Monsieur Cotes a trouvé des propriétés semblables à l'égard des lignes tirées d'un point quelconque pris en dedans ou en dehors du cercle, aux extrémités des arcs qui sont en progression arithmétique; & c'est sur ce fondement que son successeur le Docteur Smith a continué les Tables des Fluentes de M. Cotes, dans son livre *De Harmonia Mensurarum*, publié en 1722.

Comme M. Cotes n'a point donné de démonstration de son theorême, ni le Docteur Smith, M. de Moivre eut la curiosité de la chercher; & l'ayant trouvée, il l'a publiée dans son excellent Traité *de Miscellanea Analytica*, imprimé en 1730. dans lequel non content de démontrer ce que les autres avoient fait,

il a encore beaucoup augmenté cette recherche ; car il a fait voir comment on peut réduire une fraction rationelle quelconque en autant de fractions simples qu'il y a de diviseurs inégaux dans le dénominateur ; d'où il est aisé de trouver la fluente d'une fluxion fractionaire quelconque commensurable, par le moyen de la mesure des angles & des lignes.

Or comme la démonstration du probleme pour réduire les fractions composées en d'autres plus simples, est fort long, s'étant servi des principes qu'il avoit déja donnés auparavant dans son Traité sur les Jeux de hazard, j'ai cherché à en donner une qui soit plus simple, laquelle j'ai insérée à la fin de mon Traité de Mathématique dans l'édition Angloise.

Mais, parce que M. de Moivre a monté comme par degrés des fluxions simples aux fluxions plus composées ; il étoit à desirer qu'on eut une théorie plus générale, ce qui après ce ce que M. de Moivre avoit dit, paroissoit plus facile qu'il ne l'étoit en effet. Cependant M. Klinkenstiern, Professeur à Upsal, en donna une dans les Transactions Philosophiques de la Société Royale de Londres, d'une fluxion fractionaire dont le dénominateur est un trinome rationel, sans en donner la démonstration, c'est ce qui m'a engagé à la chercher ; mais comme cela ne se pouvoit faire sans trouver premierement la construction générale d'une fraction dont le dénominateur est un binome, j'ai été obligé de m'étendre plus loin que je n'avois d'abord cru : voilà ce qui a donné lieu au Traité suivant, dans lequel on trouvera que les tables des fluentes de M. Cotes ne sont que des cas particuliers de mes formules générales : j'aurois pu pousser cette recherche beaucoup plus loin, mais j'ai cru qu'il valoit mieux m'en tenir à ce que j'ai donné, parce que la spéculation poussée trop loin, ennuie souvent le lecteur sans l'instruire.

Dans le tems que je travaillois à la démonstration du probleme de M. Klinkenstiern, j'invitai M. Thomas Simpson à la même recherche ; mais quoiqu'il ne pût réussir, comme il l'a avoué devant des témoins, & que je lui aye fait voir ma démonstration, il l'a faite imprimer dans son essai sur plusieurs sujets de Mathématiques en 1740, sans faire la moindre mention de moi, ce qui n'étoit certainement pas trop honnête, mais c'est sa maniere d'en user envers ceux qu'il copie.

PROBLEME I.

Fig. 14 1. *Trouver le rapport entre les cosinus* x, u, *de deux arcs quelconques* a, n a, *qui sont entr'eux comme l'unité est à* n.

En nommant le rayon r, la fluxion de l'arc a sera exprimée par $\frac{r\dot{x}}{\sqrt{rr-xx}}$, & celle de l'arc na, par $\frac{r\dot{u}}{\sqrt{rr-uu}}$, on aura par conséquent cette proportion $1 : n :: \frac{r\dot{x}}{\sqrt{rr-xx}} : \frac{r\dot{u}}{\sqrt{rr-uu}}$, & en faisant le produit des extrêmes égal à celui du moyen, $\frac{n\dot{x}}{\sqrt{rr-xx}} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{rr-uu}}$. Or si l'on multiplie les dénominateurs par $\sqrt{-1}$, il viendra $\frac{n\dot{x}}{\sqrt{xx-rr}} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{uu-rr}}$, dont les fluentes par les logarithmes seront $\left(\frac{x+\sqrt{xx-rr}}{r}\right)^n = \frac{u+\sqrt{uu-rr}}{r}$.

Il faut remarquer que, quoique les quantités sous les signes radicaux soient impossibles, les conclusions que l'on en tire sont néanmoins vraies, comme l'on verra ci-après.

COROLLAIRE I.

2. Il est évident que les quantités x, $\sqrt{xx-rr}$, u, $\sqrt{uu-rr}$, peuvent être positives; ou négatives; lorsqu'elles sont négatives, leurs fluxions auront le même signe; par conséquent si l'on tire les diametres A a, K k, l'un perpendiculaire à l'autre, en considérant les cosinus des arcs terminés dans la demi-circonférence K A k, comme positifs; ceux des arcs terminés dans la demi-circonférence K a k, seront négatifs; les sinus des arcs terminés dans A K a, seront positifs, & ceux des arcs terminés dans a k A, négatifs: les exemples suivans éclairciront ce sujet.

I. Soit l'arc A B de 60 degrés, & $n = 2$, u exprimera le cosinus de l'arc A C, de 120 degrés, & ainsi $x = \frac{1}{2}r$, $u = -\frac{1}{2}r$: donc l'équation générale deviendra $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2 = -\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}$.

II. Si l'arc A B est de 60 degrés, & $n = 4$, u sera le cosinus d'un arc de 4×60, ou 240 degrés; ainsi $x = \frac{1}{2}r$, & $u = -\frac{1}{2}r$:

donc l'équation générale deviendra $\overline{\tfrac{1}{2}+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}}^{\,4} = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{-\tfrac{3}{4}}$.

III. Mais si l'arc A B est de 45 degrés, & $n = 7$, u sera le cosinus de l'arc 315, ou de 45 degrés, ainsi $x = u = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, & l'équation générale deviendra dans ce cas $\overline{\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}}}^{\,7} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$.

On doit remarquer que les quantités $\sqrt{xx-rr}$, $\sqrt{uu-rr}$, ont toujours les mêmes signes que les sinus des arcs dont x & u sont les cosinus.

COROLLAIRE II.

3. Si l'on nomme la circonférence entiere c, & l'arc A M $= a$, en prenant l'arc A B $= \frac{a}{n}$, à cause que $n : 1 :: a : \frac{a}{n} :: c + a : \frac{c+a}{n} :: 2c + a : \frac{2c+a}{n} :: 3c + a : \frac{3c+a}{n}$, &c. lorsque n est un nombre entier, il est manifeste que les arcs a, $c+a$, $2c+a$, $3c+a$, ont tous le même cosinus x, & par conséquent l'équation $\overline{\frac{x+\sqrt{xx-rr}}{r}}^{\,n} = \frac{u+\sqrt{uu-rr}}{r}$, exprime non seulement la relation entre les cosinus des arcs A B, A M, mais aussi les relations entre le cosinus de l'arc A M (a), & des arcs $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, $\frac{3c+a}{n}$, &c. continués jusqu'au nombre n.

N. B. La raison de ce que l'équation ci-dessus exprime les relations entre le cosinus u, & ceux des arcs $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, &c. est seulement, que les divisions, après n nombre de fois, tombent dans les mêmes points des premieres divisions.

COROLLAIRE III.

4. Si la circonférence est divisée en n parties égales, commençant en B, telles que BC, CD, DE, EF, &c. on aura AB $= \frac{a}{n}$, AC $= \frac{c+a}{n}$, AD $= \frac{2c+a}{n}$, AE $= \frac{3c+a}{n}$, &c.

C'est pourquoi l'équation $\overline{\frac{x+\sqrt{xx-rr}}{r}}^{\,n} = \frac{u+\sqrt{uu-rr}}{r}$, exprime

les relations entre le cosinus u de l'arc A M, & ceux des arcs A B, A C, A D, A E, &c.

COROLLAIRE IV.

5. Si l'on suppose $z = x + \sqrt{xx - rr}$, on aura $z - x = \sqrt{xx - rr}$, dont le quarré est $zz - 2zx + xx = xx - rr$; en effaçant xx de part & d'autre, & réduisant l'équation égale à zero, il viendra $zz - 2xz + rr = 0$.

Or comme $z = x + \sqrt{xx - rr}$, élevée à la puissance n, donne $z^n = \overline{x + \sqrt{xx - rr}}^{\,n}$; cette valeur étant substituée

* Art. 1. dans l'équation générale, * donnera $\frac{z^n}{r^n} = \frac{u + \sqrt{uu - rr}}{r}$, ou bien en faisant évanouir les fractions $z^n - u r^{n-1} = r^{n-1} \times \sqrt{uu - rr}$, dont le quarré est $z^{2n} - 2u z^n r^{n-1} + uu r^{2n-2} = uu r^{2n-2} - r^{2n}$; en retranchant $uu r^{2n-2}$ de part & d'autre, & réduisant l'équation égale à zero, il viendra enfin $z^{2n} - 2u z^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$.

Par le moyen de ces deux équations $zz - 2xz + rr = 0$, $z^{2n} - 2u z^n r^{n-1} + rr = 0$, on trouvera toujours l'équation qui détermine la relation demandée.

COROLLAIRE V.

6. En transposant le second terme de l'équation $z^{2n} - 2u z^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, on aura $z^{2n} + r^{2n} = 2u z^n r^{n-1}$, dont le quarré est $z^{4n} + 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = 4uu z^{2n} r^{2n-2}$; & si l'on nomme le sinus de l'arc A M, s, on aura $uu = rr - ss$, par la nature du cercle; en mettant cette valeur de uu, dans la derniere équation elle deviendra $z^{4n} + 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = 4z^{2n} r^{2n} - 4ss z^{2n} r^{2n-2}$, ou $z^{4n} - 2z^{2n} r^{2n} + r^{4n} = -4ss z^{2n} r^{2n-2}$; dont la racine quarrée donnera $z^{2n} - r^{2n} = 2s z^n r^{n-1} \sqrt{-1}$.

COROLLAIRE VI.

* Art. 5. 7. Puisque * $z = x + \sqrt{xx - rr}$, il est évident, par la nature des équations, que $z - x - \sqrt{xx - rr}$, est un diviseur de l'équation A. $z^{2n} - 2u z^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, aussi bien que de l'équation B. $zz - 2xz + rr = 0$; & l'autre racine

$z - x + \sqrt{xx - rr}$ de l'équation B, sera par conséquent aussi un diviseur de l'équation A; par la même raison l'équation B, sera elle-même un diviseur de l'équation A.

COROLLAIRE VII.

8. Il est évident, que si x exprime le cosinus de l'un ou l'autre de ces arcs A B, A C, A D, A E, &c. on aura toujours l'équation $\overline{\frac{x + \sqrt{xx - rr}}{r}}^{n} = \frac{u + \sqrt{uu - rr}}{r}$; & par conséquent l'équation B, sera toujours un diviseur de l'équation A, dans tous les cas possibles.

Par exemple, soit l'arc A B de 60 degrés, & $n = 2$, on aura l'arc A M, de 120 degrés, & ainsi $x = \frac{1}{2} r$, $u = -\frac{1}{2} r$; & les équations A, B, deviendront $z^4 + rrz^2 + r^4 = 0$, $zz - rz + rr = 0$; la premiere étant divisée par la derniere, donnera $zz + rz + rr = 0$, pour quotient sans reste.

Si l'arc A B, est de 60 degrés, & $n = 3$, on aura A M = 180 degrés, A C = 180, & A D = 300; de là $u = -r$, $x = \frac{1}{2} r$, le cosinus de l'arc A C sera $-r$, & celui de A D, $\frac{1}{2} r$. Par conséquent l'équation A, deviendra $z^6 + 2z^3r^3 + r^6 = 0$, & en mettant les trois différentes valeurs $\frac{1}{2} r$, $-r$, $\frac{1}{2} r$, de x dans* l'équation B, on aura $zz - rz + rr = 0$, $zz + 2rz + rr = 0$, $zz - rz + rr = 0$, pour les trois diviseurs de l'équation $z^6 + 2z^3r^3 + r^6 = 0$. * Art. 7.

COROLLAIRE VIII.

De là il est manifeste que la valeur de z n'est d'aucune conséquence dans les diviseurs qui proviennent de l'équation $zz - 2xz + rr = 0$, en substituant les différentes valeurs de x. Car pourvu que ces valeurs de x, soient les cosinus des arcs ci-dessus mentionnés, les équations qui en proviennent seront toujours les diviseurs de l'équation $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$; & par conséquent, si a, b, c, d, &c. expriment ces cosinus, & que $zz - 2az + rr = A$, $zz - 2bz + rr = B$, $zz - 2cz + rr = C$, $zz - 2dz + rr = D$, on aura toujours $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = A \times B \times C \times D$, &c.

SCHOLIE.

Si le sinus de l'arc A B est y, celui de l'arc A M, s, on aura $-yy = xx - rr$, & $-ss = uu - rr$, par la nature du cercle, en extrayant la racine quarrée, il viendra $y\sqrt{-1} = \sqrt{xx-rr}$, & $s\sqrt{-1} = \sqrt{uu-rr}$; ces valeurs étant substituées dans l'équation $\overline{\frac{x+\sqrt{xx-rr}}{r}}^{n} = \frac{u+\sqrt{uu-rr}}{r}$, elle sera changée en celle-ci $\overline{x+y\sqrt{-1}}^{n} = ur^{n-1} + sr^{n-1}\sqrt{-1}$. Or comme les quantités impossibles dans un membre d'une équation quelconque, sont toujours égaux aux quantités impossibles dans l'autre membre, puisqu'il ne sçauroit y avoir autrement d'égalité; il est constant que les termes impairs de $x + y\sqrt{-1}$, élevé à la puissance n, sont égaux à $\pm ur^{n-1}$, & les termes pairs à $\pm sr^{n-1}\sqrt{-1}$: Donc

$$\pm ur^{n-1} = x^{n} - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} A \frac{yy}{xx} + \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} B \frac{yy}{xx} - \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} C \frac{yy}{xx} + \&c.$$

$$\pm sr^{n-1} = nyx^{n-1} - \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} A \frac{yy}{xx} + \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} B \frac{yy}{xx} - \frac{n-5}{6} \times \frac{n-6}{7} C \frac{yy}{xx} + \&c.$$

Les lettres A, B, C, &c. expriment chacune le terme qui les précéde, & les signes de s & u, seront déterminés par ce qui a été dit dans le corol. 2.

Par exemple, si l'on veut avoir le sinus s & le cosinus u, d'un arc triple de l'arc dont le sinus est y, & le cosinus x, on aura $n = 3$, & ainsi $\pm urr = x^{3} - 3xyy$, & $\pm srr = 3xxy - y^{3}$.

LEMME.

Fig. 2. 10. *Soit pris le point* P *dans le rayon* A O, *prolongé s'il est nécessaire de maniere que* O P $=$ z, *& soit tiré la ligne* P B, *à l'extrémité de l'arc* A B, *dont le cosinus est* x, *& que* $\overline{PB}^{2} = zz \mp 2xz + rr$; *le second terme* 2xz *est négatif, lorsque le cosinus* x *tombe sur le rayon* A O, *& positif lorsqu'il tombe sur* O B.

Car

Car si l'on tire BQ perpendiculaire à AO, on aura $QO = x$, $QB = y$, & $PQ = x \mp z$; de là $\overline{QB}^2 = yy = rr - xx$, $\overline{PQ}^2 = xx \mp 2xz + zz$; & par conséquent la somme des quarrés $\overline{QB}^2$, $\overline{PQ}^2$, est égale au quarré de $\overline{PB}^2 = zz \mp 2xz + rr$.

Corollaire I.

11. De là il suit, que si l'arc AB est à l'arc AM, dans la raison de l'unité à un nombre entier quelconque n, que la circonférence soit divisée en n parties égales, commençant au point B, comme BC, CD, DE, &c. & que l'on tire des lignes du point P aux points C, D, E, &c. on aura $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = \overline{PB \times PC \times PD \times PE \times \&c.}^2$. Car si a, b, c, d, &c. expriment les cosinus des arcs AB, AC, AD, AE, &c. on aura $\overline{PB}^2 = zz - 2az + rr$, $\overline{PC}^2 = zz - 2bz + rr$, $\overline{PD}^2 = zz - 2cz + rr$, $\overline{PE}^2 = zz - 2dz + rr$: Donc * &c. * Art. 9.

Si par exemple l'arc AM est de 180 degrés, & $n = 4$, on aura $AB = 45$, $AC = 135$, $AD = 225$, $AE = 315$; & ainsi $u = -r$, $a = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $b = -\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $c = -\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $d = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$; par conséquent $\overline{PB}^2 = \overline{PE}^2 = zz - rz\sqrt{2} + rr$, $\overline{PC}^2 = \overline{PD}^2 = zz + rz\sqrt{2} + rr$; & par conséquent $\overline{PB \times PC \times PD \times PE}^2 = \overline{zz - rz\sqrt{2} + rr \times zz + rz\sqrt{2} + rr}^2 = z^8 + 2z^4r^4 + r^8$.

Corollaire II.

12. Si l'arc $AM = 0$, on aura $u = + r$, & les arcs * $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, $\frac{3c+a}{n}$, &c. deviendront $\frac{0}{n}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{2c}{n}$, $\frac{3c}{n}$, ... $\frac{nc}{n}$, ou c; & ainsi en divisant la circonférence en n parties égales, AB, BC, CD, DE, &c. on aura $AB = \frac{c}{n}$, $AC = \frac{2c}{n}$, $AD = \frac{3c}{n}$, $AE = \frac{4c}{n}$, &c. par conséquent l'expression du corollaire précédent deviendra ici $\overline{PA \times PB \times PC \times PD \times PE}^2 = z^{2n} - 2z^n r^n + r^{2n}$, ou bien $PA \times PB \times PC \times PD \times PE = \pm z^n \mp r^n$. * Fig. 3. * Art. 3.

COROLLAIRE III.

Fig. 4.

13. Si l'arc A M $= \frac{1}{2} c$, on aura $u = -r$, & les arcs $\frac{a}{n}$, $\frac{c+a}{n}$, $\frac{2c+a}{n}$, $\frac{3c+a}{n}$, deviendront $\frac{c}{2n}$, $\frac{3c}{2n}$, $\frac{5c}{2n}$, $\frac{7c}{2n}$, &c. C'eſt pourquoi, en diviſant la circonférence en $2n$ parties égales A B, BC, CD, D E, &c. on aura $AB = \frac{c}{2n}$, $AD = \frac{3c}{2n}$, $AF = \frac{5c}{2n}$, $AH = \frac{7c}{2n}$, &c. Par conſéquent $\overline{PB \times PD \times PF \times PH}^2 = z^{2n} + 2z^n r^n + r^{2n}$, ou bien $PB \times PD \times PF \times PH = z^n + r^n$.

COROLLAIRE IV.

14. Puiſqu'il y a autant de points de diviſion, au-deſſus & au-deſſous du diametre A G, qui ſont à des diſtances égales du point A.

Que le nombre n ſoit pair ou impair, il s'enſuit que $PB = PM$, $PD = PK$, $PF = PH$, &c. & $PC = PL$, $PE = PI$, &c. & par conſéquent $PA \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2$ &c. $= \pm z^n \mp r^n$, & $\overline{PB}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PF}^2$ &c. $= z^n + r^n$.

COROLLAIRE V.

Fig. 5.

15. De là il ſuit, que ſi la demi-circonférence eſt diviſée en n parties égales aux points B, C, D, E, F, G, on aura $PA \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2 \times PG = \pm z^n \mp r^n$, & $\overline{PB \times PD \times PF}^2 = z^n + r^n$.

Si par exemple, A B eſt de 30 degrés, $n = 6$, on aura $AD = 90$, $AF = 150$, & les coſinus de ces arcs ſeront $\frac{1}{2} r\sqrt{3}$, 0, $-\frac{1}{2} r\sqrt{3}$, reſpectivement. Ainſi $\overline{PD \times PB \times PF}^2 = \overline{zz - rz\sqrt{3} + rr} \times \overline{zz + rr} \times \overline{zz + rz\sqrt{3} + rr} = z^6 + r^6$. Et les coſinus des arcs A C (60), A E (120) ſeront $\frac{1}{2} r$, $-\frac{1}{2} r$; par conſéquent $PA \times \overline{PC}^2 \times \overline{PE}^2 \times PG = \overline{r - z} \times \overline{zz - rz + rr} \times \overline{zz + rz + rr} \times \overline{z + r} = r^6 - z^6$.

PROBLEME II.

16. *Supposant la méthode de trouver les diviseurs d'une équation, il s'agit de réduire une fraction quelconque en autant de fractions simples que le dénominateur a des diviseurs inégaux.*

Soit $\frac{a+bz+czz}{l+mz+nzz+z^3}$ la fraction proposée, & que $z-g$ soit un des diviseurs, $e+fz+zz$, le quotient; ou ce qui est la même chose, supposons que $\frac{a+bz+czz}{l+mz+nzz+z^3} = \frac{r+sz}{e+fz+zz} + \frac{t}{g-z}$; en réduisant ces fractions sous la même dénomination, & égalant les numerateurs, on aura

$$a+bz+czz = et+ftz+tzz + rz+szz - gr-sgz$$

en faisant les coefficiens des termes où z est élevé à la même puissance égaux, on aura $a=et-gr$, $b=ft+r-sg$, $c=t+s$. Si l'on met $c-t$, au lieu de son égal s dans $b=ft+r-sg$, il viendra $b=ft+r-cg+gt$, ou en transposant, $r=b+cg-ft-gt$; cette valeur de r étant substituée dans $a=et-gr$, donne $a=et+fgt+ggt-bg-cgg$, d'où l'on tire $t=\frac{a+bg+cgg}{e+fg+gg}$, pour la valeur du numerateur de la fraction simple $\frac{t}{z-g}$.

Si le diviseur est $g-z$, au lieu de $z-g$, la valeur du numerateur t, sera de même; mais si ce diviseur est $z+g$, on aura $t=\frac{a-bg+cgg}{e-fg+gg}$.

Or puisque tout ce que nous venons de dire à l'égard d'un diviseur peut également s'appliquer à tout autre diviseur, il est évident que les simples fractions demandées peuvent être trouvées.

COROLLAIRE.

17. De là il suit, qu'en prenant la fluxion du dénominateur $l+mz+nzz+z^3$, ou de son égal $\overline{e+fz+zz}\times\overline{z-g}$, on aura $\overline{f\dot{z}+2z\dot{z}}\times\overline{z-g}+\dot{z}\times\overline{e+fz+zz}$, laquelle étant divisée par $\dot{z}$, donne $-fg+fz-2gz+2zz+e+fz+zz$, ou $e-fg+2fz-2gz+3zz$, & mettant au lieu de

z sa valeur, c'est-à-dire $+g$, lorsqu'il y a $z-g$, ou $-g$, si $g+z$, dans cette derniere expression, elle deviendra $e+fg+gg$, & en mettant la même valeur de z, dans le numerateur $a+bz+czz$, il devient $a+bg+cgg$, cette derniere expression divisée par la précédente, donnera $\frac{a+bg+cgg}{e+fg+gg}$, ce qui est évidemment égal au numerateur t de la fraction simple $\frac{t}{z-g}$. Ce qui donne cette

Regle generale.

Pour trouver les numerateurs des fractions simples.

Au lieu de z mettez sa valeur dans le numerateur, & vous aurez le numerateur ; & en mettant la même valeur dans la fluxion du dénominateur, vous aurez le dénominateur d'une fraction égale au numerateur de la fraction simple.

Si le diviseur est $g-z$, il faudra changer les signes dans la valeur de t, puisque $\frac{t}{g-z}=\frac{-t}{z-g}$.

Par exemple, soit $\frac{1}{zz-aa}$, la fraction proposée, dont les diviseurs sont $z-a$, $z+a$, en supposant $\frac{1}{zz-aa}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z+a}$; si la fluxion $2z\dot{z}$ est divisée par $\dot{z}$, & que l'on mette $+a$, $-a$, au lieu de z, nous aurons $A=\frac{1}{2a}$, $B=-\frac{1}{2a}$; par conséquent $\frac{1}{zz-aa}=\frac{1}{2a}\times$ par $\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}$.

Soit $\frac{zz}{z^3-azz+aaz-a^3}$ la fraction proposée ; les diviseurs du dénominateur sont $z-a$, $z-a\sqrt{-1}$, $z+a\sqrt{-1}$, & si $\frac{zz}{z^3-azz+aaz-a^3}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-a\sqrt{-1}}+\frac{C}{z+a\sqrt{-1}}$, en divisant la fluxion du dénominateur $3\dot{z}z^2-2a\dot{z}z+aa\dot{z}$ par $\dot{z}$, & mettant a, $a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, au lieu de z, dans $3zz-2az+aa$, & dans le numerateur zz, il viendra $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2+2\sqrt{-1}}$, $C=\frac{1}{2-2\sqrt{-1}}$; par conséquent $\frac{zz}{z^3-azz+aaz-a^3}$ est égale à $\frac{1}{2}\times$ par $\frac{1}{z-a}+\frac{\frac{1}{1+\sqrt{-1}}}{z-a\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{1-\sqrt{-1}}}{z+a\sqrt{-1}}$.

L'on peut remarquer que s'il y a des diviseurs simples qui

renferment des quantités impossibles, en en ajoutant deux ensemble, les quantités impossibles s'évanouiront, comme dans ces derniers.

Si l'on ajoute la seconde & la troisiéme fraction ensemble, on aura $\frac{z+a}{zz+aa}$, pour leur somme : donc $\frac{zz}{z^3-azz+aaz-a^3} = \frac{1}{2} \times$ par $\frac{1}{z-a} + \frac{z+a}{zz+aa}$.

La méthode de trouver les diviseurs d'une expression, est la même que celle de trouver les racines de cette expression, en la supposant égale à zero; car les racines de $a^3 - z^3 = 0$, sont de même que les diviseurs de $a^3 - z^3$.

REMARQUE.

Nous avons supposé dans le dernier probleme que les diviseurs de la fraction composée sont inégaux, parce que quand il y en a d'égaux, leurs numerateurs deviennent infinis. Or pour rendre le probleme général, il faut ajouter toutes les fractions qui sont égales ensemble, & alors leur somme deviendra finie; d'où l'on voit qu'on ne peut réduire une fraction composée qu'en autant de fractions simples qu'il y a de diviseurs inégaux.

Par exemple, pour réduire la fraction composée $\frac{1}{\overline{z-a}^2 \times \overline{a+z}}$ en fractions simples, parce qu'il n'y a que les deux diviseurs $z-a$, $z+a$ inégaux. Or en supposant que $\frac{1}{\overline{z-a} \times \overline{z-b} \times \overline{z+a}}$ exprime cette fraction, c'est-à-dire $b=a$, & si $\frac{1}{\overline{z-a} \times \overline{z-b} \times \overline{z-a}} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z+a}$; mais la fluxion du dénominateur divisée par $\dot{z}$, donne $3zz - 2bz - aa$, & en substituant a, b, & $-a$, au lieu de z, on aura $A = \frac{1}{2aa-2ab}$, $B = \frac{1}{bb-aa}$, $C = \frac{1}{2aa+2ab}$: Donc $\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{1}{\overline{2aa-2ab} \times \overline{z-a}} + \frac{1}{\overline{bb-aa} \times \overline{z-b}}$; & en ajoutant ces deux fractions ensemble, on aura $\frac{\overline{b-a}^2 \times \overline{2a+b-z}}{\overline{b-a}^2 \times \overline{2ab+aa} \times \overline{z-a} \times \overline{z-b}}$, pour la somme de ces deux fractions, laquelle étant divisée par $\overline{b-a}^2$, & b fait $=a$, deviendra $\frac{1}{4aa} \times \frac{3a-z}{\overline{z-a}^2}$; & par conséquent $\frac{1}{\overline{z-a}^2 \times \overline{z+a}} = \frac{1}{4aa} \times$ par $\frac{3a-z}{\overline{z-a}^2} +$

$\frac{1}{z+a}$; ce qui fait voir que la méthode de trouver des fractions simples est générale pour tous les cas, avec la restriction qu'on vient de décrire.

LEMME II.

Fig. 6. 18. *Soit* PM, QN, *les sinus*, & CP, CQ *les cosinus de deux arcs quelconques* AM, AN; & GM *le sinus*, CG *le cosinus de leurs différences* MN; *je dis que* $CA \times CG = CQ \times CP + QN \times PM$, & $CA \times GM = CQ \times PM - CP \times QN$.

Si MG prolongée rencontre le rayon CA en H, & PM coupe le rayon CN en F; en nommant $CQ = u$, $QN = z$, $CP = x$, $PM = y$; les triangles semblables CPF, CQN, donneront $CQ(u) : QN(z) :: CP(x) : PF = \frac{xz}{u}$; ainsi $FM = y - \frac{xz}{u}$, & $CN : CQ :: FM : GM$, ou $CA \times GM = uy - xz$.

Et les triangles semblables CQN, MPH, CGH, donnent $CQ(u) : QN(z) :: PM(y) : PH = \frac{yz}{u}$: donc $CH = x + \frac{yz}{u}$; & par conséquent $CN : CQ :: CH : CG$, ou $CA \times CG = xu + yz$.

COROLLAIRE.

19. De là il suit, qu'en comparant les valeurs de PM, y, dans les deux équations aussi-bien que ceux de x, on trouvera que $CA \times CP = CG \times CQ - QN \times GM$, & $CA \times PM = CG \times QN + CQ \times GM$, parce que $\overline{AC}^2 = yy + xx$.

LEMME III.

20. *La même chose étant supposée que dans le cinquième article; si* m, p, *expriment les racines de l'équation* $zz - 2xz + rr = 0$; *je dis que* $2ur^{n-1} = m^n + p^n$, & $2sr^{n-1}\sqrt{-1} = p^n - m^n$.

Car puisque l'équation $zz - 2xz + rr = 0$, est un diviseur de l'équation $z^{2n} - 2uz^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$, la racine m de la premiere en est aussi une de la derniere; ainsi en mettant m au lieu de z, on aura $m^{2n} - 2um^n r^{n-1} + r^{2n} = 0$.

Or comme $\overline{m-z} \times \overline{p-z} = mp - mz - pz + zz = rr - 2xz + zz$, il faut que $m + p = 2x$, & $mp = rr$; en élevant cette derniere égalité à la puissance n, on aura $m^n p^n = r^{2n}$; cette valeur de r^{2n}, étant mise dans l'équation ci-dessus, donnera $m^{2n} - 2u\, m^n r^{n-1} + m^n p^n = 0$, & divisant par m^n, $m^n - 2u\, r^{n-1} + p^n = 0$, ou $2u\, r^{n-1} = m^n + p^n$. On trouvera de la même maniere que $2s\, r^{n-1} \sqrt{-1} = p^n - m^n$.

PROBLEME III.

21. *Réduire la fraction* $\frac{z^{\theta-1}}{r^n - z^n}$ *dans des fractions simples, en supposant* θ *un nombre entier positif quelconque & moindre que* n.

Soit m, p, q, t, &c. les racines de $r^n - z^n = 0$: si A, B, C, D, &c. expriment les numerateurs des fractions simples, on aura $\frac{z^{\theta-1}}{r^n - z^n} = \frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} + \frac{C}{q-z} + \frac{D}{t-z} +$ &c. continué à n fractions. Or comme * $A = \frac{m^{\theta-1}}{n m^{n-1}} = \frac{m^\theta}{n m^n}$; & si l'on met m * Art. 17.
au lieu de z, dans $r^n - z^n = 0$, on aura $r^n = m^n$; & par conséquent $A = \frac{m^\theta}{n m^n}$, deviendra $A = \frac{m^\theta}{n r^n}$; & par la même raison, $B = \frac{p^\theta}{n r^n}$, $C = \frac{q^\theta}{n r^n}$, $D = \frac{t^\theta}{n r^n}$. Par conséquent les racines m, p, q, t, étant données, les fractions simples seront déterminées.

COROLLAIRE I.

22. En ajoutant les deux premieres fractions ensemble, on aura $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{Ap + Bm - Az - Bz}{mp - mz - pz + zz}$: or comme $A = \frac{m^\theta}{n r^n}$, & $B = \frac{p^\theta}{n r^n}$, on aura $Ap = \frac{pm^\theta}{n r^n}$, $Bm = \frac{mp^\theta}{n r^n}$, & $Ap + Bm = \frac{pm^\theta + mp^\theta}{n r^n}$, ou bien en divisant le numerateur par pm, & le multipliant par son * égal rr, il viendra $Ap + Bm = \frac{rr}{n r^n} \times$ * Art. 20.
$\overline{m^{\theta-1} + p^{\theta-1}}$, on a aussi $A + B = \frac{1}{n r^n} \times \overline{m^\theta + p^\theta}$.

Si présentement l'on divise la demi-circonférence décrite Fig. 7.
avec le rayon r, en n parties égales aux points B, C, D, E, &c. & l'arc A C c est à l'arc A C, comme θ est à l'unité, & l'on nomme α le sinus, & x le cosinus de l'arc A C c, & le sinus de

leur différence Cc, y; on aura $2xr^{\theta-1} = m^{\theta} + p^{\theta}$, & comme l'arc A C est à l'arc Cc, comme l'unité est à $\theta - 1$; on aura par la même raison $2yr^{\theta-2} = m^{\theta-1} + p^{\theta-1}$; par conséquent ces valeurs étant substituées dans les égalités ci-dessus, donneront $Ap + Bm = \frac{2yr^{\theta}}{nr^{n}}$, $A + B = \frac{2xr^{\theta-1}}{nr^{n}}$: donc $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times \frac{ry - xz}{rr - 2xz + zz}$, parce que $\overline{m-z} \times \overline{p-z} = rr - 2xz + zz$.

En faisant $z - x = v$, en quarrant on aura $xx - 2xz + zz = vv$, ou $-2xz + zz = vv - xx$, & en ajoutant rr de part & d'autre, il viendra $rr - 2xz + zz = vv - xx + rr$. Si a exprime le sinus dont x est le cosinus, on aura $rr - xx = aa$; par conséquent $rr - 2xz + zz = aa + vv$.

Puisque $z - x = v$, donc $z = x + v$, & $xz = xx + xv$,

* *Art.* 18. on aura aussi $ry + xz = ry - xx - xv$, ou à cause que * $ry = aa + xx$, il viendra $ry - xz = aa - xv$; par conséquent $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z} = \frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times \frac{aa - xv}{aa + vv}$.

COROLLAIRE II.

23. De là il suit qu'il est manifeste que si les arcs ACc, AEe, AGg, &c. sont aux arcs AC, AE, AG, &c. comme θ est à l'unité; en nommant les sinus des derniers arcs a, b, c, d, &c. ceux des premiers α, β, γ, δ, &c. leurs cosinus x, λ, μ, π, &c. on aura $\frac{z^{\theta-1}}{r^{n} - z^{n}} = \frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times$ par $\frac{a\alpha - xv}{aa + vv} + \frac{b\beta - \lambda v}{bb + vv} + \frac{c\gamma - \mu v}{cc + vv} + \frac{d\delta - \pi v}{dd + vv}$ + &c.

Il faut remarquer que lorsque n est un nombre impair $r - z$ sera un des diviseurs du binome $r^{n} - z^{n}$, & ainsi $\frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times \frac{\frac{1}{2}r}{r-z}$ sera la premiere fraction simple; & lorsque n est un nombre pair $r - z$, & $r - z$ seront deux diviseurs, & par conséquent $\frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times \frac{\frac{1}{2}r}{r-z}$ sera la premiere fraction, & $\frac{2r^{\theta-1}}{nr^{n}} \times \frac{\frac{1}{2}r}{r+z}$ la derniere.

PROBLEME IV.

24. *Réduire la fraction* $\frac{z^{\theta-1}}{r^{n} + z^{n}}$ *en des fractions simples*, θ *étant un nombre entier & positif quelconque moindre que* n.

Comme

Comme cette fraction ne différe de la précédente que par le signe + au lieu de —; il est clair que les simples fractions se trouveront de même. Donc si la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, est divisée en n parties égales aux points B, C, D, E, &c. & si l'on prend les arcs ABb, ADd, AFf, &c. qui soient aux arcs des divisions impairs AB, AD, AF, &c. comme θ est à l'unité: en nommant les sinus des derniers arcs a, b, c, d; ceux des premiers α, β, γ, δ, &c. & leur cosinus, κ, λ, μ, π, &c. on aura comme ci-devant $\frac{z^{\theta-1}}{r^n+z^n} = \frac{2r^{\theta-1}}{nr^n}$ × par $\frac{a\alpha-\kappa v}{aa+vv} + \frac{b\beta-\lambda v}{bb+vv} + \frac{c\gamma-\mu v}{cc+vv} + \frac{d\delta-\pi v}{dd+vv} +$ &c. Si n est un nombre impair, $\frac{2r^{\theta-1}}{nr^n} \times \frac{\frac{1}{2}r}{r+z}$ sera la premiere fraction.

COROLLAIRE.

25. Si les racines étoient $m+z$, $p+z$, au lieu de $m-z$, $p-z$, ou ce qui est la même chose, si l'équation est $zz + 2xz + rr = 0$, le second terme κv de la fraction $\frac{a\alpha-\kappa v}{aa+vv}$, sera positif; c'est pourquoi, tous les termes multipliés par les cosinus qui tombent sur le rayon AO seront négatifs, & au contraire; & tous les termes multipliés par les sinus des arcs au-dessus du diametre seront positifs & au contraire.

Par exemple, si $n = 7$, $\theta = 5$, on aura $-\alpha = c2$, $\beta = e4$, $\gamma = g6$, $\kappa = O2$, $\lambda = O4$, $-\mu = O6$, & $\frac{z^4}{r^7-z^7} = \frac{2}{7r^3}$ × par $\frac{-a\alpha+\kappa v}{aa+vv} + \frac{b\beta+\lambda v}{bb+vv} + \frac{c\gamma+\mu v}{cc+vv} - \frac{\frac{1}{2}r}{r-z}$, ou bien $\alpha = b1$, $\beta = d3$, $\gamma = -f5$, $\kappa = O1$, $-\lambda = O3$, $-\mu = O5$; & par conséquent $\frac{z^4}{r^7+z^7} = \frac{2}{7r^3}$ × par $\frac{a\alpha+\kappa v}{aa+vv} + \frac{b\beta-\lambda v}{bb+vv} - \frac{c\gamma+\mu v}{cc+vv} + \frac{\frac{1}{2}r}{r+z}$.

PROBLEME V.

26. *Réduire la fraction* $\frac{z^{\theta+n-1}}{z^{2n}+2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}$ *en des fractions simples, lorsque le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes, & que* θ *est moindre que* n.

Soient m, p, q, t, &c. les diviseurs, on aura $\frac{A}{m-z} + \frac{B}{p-z}$

* *Art.* 17. $= \frac{Ap + Bm - Az - Bx}{mp - mz - pz + zz}$, & * $A = \frac{m^{\theta + n}}{2n(m^{2n} - u\,m^n r^{n-1})}$, ou en divisant

* *Art.* 20. par m^n, $A = \frac{m^\theta}{2n(m^n - u\,r^{n-1})}$: or comme * $2\,u\,r^{n-1} = m^n + p^n$, en mettant la valeur de $u\,r^{n-1}$, il viendra $A = \frac{m^\theta}{n(m^n - p^n)}$, ou à

* *Art.* 20. cause que * $2\,s\,r^{n-1}\sqrt{-1} = m^n - p^n$, on aura enfin $A = \frac{m^\theta}{2\,n\,s\,r^{n-1}\sqrt{-1}}$; & par la même raison $B = \frac{-p^\theta}{2\,n\,s\,r^{n-1}\sqrt{-1}}$. Ainsi $A + B = \frac{m^\theta - p^\theta}{2\,n\,s\,r^{n-1}\sqrt{-1}}$.

Fig. 8. Si à présent on prend dans la circonférence décrite avec le rayon A O $= r$, l'arc A M, tel que son cosinus soit u, plus grand qu'un quart de cercle s'il y a $+u$, ou moindre si c'est $-u$; & l'arc A B qui soit à l'arc A M, comme l'unité à n ; & l'arc A B, qui soit à l'arc A B b, comme l'unité est à θ ; & si α est le

* *Art.* 20. sinus, & x le cosinus de cet arc, on aura * $m^\theta - p^\theta = 2\,\alpha\,r^{\theta-1}$; par conséquent $A + B = \frac{\alpha\,r^\theta}{n\,s\,r^n}$.

En multipliant A & sa valeur par p, B & la sienne par m, leur somme sera $A\,p + B\,m = \frac{pm^\theta - mp^\theta}{2\,n\,s\,r^{n-1}\sqrt{-1}}$, ou parce que $p\,m = r\,r$, en multipliant le numerateur par $r\,r$, & le divisant par son égal $p\,m$, il viendra $A\,p + B\,m = \frac{r^3 \times \overline{m^{\theta-1} - p^{\theta-1}}}{2\,n\,s\,r^n\sqrt{-1}}$.

Or si f exprime le sinus de l'arc B b, on aura $2\,f\,r^{\theta-2}\sqrt{-1} = m^{\theta-1} - p^{\theta-1}$: Donc $A\,p + B\,m = \frac{f\,r^{\theta+1}}{n\,r^n\,s}$. Enfin si l'on multiplie la valeur de la somme A + B par z, il viendra $\frac{A}{m - z} + \frac{B}{p - z} = \frac{r^\theta}{n\,r^n\,s} \times \frac{f\,r - \alpha\,z}{r\,r - 2\,x\,z + z\,z}$, parce que $\overline{m - z} \times \overline{p - z} = r\,r - 2\,x\,z + z\,z$.

Si l'on fait $z - x = v$, on aura $z\,z - 2\,x\,z + x\,x = v\,v$, ou $z\,z - 2\,x\,z = v\,v - x\,x$, & en ajoutant $r\,r$ de part & d'autre, $z\,z - 2\,x\,z + r\,r = v\,v + r\,r - x\,x$, ou si a exprime le sinus de l'arc A B, on aura $a\,a = r\,r - x\,x$, par la nature du cercle : donc $z\,z - 2\,x\,z + r\,r = a\,a + v\,v$; mais $z - x = v$, donne $z = x + v$, & $\alpha\,z = \alpha\,x + \alpha\,v$; en substituant ces valeurs, on aura $\frac{A}{m - z} + \frac{B}{p - z} = \frac{a\,a + v\,v}{f\,r - \alpha\,x - \alpha\,v} \times \frac{r^\theta}{n\,s\,r^n}$, ou à cause que $f\,r$

$= \alpha x + a x$; cette ſomme deviendra enfin $= \frac{r^\theta}{nsr^n} \times \frac{ax - \alpha v}{aa + vv}$.

Tout ce qu'on vient de dire à l'égard de la ſomme des deux premieres fractions, convient également à la ſomme des deux autres quelconques ; c'eſt pourquoi, ſi l'on diviſe la demi-circonférence en n parties égales, commençant au point B, telles que BC, CD, DE, &c. & que l'on prenne les arcs ABb, ACc, ADd, AEe, &c. tels qu'ils ſoient aux arcs AB, AC, AD, AE, &c. comme θ eſt à l'unité ; en nommant les ſinus des derniers a, b, c, d, ceux α, β, γ, δ, &c. & leurs coſinus x, λ, π, μ, on aura $\frac{z^{\theta + n - 1}}{z^{2n} \mp 2uz^n r^{n-1} + r^{2n}} = \frac{r^\theta}{nsr^n} \times$ par $\frac{ax - \alpha v}{aa + vv} + \frac{b\lambda - \beta v}{bb + vv} + \frac{c\mu + \gamma v}{cc + vv} + \frac{d\pi - \delta v}{dd + vv} +$ &c.

REMARQUES.

I. Si l'on prend les arcs ABb, ACc, ADd, AEe, enſorte qu'ils ſoient aux arcs AB, AD, AE, comme $\theta + n$ eſt à l'unité ; les arcs Mb, Mc, Md, Me, ſeront aux arcs AB, AC, AD, AE, comme θ eſt à l'unité ; par conſéquent ſi l'on tire les ſinus b 1, c 2, d 3, e 4, ils ſeront exprimés par α, β, γ, δ, & les coſinus O 1, O 2, O 3, O 4, par x, λ, μ, π, &c.

II. Lorſque le ſecond terme du diviſeur $zz - 2xz + rr$, eſt négatif, la fraction ſimple eſt $\frac{ax + \alpha v}{aa + vv}$; & au contraire ſi c'eſt $+ 2xz$, elle eſt $\frac{- ax + \alpha v}{aa + vv}$: il eſt évident que les coſinus qui tombent ſur le rayon MO, ſeront poſitifs, & au contraire ; & les ſinus qui tombent ſur la demi-circonférence MAX, ſeront poſitifs, & au contraire.

Par exemple, ſi $n = 5$, $\theta = 3$, on aura $\alpha = b$ 1, $- \beta = c$ 2, $\gamma = d$ 3, $- \delta = e$ 4, $\varepsilon = f$ 5, & $x =$ O 1, $\lambda =$ O 2, $\mu =$ O 3, $\pi =$ O 4, $\pi = -$ O 5 ; & par conſéquent $\frac{z^7}{z^{10} \mp 2uz^5 r^4 + r^{12}} = \frac{r^3}{5sr^5} \times$ par $\frac{ax + \alpha v}{aa + vv} + \frac{b\lambda - \beta v}{bb + vv} + \frac{c\mu + \gamma v}{cc + vv} + \frac{d\omega - \delta v}{dd + vv} + \frac{e\pi - \varepsilon v}{ee + vv}$.

LEMME V.

27. *Si l'on prend dans la circonférence d'un cercle autant de parties égales que l'on voudra, telles que* AB, BC, CD, DE, *&c. en tirant les cordes* AB, AC, AD, BH, *on aura toujours* Fig. 9. 10.

A D : A C $\pm$ A E : : B O : B H ; *il y aura* $\mp$ A E, *ou* — A E, *selon que les points* D, E, *tomberont du même, ou du différent côté du point* A, *ou du diametre* A H.

Soit A C prolongée, & D K tirée de telle maniere que D K = D A ; cela posé, puisque A D = D K, C D = D E, & les deux angles D C K, D E A, étant mesurés par la moitié du même arc A C D, sont égaux ; les triangles A D E, C D K, seront semblables & égaux ; & ainsi C K = A E.

Or comme les arcs A B, C D, sont égaux, les angles B H A, C A D, seront égaux : donc les triangles isocelles H O B, A D K, seront semblables ; par conséquent A D : (A K) A C $\pm$ A E : : B O : B H.

COROLLAIRE I.

28. Soient A, B, C, D, les sinus des moitiés des arcs A B, A C, A D, A E, & a le cosinus de l'arc A B, on aura 2 A = A C, 2 C = A D, 2 E = A E, & $2u$ = B H ; par conséquent 2 C : 2 B $\pm$ 2 D : : r : $2u$, ou $2u$C = rB $\pm$ rD.

COROLLAIRE II.

29. Les triangles isocelles & semblables B O H, A B C, donnent B O (r) : B H ($2u$) : : A B (2 A) : A C (2 B), ou bien $2u$A = rB.

PROBLEME VI.

29. *Réduire la fraction* $\frac{z^{\theta+n}}{z^{2n} \mp 2uz^n r^{n-1} + r^{2n}}$, *en des fractions simples, lorsque* θ *est plus grand que* n, *& que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes.*

Soit $\frac{s z^{\theta+n}}{z^{2n} \mp 2u z^n r^{n-1} + r^{2n}} = Az^{\theta-n} + Br^n z^{\theta-2n} + Cr^{2n} z^{\theta-3n} + Dr^{n} z^{\theta-4n} \ldots \omega Q + \nu R$, où Q, R, expriment les restes, après que la division a été continuée tant que l'exposant de z est positif, & ω, ν, leurs coefficiens.

En réduisant cette égalité sous le même dénominateur, on aura :

$$s z^{\theta+n} = A z^{\theta+n} \left\{ \begin{matrix} +B \\ \mp \frac{2u}{r} A \end{matrix} \right\} \times r^n z^\theta \left\{ \begin{matrix} +C \\ \mp \frac{2u}{r} B \\ +A \end{matrix} \right\} \times r^{2n} z^{\theta-n}$$

$$\left\{ \begin{matrix} +D \\ \mp \frac{2u}{r} C \\ +B \end{matrix} \right\} \times r^{3n} z^{\theta-2n}. \left\{ \begin{matrix} +\omega Q \\ \mp \frac{2u}{r} D \\ +C \end{matrix} \right\} r^{4n} z^{\theta-3n}$$

$$\left\{ \begin{matrix} +\nu R \\ +D \end{matrix} \right\} r^{5n} z^{\theta-4n}.$$

De là il suit qu'en comparant les coefficiens, on aura $A = s$, $B \mp \frac{2u}{r} A = 0$, $A + C \mp \frac{2u}{r} B = 0$, $B + D \mp \frac{2u}{r} C = 0$, $\omega + C \mp \frac{2u}{r} D = 0$, $\omega + D = 0$; ce qui donne $A = s$, $\pm 2uA = rB$, $\pm 2uB = rA + rC$, $\pm 2uC = rB + rD$, $\pm 2uD rC + r\omega$, $\nu = -D$.

Or si q exprime le nombre de fois que n est contenu dans θ exactement, il est évident 1°. que la suite ci-dessus contiendra q termes, sans compter les restes; en supposant la division continuée, tant que l'exposant de z soit positif.

2. Si s exprime le sinus Mm, d'un arc AM, dont le cosinus est u, moindre qu'un quart de cercle lorsqu'il y a $-u$, ou plus grand lorsqu'il y a $+u$, dont le rayon est r; alors les lettres A, B, C, D, &c. exprimeront les sinus Nn, Qq, &c. des arcs * double, triple, quadruple, &c. de cet arc. Fig. 11. * Art. 28. 29.

3°. Que si les arcs AR, AS, répondent aux q & $q+1$, divisions, on aura $\omega = Ss$, $-\nu = Rr$; mais parce que $Q = r^{4n} z^{\theta-3n}$, & $R = r^{5n} z^{\theta-4n}$, lorsque $D r^{3n} z^{\theta-4n}$ est le dernier terme, il est évident que $Q = r^{qn} z^{\theta-qn+n}$, & $R = r^{qn+n} z^{\theta-qn}$, lorsque $D r^{qn+n} z^{\theta-qn}$ est le dernier terme. Donc $\frac{z^{\theta+n}}{z^{2n} \mp 2u z^n r^{n-1} + r^{2n}} = \frac{1}{s} \times$ par $Mm \times z^{\theta-n} + Nn \times r^n z^{\theta-2n} + Qq \times r^{2n} z^{\theta-3n} \omega Q + \nu R$.

Le reste étant divisé par le dénominateur & réduit en des fractions simples par le probleme V, achevera la solution de ce probleme.

COROLLAIRE I.

31. Si l'on prend l'arc A B, tel que $n \times$ A B $=$ A M, comme on a $q \times$ A M $=$ A R, & $\overline{q+1} \times$ A M $=$ A S, on aura $q n \times$ A B $=$ A S, & $\overline{qn+n} \times$ A B $=$ A S : or si m, p, expriment

* Art. 20. les racines de l'équation $zz - 2xz + rr = 0$, on aura * $s = \frac{p^n - m^n}{2r^{n-1}\sqrt{-1}}$, & par la même raison R r sera $= \frac{m^{qn} - p^{qn}}{2r^{qn-1}\sqrt{-1}}$, & S $s = \frac{m^{qn+n} - p^{qn+n}}{2r^{qn+n-1}\sqrt{-1}}$.

COROLLAIRE II.

32. De là il suit que si l'on met la racine m au lieu de z, dans le reste $\frac{Ss}{s} \times r^{qn} z^{\theta - qn + n} - \frac{Rr}{s} \times r^{qn+n} z^{\theta - qn}$, on aura $\overline{Ss \times m^{-qn} - Rr \times r^n m^{-qn-n}} \times \frac{r^{qn} m^{\theta+n}}{s}$.

Or si l'on multiplie la valeur de S s, par m^{-qn}, il viendra $m^{-qn} \times Ss = \frac{m^n - m^{-n} p^{qn+n}}{2r^{qn+n-1}\sqrt{-1}}$; & en multipliant celle de R r, par $r^n m^{-qn-n}$, alors $r^n m^{-qn-n} \times Rr = \frac{r^{2n} m^{-n} - r^{2n} p^{qn} m^{-qn-n}}{2r^{qn+n-1}\sqrt{-1}}$;

* Art. 20. mais à cause que * $r^{2n} = p^n m^n$ $r^{2n} m^{-n}$ sera $= p^n$, & en multipliant chaque côté par $p^{qn} m^{-qn}$, on aura $r^{2n} p^{qn} m^{-qn-n} = p^{qn+n} m^{-qn}$; par conséquent en substituant ces valeurs dans le reste, il viendra $\frac{m^n - m^{-qn} p^{qn+n} - p^n + m^{-qn} p^{qn+n}}{s r^{n-1}} \times$ par $m^{\theta+n}$, ou $\frac{m^n - p^n}{2 s r^{n-1}} \times m^{\theta+n} = m^{\theta+n}$.

COROLLAIRE III.

33. Si A & B expriment les numerateurs des deux premieres fractions simples, on aura A $= \frac{m^{\theta+n}}{2n(m^{2n-1} - u m^{n-1} r^{n-1})}$, ou en di-

* Art. 20. visant par m^{n-1}, A $= \frac{m^{\theta+1}}{2n(m^n - ur^{n-1})}$, ou à cause * $2ur^{n-1} = m^n + p^n$, A $= \frac{m^{\theta+1}}{n(m^n - p^n)}$, ou bien A $= \frac{m^{\theta+1}}{2nr^{n-1}s\sqrt{-1}}$; & par la

* Art. 26. même raison on aura * B $= \frac{-p^{\theta+1}}{2nsr^{n-1}\sqrt{-1}}$; par conséquent les

fractions simples peuvent être trouvées de la même maniere que dans l'article 26me : il faut prendre garde que l'exposant de z, dans le numerateur est ici $\theta + n$, & là il étoit $\theta + n - 1$; enfin $\theta + 1$, répond à θ dans le premier cas.

Il est donc manifeste qu'on peut toujours réduire une fraction trinome en des fractions simples, soit que l'exposant de la quantité variable dans le numerateur qui l'affecte soit plus grand ou moindre que celui dans le dénominateur.

PROBLEME VII.

34. *Trouver la fluente de* * $\frac{ry\dot{z} - xz\dot{z}}{rr \mp 2xz + zz}$. * Art. 22

En supposant $z - x = v$, cete fluxion sera changée * en $\frac{aa\dot{v} - xv\dot{v}}{aa + vv}$. Or si dans la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = r$, l'on prend l'arc AB, moindre qu'un quart de cercle, telle que son cosinus $OQ = x$; & si dans le rayon prolongé vers A, s'il est nécessaire, on prend $OP = z$; en tirant les lignes PB, OB, je dis que $\alpha(PBO) - x(PB : BO)$ sera la fluente cherchée. Fig. 12

L'on suppose que $\alpha(PBO)$ exprime la mesure de l'angle PBO, & dont le rayon est α, & $x(PB : BO)$ le logarithme de $\frac{PB}{BO}$, multiplié par x. Car si du centre B, l'on décrit un arc avec le rayon BQ (a), coupant PB en T, & BO en V, on aura $\frac{aa\dot{v}}{aa + vv}$ pour la fluxion de l'arc QT ; & $\frac{v\dot{v}}{aa + vv}$ pour la fluxion du logarithme de $\frac{\sqrt{aa + vv}}{a} = \frac{PB}{a}$; mais lorsque $z = 0$, $z - x = v$, donne $-x = v$, & $a = r$; & l'arc QT devient alors l'arc $-QV$; c'est pourquoi $TQ + QV$, ou TV, exprimera la fluente complette de $\frac{aa\dot{v}}{aa + vv}$: & comme $a : \alpha :: TV : \frac{\alpha}{a} TV$ égal à un arc semblable à l'arc TV, dont le rayon est α, il s'ensuit que $\alpha(PBO) - x(PB : BO)$ exprimera la fluente demandée.

Lorsque x sera plus grand que z, le point P tombera entre les points O & Q, comme dans la figure 13 ; & lorsque l'équation simple sera $zz + 2xz + rr$, le point Q tombera de l'autre côté du centre O, à l'égard du point P comme dans la figure 14, & $\alpha(PBO) + x(PB : BO)$ sera alors la fluente cherchée. Fig. 13 Fig. 14

Pour rendre ceci plus à portée de la pratique, on nommera D, le nombre de degrés de l'arc TV, & le logarithme tabulaire de $\frac{PB}{BO}$, L; ce qui donnera $\alpha D \times 0.01745329 \mp x L \times 2.30258509$, pour cette fluente, par ce qui a été dit dans la seconde section du troisiéme livre qui traite des fluentes.

PROBLEME VIII.

35. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot{z}z^{\theta n-1}}{e+fz^n}$, *lorsque* θ *est un nombre entier quelconque.*

Si l'on réduit la fraction $\frac{1}{fz^n+e}$, en une suite par une division continuelle, & multipliant les termes par le numerateur $d\dot{z}z^{\theta n-1}$, & en prenant la fluente de chaque terme en la maniere ordinaire, on aura $\frac{dz^{\theta n}}{nf} \times$ par $\left(\frac{z^{-n}}{\theta-1} - \frac{e}{f} \times \frac{z^{-2n}}{\theta-2} + \frac{ee}{ff} \times \frac{z^{-3n}}{\theta-3} - \frac{e^3}{f^3} \times \frac{z^{-4n}}{\theta-4}\right)$ - - - $\pm \frac{de^{\theta-1}}{nf^\theta}\, l\, \frac{e+fz^n}{e}$, pour la fluente demandée. L'on doit remarquer que cette suite doit être continuée à $\theta - 1$ termes, outre le dernier terme $l\, \frac{e+fz^n}{e}$, qui exprime le logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$; & le signe de ces logarithmes doit être le contraire de celui du dernier terme de la suite.

Lorsque θ est négatif, la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n-1}}{e+fz^n}$, sera $\frac{dz^{-\theta n}}{ne} \times$ par $\left(\frac{-1}{\theta} + \frac{f}{e} \times \frac{z^n}{\theta-1} - \frac{ff}{ee} \times \frac{z^{2n}}{\theta-2} + \frac{f^3}{e^3} \times \frac{z^{3n}}{\theta-3}\right)$ - - $\mp \frac{df^\theta}{ne^{\theta+1}}\, l\, \frac{e+fz^n}{z^n}$; en faisant e le premier terme du diviseur, cette suite doit être continuée au nombre θ de termes.

Par exemple, si $\theta = 5$, la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{5n-1}}{e+fz^n}$, sera $\frac{dz^{4n}}{4nf} - \frac{dez^{3n}}{3nff} + \frac{deez^{2n}}{2nf^3} - \frac{de^3z^n}{nf^4} + \frac{de^4}{nf^5}\, l\, \frac{e+fz^n}{e}$.

Et la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-5n-1}}{e+fz^n}$, sera $\frac{-d}{5nez^{5n}} + \frac{df}{4neez^{4n}} - \frac{dff}{3ne^3z^{3n}} + \frac{df^3}{2ne^4z^{2n}} - \frac{df^4}{ne^5z^n} + \frac{df^5}{ne^6}\, l\, \frac{e+fz^n}{z^n}$.

PROBLEME

PROBLEME IX.

36. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot{z}z^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda}n - 1}}{e + fz^n}$, *lorsque* θ, δ, λ, *sont des nombres entiers quelconques positifs, & que* δ *est moindre que* λ.

Il est évident que cette fluxion peut être réduite à $\frac{d\,e^{\theta}\,\dot{z}\,z^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}}{f^{\theta}, \overline{e + fz^n}}$, par une division continuelle de la même maniere que dans le probleme précédent. Or si l'on fait $\frac{e}{f} = a^n$, & $v = a \times \frac{\bar{z}}{a}\, l\, \frac{n}{\lambda}$, *Fig.* 71 cette derniere fluxion peut être changée en celle-ci, $\frac{\lambda\, e^{\theta}}{n f^{\theta + 1}}$. $a^{\frac{\delta}{\lambda}n + \theta - \delta - n} \times \frac{\dot{v}\, v^{\delta - 1}}{a^{\lambda} + v^{\lambda}}$. Or si la demi-circonférence décrite avec le rayon A O $= a$, est divisée en λ parties aux points B, C, D, E, &c. & si l'on prend les arcs A B b, A C c, A D d, A E e, &c. qui soient aux arcs A B, A C, A D, A E, &c. comme δ est à l'unité : cela posé, en prenant O P $= v = a \times \frac{\bar{z}}{a}\, l\, \frac{n}{\lambda}$; si l'on tire les sinus b 1, c 2, d 3, e 4, &c. & du point P, & du centre O, des lignes aux points B, C, D, E, &c. en faisant $\theta + \frac{\delta}{\lambda} = r$, la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda}n - 1}}{e + fz^n}$, lorsque $\frac{e}{f}$, ou a^n est positif, sera

$$\frac{dz^{rn}}{nf} \times \text{par} \left(\frac{z^{-n}}{r-1} - \frac{e}{f} \times \frac{z^{-2n}}{r-2} + \frac{ee}{ff} \times \frac{z^{-3n}}{r-3} - \frac{e^3}{f^3} \times \frac{z^{-4n}}{r-4} + \frac{e^4}{f^4} \times \frac{z^{-5n}}{r-5} - \frac{e^5}{f^5} \times \frac{z^{-6n}}{r-6} \cdots \right) + \frac{2d}{nf} \times \frac{e}{f}^{-r - \frac{1}{n} - 1} \times \left\{ \begin{array}{l} O\,1\,(PB:BO) + b\,1\,(PBO) \\ -O\,3\,(PD:DO) + d\,3\,(PDO) \\ -O\,5\,(PF:FO) - f\,5\,(PFO) \\ + HO\,(PH:HO)\ \&c. \end{array} \right\}$$

Mais si $\frac{e}{f}$, ou a est négatif, cette fluente sera

$$\frac{dz^{rn}}{nf} \times \text{par} \left(\frac{z^{-n}}{r-1} + \frac{e}{f} \times \frac{z^{-2n}}{r-2} + \frac{ee}{ff} \times \frac{z^{-3n}}{r-3} + \frac{e^3}{f^3} \times \frac{z^{-4n}}{r-4} + \frac{e^4}{f^4} \times \frac{z^{-5n}}{r-5} + \frac{e^5}{f^5} \times \frac{z^{-6n}}{r-5} \cdots \right) + \frac{2d}{nf} \times \frac{e}{f}^{-r - \frac{1}{n} - 1} \times \left\{ \begin{array}{l} -AO\,(PA:AO) \\ +O\,2\,(PC:CO) - C\,2\,(PCO) \\ +O\,4\,(PE:EO) + e\,4\,(PEO) \\ -O\,6\,(PG:GO) + g\,6\,(PGO) \end{array} \right\}$$

Il faut remarquer que le signe de la quantité que multiplient les mesures des angles & des logarithmes, doit être le contraire de celui du dernier terme, dans la premiere fluente, & de même dans la seconde.

COROLLAIRE.

37. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^{n}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n-n-\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{ez^{-n}+f}$; & comme $\frac{-\theta n-n-\frac{\delta}{\lambda}n}{-n} = \theta+1-\frac{\delta}{\lambda}$; par conséquent, si l'on suppose que $r=\theta+1-\frac{\delta}{\lambda}$, dans les deux dernieres fluentes, & que l'on mette e pour f, f pour e, $-n$ pour n, & z^{-n} pour z^{n}, cette fluente deviendra la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^{n}}$.

EXEMPLE.

Soit $\delta=5$, $\lambda=7$, $\theta=3$, la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{3n+\frac{5}{7}n-1}}{e+fz^{n}}$, sera dans le premier cas.

$$\frac{7dz^{\frac{19}{7}n}}{19nf}-\frac{7dez^{\frac{12}{7}n}}{12nff}+\frac{7deez^{\frac{5}{7}n}}{5nf^{3}}-\frac{2d}{nf}\times\frac{e}{f}^{\frac{-19}{7}-\frac{1}{n}}\times\begin{Bmatrix}+O1(PB:BO)+b1(PBO)\\-O3(PD:DO)+d3(PDO)\\-O5(PF:FO)-f5(PFO)\\+AO(PH:HO)\end{Bmatrix}$$

Et celle du second cas sera

$$\frac{7dz^{\frac{19}{7}n}}{19nf}+\frac{7dez^{\frac{12}{7}n}}{12nff}+\frac{7deez^{\frac{5}{7}n}}{5nf^{3}}+\frac{2d}{nf}\times\frac{e}{f}^{\frac{-19}{7}-\frac{1}{n}}\times\begin{Bmatrix}-AO(PB:BO)\\+O2(PC:CO)-C2(PCO)\\+O4(PE:EO)+e4(PEO)\\-O6(PG:GO)+g6(PGO)\end{Bmatrix}$$

Ceci s'accorde parfaitement avec les tables des fluentes du Docteur Smith, p. 145. du livre intitulé *Harmonia Mensurarum*.

PROBLEME X.

38. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}}$, *lorsque* θ *est un nombre entier quelconque, & que le dénominateur peut être réduit en deux binomes.*

Soit $\frac{dz^{\theta n+n}}{gz^{2n}+fz^{n}+e} = A z^{\theta n - n} + B e z^{\theta n - 2n} + C e e z^{\theta n - 3n} + D e^3 z^{\theta n - 4n} \cdots \omega F + \nu G$.

En réduisant cette égalité sous la même dénomination, on aura

$$d z^{\epsilon n + n} = g A z^{\theta n + n} \left.\begin{array}{l} +gB \\ +fA \end{array}\right\} e z^{\theta n} \left.\begin{array}{l} +gC \\ +fB \\ +eA \end{array}\right\} ee z^{\epsilon n - n} \left.\begin{array}{l} +gD \\ +fC \\ +eB \end{array}\right\}$$

$$e^3 z^{\theta n - 2n} \left.\begin{array}{l} +fD \\ +eC \end{array}\right\} e^4 z^{\theta n - 4n} + e D e^5 z^{\theta n - 5n}.$$

Et en comparant les coefficiens des termes égaux, on aura $gA = d$, $gB + fA = 0$, $gC + fB + eA = 0$, $gD + fC + eB = 0$, $fD + eC = \omega$, $eD = \nu$: d'où l'on tire $A = \frac{d}{g}$, $-B = \frac{fA}{g}$, $-C = \frac{fB + eA}{g}$, $-D = \frac{fC + eB}{g}$, $-\omega = fD + eC$, $-\nu = eD$.

Par conséquent la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n + n - 1}}{e + fz^n + gz^{2n}}$, sera $\frac{z^{\theta n}}{nz^n} \times$ par $\left(\frac{A}{\theta - 1} + \frac{B}{\theta - 2} \times \frac{e}{z^n} + \frac{C}{\theta - 3} \times \frac{e^2}{z^{2n}} + \frac{D}{\theta - 4} \times \frac{e^3}{z^{3n}} + \frac{E}{\theta - 5} \times \frac{e^4}{z^{4n}}\right) \cdots - \overline{fD + eC}, F - eDG$.

Cette suite doit être continuée à $\theta - 1$, termes sans le reste ; & il faut remarquer que F est la fluente de $\frac{\dot{z}z^{2n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}}$ & G, celle de $\frac{\dot{z}z^{n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}}$; mais lorsque $\theta = 2$, le coefficient C deviendra $= 0$.

COROLLAIRE I.

39. Si l'on fait $\nu = \frac{f}{2g} + z^n$, & $aag = \frac{1}{4}ff - eg$, la fluxion de G, peut être changée en celle-ci, $\frac{1}{n} \times \frac{\dot{v}}{gvv - aa}$, & celle de F, en $\frac{1}{2ng} \times \frac{2gv\dot{v} - f\dot{v}}{gvv - aa}$. Or si l'on fait $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$, $T = \nu$, $S = \frac{\overline{gvv - aa}^{\frac{1}{2}}}{g}$, $M = \log. \frac{e + fz^n + gz^{2n}}{e}$, on aura $G = \frac{-1}{naa}(1)$, $F = \frac{1}{2ng} M + \frac{f}{2ngaa}(1)$; en supposant que (1) est le logarithme de $\frac{R + T}{S}$, multiplié par R, lorsque $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$, ou un arc de cercle dont le rayon est R, la tangente T, & la secante S, lorsque

$R = \frac{a}{\sqrt{g}}$; mais comme cette derniere valeur eſt impoſſible, on prend $R = \frac{a}{\sqrt{g}}$; car dans ce cas la fluxion $\frac{\dot{v}}{gvv - aa}$, devient $\frac{-\dot{v}}{gvv + aa}$, ou bien $\frac{1}{g} \times \frac{-\dot{v}}{\frac{aa}{g} + vv}$.

COROLLAIRE II.

40. De là il ſuit que la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{3n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}$, ſera $\frac{dz^n}{ng} - \frac{fd}{2ngg}$. $M + \frac{eeg - ff}{2naagg} d\,(1)$; parce que C eſt ici $= 0$, $\theta = 2$, & $D = \frac{d}{g}$.

COROLLAIRE III.

41. Lorſque θ eſt négatif, la fluxion de $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n + n - 1}}{e+fz^n+gz^{2n}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n - n - 1}}{ez^{-2n}+fz^{-n}+g}$: or comme $\frac{-\theta n - n}{-n} = \theta + 1$; en mettant e pour g, g pour e, $-n$ pour n, & z^{-n} pour z^n, dans la fluente ci-deſſus, elle deviendra la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n + n - 1}}{e+fz^n+gz^{2n}}$; comme il ſuit $\frac{dz^n}{-nz^{\theta n}} \times$ par $\left(\frac{A}{\theta - 1} + \frac{B}{\theta - 2} \times \frac{z^n}{e} + \frac{C}{\theta - 3} \times \frac{z^{2n}}{ee} + \frac{D}{\theta - 4} \times \frac{z^{3n}}{e^3} + \frac{E}{\theta - 5} \times \frac{z^{4n}}{e^4}\right) \text{---} - \overline{fD + gC}, F - gDC$.

$+A = \frac{d}{e}$	$v = \frac{2e + fz^n}{2ez^n}$	
$-B = \frac{fA}{e}$	$aa = \frac{ff - 4eg}{4e}$	$G = \frac{1}{naa}\,(1)$.
$-C = \frac{fB + gA}{e}$	$R = \frac{a}{\sqrt{e}}$	$F = \frac{-1}{2ne} M - \frac{f}{2neaa}\,(1)$.
$-D = \frac{fC + gB}{e}$	$S = \frac{\overline{evv - aa}^{\frac{1}{2}}}{e}$	$M = \frac{e + fz^n + gz^{2n}}{z^{2n}}$.

Ainſi la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}}$, ſera $\frac{-d}{nez^n} + \frac{df}{2nee} M \mp \frac{2eg - ff}{2neaa} d\,(1)$.

PROBLEME XI.

42. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot{z}z^{\theta + n - 1}}{z^{2n} \mp 2uz^n r^{n-1} + r^{2n}}$, *lorſque* θ, n *ſont des nombres entiers quelconques, & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes.*

Si dans la circonférence décrite avec le rayon A O $= r$, on prend l'arc A M, dont le cosinus soit u, plus grand qu'un quart de cercle, si le second terme du dénominateur est positif, ou moindre s'il est négatif; en prenant autant d'arcs tels que M N, N Q, Q R, R S, &c. égaux à l'arc A M, qu'il y a d'unités dans $\theta - 1$; & que de leurs extrêmités l'on tire les perpendiculaires N n, Q q, R r, S s, &c. à O M prolongé. Cela posé, si dans le rayon A O, on prend O P $= z$, & si l'arc A B est pris tel qu'il soit à l'arc A M, comme l'unité est à n, en divisant la circonférence en n parties égales aux points B, C, D, E, &c. & en prenant enfin les arcs A B b, A C c, A D d, A E e, &c. tels qu'ils soient aux arcs A B, A C, A D, A E, &c. comme $\theta + n$ est à l'unité; si l'on tire après cela du point B, & du centre O, des lignes aux points B, C, D, E, &c. aussi bien que les sinus b 1, c 2, d 3, e 4, &c. la fluente de $\frac{d\dot{z}\, z^{\overline{\theta+n-1}}}{z^{2n} \mp 2u z^n r^{\overline{n-1}} + r^{2n}}$, sera * Fig. 15.

* Art. 26. 34.

$$\frac{dz^{\theta}}{sz^{n}} \times \text{par} \left(\frac{Nn}{\theta - n} + \frac{Qq}{\theta - 2n} \times \overline{\tfrac{r}{z}}^{\,-n} - \frac{Rr}{\theta - 3n} \times \overline{\tfrac{r}{z}}^{\,-2n} - \frac{Ss}{\theta - 4n} \times \overline{\tfrac{r}{z}}^{\,-3n} \right) - - - + \frac{dr^{\theta}}{nsr^{n}} \left\{ \begin{array}{l} + b1\,(PB : BO) + O1\,(PBO) \\ - c2\,(PC : CO) + O2\,(PCO) \\ - d3\,(PD : DO) + O3\,(PDO) \\ - e4\,(PE : EO) - O4\,(PEO) \\ + f55\,(PF : FO) - O5\,(PFO) \end{array} \right\}$$

Et la fluente de $\frac{d\dot{z}\, z^{\overline{n-\theta-1}}}{z^{2n} \mp 2u z^n r^{\overline{n-1}} + r^{2n}}$, sera

$$\frac{dz^{n}}{sz^{\theta}} \times \text{par} \left(\frac{Nn}{n - \theta} + \frac{Qq}{2n - \theta} \times \overline{\tfrac{z}{r}}^{\,-n} - \frac{Rr}{3n - \theta} \times \overline{\tfrac{z}{r}}^{\,-2n} - \frac{Ss}{4n - \theta} \times \overline{\tfrac{z}{r}}^{\,-3n} \right) - - - + \frac{dr^{\overline{-\theta}}}{nsr^{n}} \left\{ \begin{array}{l} + b1\,(PB : BO) + O1\,(BPO) \\ - c2\,(PC : CO) + O2\,(CPO) \\ - d3\,(PD : DO) + O3\,(DPO) \\ - e4\,(PE : EO) - O4\,(EPO) \\ + f5\,(PF : FO) - O5\,(FPO) \end{array} \right\}$$

Car si l'on fait $z = \frac{rr}{v}$, cette derniere fluxion peut être changée en celle-ci, $\frac{r^{\overline{-2\theta}} \times d\dot{v}\, v^{\overline{n+\theta-1}}}{v^{2n} \mp 2uv^n r^{\overline{n-1}} + r^{2n}}$, dont la fluente peut être trouvée de la même maniere que dans le premier cas; mais à cause que l'angle dont la tangente est v, est le complément de l'angle dont la tangente est z, à un angle droit, selon ce qui a été dit dans le septiéme probleme; c'est pourquoi les angles P B O, P C O, &c. dans le premier cas deviennent B P O, C P O, &c. dans le second.

PROBLEME XII.

43. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot z\, z^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^{2n}\mp 2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}$, *lorsque* n, δ, λ, *sont des nombres entiers quelconques, & que le dénominateur ne peut être réduit en deux binomes.*

La même construction étant supposée comme dans le probleme précédent, excepté qu'il y a ici autant de lignes telles que Nn, Rr, Ss, Tt, &c. qu'il y a d'unités dans la fraction $\frac{\delta}{\lambda}$, & que les arcs ABb, ACc, ADd, AEe, &c. sont ici aux arcs AB, AC, AD, AE, &c. comme $\lambda+\delta$ est à l'unité, & OP $= r\times\frac{z}{r}^{\frac{n}{\lambda}}$; la fluente cherchée sera

$$\frac{\lambda d z^{\frac{\delta}{\lambda}n}}{nsz^n}\times\text{par}\left(\frac{Nn}{\delta-\lambda}+\frac{Qq}{\delta-2\lambda}\times\frac{r}{z}^{n}-\frac{Rr}{\delta-3\lambda}\times\frac{r}{z}^{2n}-\frac{Ss}{\delta-4\lambda}\times\frac{r}{z}^{3n}\right)\cdots+\frac{dr^{\frac{\delta}{\lambda}n}}{nsr^n}\left\{\begin{array}{l}+b1(PB:BO)+O1(PBO)\\-c2(PC:CO)+O2(PCO)\\-d3(PD:DO)+O3(PDO)\\-e4(PE:EO)-O4(PEO)\\+f5(PF:FO)-O5(PFO)\end{array}\right\}$$

Et la fluente de $\frac{d\dot z\, z^{n-\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^{2n}\mp 2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}$, sera

$$\frac{\lambda d z^{n-\frac{\delta}{\lambda}n}}{ns}\times\text{par}\left(\frac{Nn}{\delta-\lambda}+\frac{Qq}{\delta-2\lambda}\times\frac{z}{r}^{n}-\frac{Rr}{\delta-3\lambda}\times\frac{z}{r}^{2n}-\frac{Ss}{\delta-4\lambda}\times\frac{z}{r}^{3n}\right)\cdots+\frac{dr^{-\frac{\delta}{\lambda}n}}{nsr^n}\left\{\begin{array}{l}+b1(PB:BO)+O1(OPB)\\-c2(PC:CO)+O2(OPC)\\-d3(PD:DO)+O3(OPD)\\-e4(PE:EO)-O4(OPE)\\+f5(PF:FO)-O5(OPF)\end{array}\right\}$$

Car si l'on fait $v=r\times\frac{z}{r}^{\frac{n}{\lambda}}$, la fluxion $\frac{d\dot z\, z^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^{2n}\mp 2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}$ peut être changée en celle-ci $\frac{\lambda}{n}r^{\frac{\delta}{\lambda}n+\lambda-\delta-n}\times\frac{d\dot v\, v^{\lambda+\delta-1}}{v^{2\lambda}\mp 2uv^\lambda r^{\lambda-1}+r^{2\lambda}}$, dont la fluente peut être trouvée de la même maniere que dans le dernier probleme.

PROBLEME XIII.

44. *Trouver la fluente de* $\frac{d\dot z\, z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n+z^{2n}}$, *lorsque* δ *est moindre que* λ, *& que le dénominateur peut être réduit en deux binomes.*

Si l'on suppose $a^n = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\sqrt{ff-4e}$, & $b^n = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\sqrt{ff-4e}$; cette fluxion peut être changée en celle-ci $\frac{1}{\sqrt{ff-4e}}$ × par $\left(\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{b^n+z^n}\right) - \frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{a^n+z^n}$; c'est pourquoi si l'on retient la construction de l'article 36, & $OP = b \times \overline{\frac{z^n}{b^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, $\theta + \frac{\delta}{\lambda} = r$, la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{b^n+z^n}$, sera Fig. 7.

$$\frac{dz^{rn}}{nz^n} \times \text{par} \left(\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2}\times\overline{\frac{b}{z}}^{n} + \frac{1}{r-3}\times\overline{\frac{b}{z}}^{2n} + \frac{1}{r-4}\times\overline{\frac{b}{z}}^{3n} + \frac{1}{r-5}\times\overline{\frac{b}{z}}^{4n}\right)\cdots + \frac{2db^{rn-1}}{nb^n}\left\{\begin{array}{l} +O1(PB:BO)+b1(PBO) \\ -O3(PD:DO)+d3(PDO) \\ -O5(PF:FO)-f5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array}\right\}$$

Et la fluente de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^n-b^n}$, sera

$$\frac{dz^{rn}}{nz^n} \times \text{par} \left(\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2}\times\overline{\frac{b}{z}}^{n} + \frac{1}{r-3}\times\overline{\frac{b}{z}}^{2n} + \frac{1}{r-4}\times\overline{\frac{b}{z}}^{3n} + \frac{1}{r-5}\times\overline{\frac{b}{z}}^{4n}\right)\cdots + \frac{2dbr^{n-1}}{nb^n}\left\{\begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O2(PC:CO)-c2(PCO) \\ +O4(PE:EO)+e4(PEO) \\ -O6(PG:GO)+g6(PGO) \end{array}\right\}$$

S'il y a $b^n - z^n$ au lieu de $z^n - b^n$, il ne faut que changer la fluxion en $\frac{-d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^n-b^n}$.

COROLLAIRE I.

45. Il est évident qu'en changeant b pour a dans la derniere fluente, elle deviendra celle de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{a^n \pm z^n}$, laquelle étant retranchée de la premiere, & la différence divisée par $\sqrt{ff-4e}$, donnera la fluente cherchée de $\frac{d\dot{z}z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n+z^{2n}}$.

COROLLAIRE II.

46. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{d\dot{z}z^{\frac{\delta}{\lambda}n-\theta n-1}}{b^n+z^n}$, peut être

changée en celle-ci, $\frac{d\dot{z}\, z^{\frac{\delta}{\lambda}n - \theta n - n - 1}}{b^n\, z^{-n} + 1}$; & comme $\frac{\frac{\delta}{\lambda}n - \theta n - n}{-n} = \theta + 1 - \frac{\delta}{\lambda}$; en ſuppoſant dans la derniere fluente $r = \theta + 1 - \frac{\delta}{\lambda}$, & que l'on mette b^n pour l'unité, l'unité pour b, z^{-n} pour z^n, & $-n$ pour n, on aura la fluente cherchée.

PROBLEME XIV.

47. *Trouver la fluente de* $d\dot{z}\, z^m \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, *lorſqu'elle peut être trouvée exactement, ou qu'elle peut être réduite à la quadrature des ſections coniques.*

Soit $\frac{m+1}{n} = \theta$, $P = e + f z^n$, & ſoit $P^{\pi+1} \times$ par ($K z^{\theta n - n} + L z^{\theta n - 2n} + M z^{\theta n - 3n} + N z^{\theta n - 4n}$) --- $\pm x F$ la fluente demandée ; la fluxion de cette fluente étant diſpoſée par ordre en faiſant $\theta + \pi = r$, ſera ($r f K + \left.\begin{matrix}\overline{\theta - 1}, eK \\ \overline{r - 1}, fL\end{matrix}\right\} z^{-n} + \left.\begin{matrix}\overline{\theta - 2}, eL \\ \overline{r - 2}, fM\end{matrix}\right\} z^{-2n} + \left.\begin{matrix}\overline{\theta - 3}, eM \\ \overline{r - 3}, fN\end{matrix}\right\} z^{-3n} + \overline{\theta - 4}, eN z^{-4n}$) $\times$ par $n\dot{z}\, z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

Car ſi $z^{\theta n - sn} P^{\pi+1}$, exprime un terme quelconque de cette fluente ſuppoſée, ſa fluxion ſera $\overline{\theta n - sn}, \dot{z}\, z^{\theta n - sn - 1} P^{\pi+1} + \overline{\pi + 1}, z^{\theta n - sn} \dot{P} P^{\pi}$.

Ou bien ($\overline{\theta n - sn}, \dot{z}\, z^{-sn} P + \overline{\pi + 1}, z^{-sn+1} \dot{P}$) $\times$ par $z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

Ou à cauſe que $P = e + f z^n$, & $\dot{P} = n f \dot{z}\, z^{n-1}$ ($\overline{\theta - s}, e z^{-sn} + \overline{\begin{smallmatrix}\theta - s \\ + \pi + 1\end{smallmatrix}} f z^{n - sn}$) $\times$ par $n\dot{z}\, z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

Ou enfin parce que $\theta + \pi = r$, ($\overline{\theta - s}, e z^{-sn} + \overline{r - s + 1}, f z^{n - sn}$) $\times$ par $n\dot{z}\, z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

D'où en faiſant s ſucceſſivement égale à 1, 2, 3, 4, &c. on aura les fluxions des termes comme ci-deſſus.

Or en faiſant le coefficient $r f K$ du premier terme de cette fluxion égal au coefficient d de la fluxion propoſée, & ceux des autres termes chacun égal à zero, on aura

$rnfK$

$rnfK = d.$

$\overline{\theta - 1}, eK + \overline{r - 1}, fL = 0$, ou $+ K = \frac{d}{rnf}.$

$\overline{\theta - 2}, eL + \overline{r - 2}, fM = 0 \quad - L = \frac{\theta - 1}{r - 1} \times \frac{de}{nrff}.$

$\overline{\theta - 3}, eM + \overline{r - 3}, fN = 0 \quad + M = \frac{\theta - 1}{r - 1} \times \frac{\theta - 2}{r - 2} \times \frac{dee}{nrf^3}.$

$- N = \frac{\theta - 1}{r - 1} \times \frac{\theta - 2}{r - 2} \times \frac{\theta - 3}{r - 3} \times \frac{de^3}{nrf^4}.$

Mais parce que $x = \overline{\theta - 4}, neN$, & $\dot{F} = \dot{z} z^{\theta n - 4n - 1} P^{\pi}$, lorſque $N z^{\theta n - 4n} P^{\pi + 1}$ eſt le dernier terme de la ſuite ; par la même raiſon $x = vneQ$, & $\dot{F} = \dot{z} z^{vn - 1} P^{\pi}$, lorſque $Q z^{vn} P^{\pi + 1}$ eſt le dernier terme ; en ſuppoſant v la moindre fraction de θ, ou de ſon égal $\frac{m + 1}{n}$; par conſéquent $\frac{dz^{\theta n - n}}{nrf} P^{\pi + 1} - \frac{\theta - 1}{r - 1} \times \frac{Ae}{fz^n} - \frac{\theta - 2}{r - 2} \times \frac{Be}{fz^n} - \frac{\theta - 3}{r - 3} \times \frac{Ce}{fz^n} - \frac{\theta - 4}{r - 4} \times \frac{De}{fz^n} - - - - vneQF$ ſera la fluente cherchée ; les lettres A, B, C, D, expriment chacune le terme qui la précéde avec ſon ſigne, & F le reſte avec un ſigne contraire à celui du dernier terme.

COROLLAIRE I.

48. De là il ſuit que ſi θ, ou $\frac{m + 1}{n}$ eſt un nombre entier, & r, ou $\theta + \pi$, une fraction, ou un nombre entier plus grand que θ, la fluente ſera toujours finie & exprimée par θ termes. Si $\theta = 1$, la fluente ſera $\frac{dP^{\pi + 1}}{\overline{1 + \pi}, nf}$, ſi $\theta = 2$, elle ſera $\frac{dz^n}{\overline{2 + \pi}, nf} - \frac{d}{\overline{1 + \pi}, \overline{2 + \pi}, nff} \times$ par $P^{\pi + 1}$.

COROLLAIRE II.

49. Lorſque θ, ou $\frac{m + 1}{n}$ eſt négatif ; en diviſant la quantité $e + fz^n$ ſous le ſigne par z^n, & multipliant celle hors du ſigne par ſon égal $z^{\pi n}$, la fluxion $dz^{-\theta n - 1} \times \overline{e + fz^n}^{\pi}$, deviendra $d\dot{z} z^{-\theta n + \pi n - 1} \times \overline{e z^{-n} + f}^{\pi}$. Or comme $\frac{\pi n - \theta n}{-n} = \theta - \pi$; en mettant cette valeur au lieu de θ, dans $\theta + \pi = r$, on aura $\theta = r$; & en faiſant $\theta - \pi = s$, & ſubſtituant e pour f, f pour e,

z^{-n} pour z^n, & $= n$ pour n dans la derniere fluente, elle deviendra $\frac{d z^{n - \theta n}}{- n e \theta} P^{\pi + 1} - \frac{s - 1}{\theta - 1} \times \frac{A}{e} f z^n - \frac{s - 2}{\theta - 2} \times \frac{B}{e} f z^n - \frac{s - 3}{\theta - 3} \times \frac{C}{e}$ $f z^n - \frac{s - 4}{\theta - 4} \times \frac{D}{e} f z^n \ldots\ldots n v Q F$.

Il faut remarquer qu'on a ici $P = e z^{-n} + f$, ou $P = \frac{e + f z^n}{z^n}$.

COROLLAIRE III.

50. De là il suit que si s, ou $\theta - \pi$ est un nombre entier, & θ une fraction, ou un nombre entier plus grand que s, la fluente sera toujours finie & exprimée par s, ou $\theta - \pi$ termes.

Si $\theta = \frac{3}{2}$, & $\pi = \frac{1}{2}$, on aura $s = \theta - \pi = 1$, & $\frac{-d}{3 n e} P^{\frac{3}{2}}$ sera la fluente de $d \dot{z} z^{-\frac{3}{2} n - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\frac{1}{2}}$; & si $\theta = \frac{5}{2}$, $\pi = \frac{1}{2}$, elle sera $\frac{- b e + 4 e f z^n}{15 n e e z^n} d P^{\frac{3}{2}}$.

Il y a des cas où la fluente de cette expression peut être trouvée plus commodément par les problemes suivans.

PROBLEME XV.

51. *Trouver la fluente de* $d \dot{z} z^m \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, *lorsque* π *est un nombre positif plus grand que l'unité.*

Soit $z^{\theta n} P^{\pi} \times$ par $(K + L P^{-1} + M P^{-2} + N P^{-3}) \ldots x F$, la fluente cherchée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, & $\frac{m + 1}{n} = \theta$ est $\left(r K + \left. \begin{matrix} \overline{0 - \pi}, e K \\ \overline{r - 1}, \; L \end{matrix} \right\} P^{-1} + \left. \begin{matrix} \overline{1 - \pi}, e L \\ \overline{r - 2}, \; M \end{matrix} \right\} P^{-2} + \left. \begin{matrix} \overline{2 - \pi}, e M \\ \overline{r - 3}, \; N \end{matrix} \right\} P^{-3} \ldots + \overline{3 - \pi}, e N P^{-4} \right)$ $\times$ par $n \dot{z} z^{\theta n - 1} P^{\pi}$.

Car si $z^{\theta n} P^{s + \pi}$ exprime un terme quelconque de cette fluente, on trouvera que sa fluxion est, comme dans le probleme précédent, $(\overline{r + s}, P^s - \overline{s + \pi}, e P^{s - 1}) \times$ par $n \dot{z} z^{\theta n - 1} P^{\pi}$; & en faisant successivement s égale à $0, 1, 2$, &c. on aura les fluxions comme ci-dessus.

Ainsi $nrK = d$,

$\overline{0-\pi}, eK + \overline{r-1}, L = 0$, ou $K = \frac{d}{nr}$.

$\overline{1-\pi}, eL + \overline{r-2}, M = 0$, $L = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{ed}{nr}$.

$\overline{2-\pi}, eM + \overline{r-3}, N = 0$, $M = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{eed}{nr}$.

$N = \frac{\pi}{r-1} \times \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{\pi-2}{r-3} \times \frac{e^3 d}{nr}$.

Mais puisque $x = \overline{3-\pi}, neN$, & $\dot{F} = \dot{z} z^{\theta n-1} P^{\pi-4}$, lorsque $N z^{\theta n} P^{\pi-3}$ est le dernier terme, on aura par la même raison $x = \overline{1+\pi}$, en Q, & $\dot{F} = \dot{z} z^{\theta n-1} P^{\pi}$, lorsque $Q z^{\theta n} P^{\pi+1}$ est le dernier terme, en supposant que π exprime la moindre fraction de π; par conséquent, $\frac{d}{nr} z^{\theta n} P^{\pi} + \frac{\pi}{r-1} \times \frac{Ae}{P} + \frac{\pi-1}{r-2} \times \frac{Be}{P} + \frac{\pi-2}{r-3} \times \frac{Ce}{P} + \frac{\pi-3}{r-4} \times \frac{De}{P} \cdots \overline{1+\pi}, enQF$, sera la fluente demandée.

COROLLAIRE I.

52. De là il suit que si π est un nombre entier, & r une fraction, ou $r-1$, un nombre entier plus grand que π, la fluente sera toujours finie & exprimée par autant de termes que $\pi+1$ contient d'unités.

Si θ est positif, & $\pi = 1$, la fluente sera $\frac{dz^{\theta n}}{nr} P + \frac{edz^{\theta n}}{\overline{r-1}, rn}$.

Et si $\pi = 2$, elle sera $\frac{dz^{\theta n}}{nr} P^2 + \frac{2edz^{\theta n}}{\overline{r-1}, nr} P + \frac{2eedz^{\theta n}}{\overline{r-1}, \overline{r-2}, nr}$.

Lorsque θ, π, expriment des nombres entiers positifs, & que $\theta < \pi$, la fluente de cette fluxion sera mieux exprimée dans le quatorziéme probleme.

COROLLAIRE II.

53. Lorsque θ est négatif, la fluxion $d\dot{z} z^{-\theta n-1} \times \overline{e + fz^n}^{\pi}$, peut être changée en celle-ci, $d\dot{z} z^{n\pi-\theta n-1} \times \overline{e z^{-n} + f}^{\pi}$; & puisque $\frac{\pi n - \theta n}{-n} = \theta - \pi$, en mettant $\theta - \pi$ au lieu de θ dans $\theta + \pi = r$, on aura $\theta = r$; & si l'on met e pour f, f pour e, $-n$ pour n, & z^{-n} pour z^n, dans la derniere fluente, on aura

$\frac{-d}{\theta n} z^{\pi n - \theta n} P^{\pi} + \frac{\pi}{\theta - 1} \times \frac{Af}{P} + \frac{\overline{\pi - 1}}{\overline{\theta - 2}} \times \frac{Bf}{P} + \frac{\overline{\pi - 2}}{\overline{\theta - 3}} \times \frac{Cf}{P} + \frac{\overline{\pi - 3}}{\overline{\theta - 4}} \times \frac{Df}{P} \text{ - - - - } \overline{1 + \pi}, nfQF.$

Il faut ſe ſouvenir que $P = \frac{e + fz^n}{z^n}$ ici, & que la fluente doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi + 1$.

COROLLAIRE III.

54. Par conſéquent lorſque π eſt un nombre entier & poſitif, & θ une fraction, ou un nombre entier plus grand que π, la fluente ſera toujours exprimée par $\pi + 1$ termes.

COROLLAIRE IV.

55. Si $\pi = 1$, & θ une fraction, ou plus grand que π, la fluente ſera $\frac{-dP}{\theta n z^{\theta n - n}} - \frac{fd}{\overline{\theta - 1}, \theta n}$. Et ſi $\pi = 2$, elle ſera $\frac{-d}{\theta n z^{\theta n - n}} P^2 - \frac{2 f z^{n - \theta n}}{\overline{\theta - 1}, \theta n} dP - \frac{2 d f f z^{2n - \theta n}}{\theta n, \overline{\theta - 1}, \overline{\theta - 2}}$.

COROLLAIRE V.

56. Si $\dot{x} \times \overline{aa + xx}^{\frac{5}{2}}$ eſt la fluxion propoſée, on aura $\dot{F} = \dot{x}\sqrt{aa + xx}$, & ainſi ſi $L = \log. \frac{x + \sqrt{aa + xx}}{a}$, on aura $F = \frac{x}{2}\sqrt{aa + xx} + \frac{aa}{2}L$; mais puiſque $n = 2$, $\pi = \frac{5}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $r = 2$, $e = aa$, $x = z$, $f = d = 1$, on aura $\frac{x}{6} \times \overline{aa + xx}^{\frac{5}{2}} + \frac{5aax}{24} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}} - \frac{5a^4x}{16} \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}} - \frac{5a^6}{16}L$, pour la fluente cherchée, parce que $Q = \frac{5aa}{24}$.

PROBLEME XVI.

57. *Trouver la fluente de $d\dot{z} z^m \times \overline{e + fz^n}^{\pi}$, lorſque π eſt plus grand que l'unité.*

Soit $z^{\theta n} P^{-\pi} \times$ par $(KP + LP^2 + MP^3 + NP^4)$ - - - x F, la fluente cherchée, dont la fluxion trouvée comme ci-devant,

& mise par ordre, en faisant $\theta - \pi = s$, sera $\Big(\overline{\pi - 1}, eK + \left.\dfrac{\overline{s+1}, K}{\overline{\pi - 2}, eL}\right\} P + \left.\dfrac{\overline{s+2}, L}{\overline{\pi - 3}, eM}\right\} P^2 + \left.\dfrac{\overline{s+3}, M}{\overline{\pi - 4}, eN}\right\} P^3 + \overline{s+4}, NP^4\Big) \times$ par $n\dot{z}z^{\theta n - 1}P^{\pi}$. Ainsi

$$\overline{\pi - 1}, eK = d, \qquad ou + K = \frac{1}{\pi - 1} \times \frac{d}{ne}.$$

$$\overline{s+1}, K + \overline{\pi - 2}, eL = 0, \qquad -L = \frac{1}{\pi - 1} \times \frac{s+1}{\pi - 2} \times \frac{d}{nee}.$$

$$\overline{s+2}, L + \overline{\pi - 3}, eM = 0, \qquad +M = \frac{1}{\pi - 1} \times \frac{s+1}{\pi - 2} \times \frac{s+2}{\pi - 3} \times \frac{d}{ne^3}.$$

$$\overline{s+3}, M + \overline{\pi - 4}, eN = 0, \qquad -N = \frac{1}{\pi - 1} \times \frac{s+1}{\pi - 2} \times \frac{s+2}{\pi - 3} \times \frac{s+3}{\pi - 4} \times \frac{d}{ne^4}.$$

Par conséquent $\dfrac{dz^{\theta n}}{\overline{\pi - 1}, ne} P^{1-\pi} - \dfrac{s+1}{\pi - 2} \times \dfrac{A}{e} P - \dfrac{s+2}{\pi - 3} \times \dfrac{B}{e} P - \dfrac{s+3}{\pi - 4} \times \dfrac{C}{e} P - \dfrac{s+4}{\pi - 5} \times \dfrac{D}{e} P - - - - \overline{\theta - \pi}, nQF$, sera la fluente cherchée, laquelle doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi - 1$, & $\dot{F} = \dot{z}z^{\theta n - 1}P^{-\pi}$.

COROLLAIRE I.

58. De là il suit, que si s, ou $\theta - \pi$ est un nombre entier & négatif, & π une fraction, ou un entier plus grand que s, la fluente sera toujours finie & exprimée par s termes.

Si $\theta = 1$, $\pi = 3$, on aura $s = -2$, & $\dfrac{dz^n}{2ne} P^{-2} + \dfrac{dz^n}{2nee} P^{-1}$ pour la fluente.

Soit $d\dot{x}x^2 \times \overline{aa + xx}^{\frac{7}{2}}$, la fluxion proposée, on aura $\theta = \frac{3}{2}$, $n = 2$, $\pi = \frac{7}{2}$, $s = -2$, $e = aa$, $fz^n = xx$, & $\dfrac{dx^4}{5an} \times \overline{aa + xx}^{-\frac{5}{2}} - \dfrac{2dx^4}{15a^4} \times \overline{aa + xx}^{-\frac{3}{2}}$.

Soit enfin $\dfrac{a^3\dot{x}}{\overline{aa + xx}^4}$ la fluxion, on aura $n = 2$, $\pi = 4$, $\theta = \frac{1}{2}$, $s = \frac{7}{2}$, $d = a^3$, $e = aa$, & $\dot{F} = \dfrac{\dot{x}}{aa + xx}$. Donc si (1) exprime un arc de cercle dont le rayon est a, & la tangente x, on aura $F = \frac{1}{aa}$ (1), & la fluente cherchée sera $\dfrac{ax}{6 \times \overline{aa + xx}^3} + \dfrac{5x}{24a \times \overline{aa + xx}^2} + \dfrac{5x}{16a^3 \times \overline{aa + xx}} + \dfrac{5}{16aa}$ (1), parce que $Q = \dfrac{5}{16a^3}$.

COROLLAIRE II.

59. Lorſque θ eſt négatif, la fluxion $d\dot{z}z^{-\theta n-1} \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$, peut être changée en celle-ci, $d\dot{z}z^{-\theta n-\pi n-1} \times \overline{ez^{-n}+f}^{\,\pi}$, & comme $\frac{-\theta n-\pi n}{-n} = \theta+\pi$, on aura $\theta-\pi = s = \theta$, & en mettant e pour f, f pour e, z^{-n} pour z^n, & $-n$ pour n dans la fluente ci-deſſus, elle deviendra $\frac{-d}{nfz^{\theta n+\pi n}} P^{-\pi} \times$ par $\left(\frac{P}{\pi-1} - \frac{\theta+1}{\pi-2} \times \frac{A}{f} P, - \frac{\theta+2}{\pi-3} \times \frac{B}{f} P - \frac{\theta-3}{\pi-4} \times \frac{C}{f} P\right) \cdots \overline{\theta+\pi+\pi}, nQF$.

Cette fluente doit être continuée à autant de termes qu'il y a d'unités dans $\pi-1$, & on a ici $P = \frac{e+fz^n}{z^n}$; il eſt clair que cette fluente ne peut être exprimée en un nombre fini de termes, & qu'elle dépend toujours de celle de F, puiſqu'aucun des numerateurs ne peut devenir égal à zero.

Si $\frac{\dot{x}x^{-1}}{\overline{aa+xx}^{\,2}}$, on aura $\theta = 0$, $\pi = 2$, $n = 2$, $e = aa$, $fz^n = xx$, $P = \frac{aa+xx}{xx}$, & $\dot{F} = \dot{z}z^{-\theta n-\pi n-1} P$, ou $\dot{F} = \frac{\dot{x}x^{-3}}{aa+xx} = \frac{\dot{x}x^{-3}}{aa} - \frac{\dot{x}x^{-1}}{aa \times \overline{aa+xx}}$. Or ſi $L = \log. \frac{\sqrt{aa+xx}}{x}$, la fluente ſera $\frac{-x^2}{2 \times \overline{aa+xx}} + \frac{x^{-2}}{2aa} + \frac{1}{aa} L$.

COROLLAIRE GENERAL.

60. Si δ, π, expriment les moindres fractions de m & π, il eſt évident que la fluente de $d\dot{z}z^m \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$, peut toujours être réduite à celle de $d\dot{z}z^{\delta-1} \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$; car, par le quatorziéme probleme, la fluente $d\dot{z}z^m \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$, peut être réduite à celle de $d\dot{z}z^{\delta-1} \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$, & cette derniere, par le 15, ou 16me, à celle de $d\dot{z}z^{\delta-1} \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$; & par conſéquent la fluente de cette derniere fluxion étant donnée, celle de la premiere le ſera auſſi.

Si $\frac{\delta}{n}$, ou $\frac{\delta-n\pi}{-n}$, eſt un nombre entier & poſitif, la fluente de $d\dot{z}z^{\delta-1} \times \overline{e+fz^n}^{\,\pi}$, peut être exprimée par un nombre fini de

termes, par ce qui a été dit; mais si $\frac{\delta}{n}$, ou $\frac{\delta - n\pi}{-n}$, est un nombre entier négatif, ou zero, elle dépendra de la quadrature des sections coniques; car en faisant $e + f z^n = v$; la fluxion $d\dot{z} z^{\delta - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, peut être changée en celle-ci, $\frac{d \dot{v} v^{\pi}}{n f^{\frac{1}{n}}} \times \overline{\frac{v - e}{f}}^{\frac{\delta}{n} - 1}$: or si $\frac{\delta}{n}$ est un nombre entier négatif, ou zero, cette fluxion deviendra une fraction dont le dénominateur est délivré du signe radical, & par conséquent la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

Si au contraire on suppose $\frac{e + f z^n}{z^n} = v$, la fluxion $d\dot{z} z^{\delta - 1} \times \overline{e + f z^n}^{\pi}$, peut être changée en celle-ci, $-\frac{1}{n} \dot{v} v^{\pi} e^{\frac{\delta + n\pi}{n}} \times \overline{v - f}^{\frac{-\delta - n\pi}{n} - 1}$; & par conséquent si $\frac{\delta + n\pi}{-n}$, est un nombre entier négatif, ou zero, cette fluxion deviendra une fraction délivrée du signe radical; & par conséquent la fluente peut être trouvée de la même maniere que ci-devant.

PROBLEME XVII.

61. *Trouver la fluente de* $d\dot{z} z^{\pm\theta n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$, *lorsque* θ, δ, λ, *sont des nombres entiers quelconques.*

Puisque $\frac{\pm\theta n - 1 + 1}{n} = \pm\theta$, il est évident que si θ est positif, la fluente de cette fluxion peut être trouvée exactement par le quatorziéme probleme; & si θ est négatif, cette fluente peut être réduite à celle de $d\dot{z} z^{-1} \times \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$. Or si l'on suppose $v = a \times \overline{\frac{a^n + z^n}{a^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, on aura $v^{\lambda} a^n = a^{n+\lambda} + a^{\lambda} z^n$, dont la fluxion est $\lambda a^n \dot{v} v^{\lambda - 1} = n a^{\lambda} \dot{z} z^{n-1}$, le premier membre divisé par $n \times \overline{v^{\lambda} a^n - a^{n+\lambda}}$, & le second par son égal $n a^{\lambda} z^n$, donnera $\frac{\lambda}{n} \times \frac{\dot{v} v^{\lambda - 1}}{v^{\lambda} - a^{\lambda}} = \dot{z} z^{-1}$; & si l'on ajoute a^n de part & d'autre à $\frac{v^{\lambda} a^n - a^{n+\lambda}}{a^{\lambda}} = z^n$, on aura $v^{\lambda} a^{n-\lambda} = a^n + z^n$, ce qui étant élevé à la puissance $\pm\frac{\delta}{\lambda}$, donnera $v^{\pm\delta} a^{\pm\frac{\delta n}{\lambda} \mp \delta} = \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$;

par conséquent la fluxion $d\dot{z}z^{-1} \times \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$, deviendra $\frac{\lambda d}{n}$ $\times a^{\pm\frac{\delta}{\lambda}n \mp \delta} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda \pm \delta - 1}}{v^\lambda - a^\lambda}$.

Fig. 7. Or si la demi-circonférence décrite avec le rayon $AO = a$, est divisée en λ parties égales aux points B, C, D, E, &c. & si l'on prend les arcs ABb, ACc, ADd, &c. ensorte qu'ils soient aux arcs AB, AC, AD, &c. comme $\lambda - \delta$ est à l'unité ; & si l'on prend $OP = v$, en tirant les lignes du point P & du centre O aux points B, C, D, E, &c. aussi bien que les sinus $b\,1$, $c\,2$, $d\,3$, $e\,4$, &c. en faisant $\theta + \frac{\delta}{\lambda} = s$, la fluente de

$d\dot{z}z^{-\theta n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{-\frac{\delta}{\lambda}}$, sera

$$\frac{-dP^{1-\frac{\delta}{\lambda}}}{z^{sn}} \times \text{par } \left(\frac{1}{\theta} \times \frac{z}{a}^{-n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{z}{a}^{-2n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{z}{a}^{-3n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{z}{a}^{-4n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{z}{a}^{-5n}\right) \cdots + \frac{2\delta}{\lambda} Q a^{-\frac{\delta}{\lambda}n - 1}, \left\{\begin{matrix} -AO\,(AP:PO) \\ +O2\,(PC:CO) - C2\,(PCO) \\ +O4\,(PE:EO) + e4\,(PEO) \\ -O6\,(PG:GO) + g6\,(PGO) \end{matrix}\right\}$$

Et la fluente de $d\dot{z}z^{-\theta n - 1} \times \overline{z^n - a^n}^{-\frac{\delta}{\lambda}}$

$$\text{sera } \frac{dz^{-sn}}{n} P^{1-\lambda} \times \text{par } \left(\frac{1}{\theta} \times \frac{z}{a}^{-n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{z}{a}^{-2n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{z}{a}^{-3n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{z}{a}^{-4n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{z}{a}^{-5n}\right) \cdots - \frac{2\delta}{\lambda} Q a^{-\frac{\delta}{\lambda}n - 1} \left\{\begin{matrix} +O1\,(PB:BO) + b1\,(PBO) \\ -O3\,(PD:DO) + d3\,(PDO) \\ -O5\,(PF:FO) - f5\,(PFO) \\ +OH\,(PH:HO) \end{matrix}\right\}$$

Il faut se souvenir que Q exprime toujours le coefficient du dernier terme avec un signe contraire.

En mettant la même construction, excepté que les arcs ABb, ACc, ADd, &c. soient aux arcs AB, AC, AD, &c. comme δ est à l'unité, & en faisant $s = \theta - \frac{\delta}{\lambda}$, la fluente de

$d\dot{z}z^{-\theta n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}$, sera

$\frac{-d}{n a^{\theta n}} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} \times \overline{\frac{z}{a}}^{-n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \overline{\frac{z}{a}}^{-2n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \overline{\frac{z}{a}}^{-3n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \overline{\frac{z}{a}}^{-4n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \overline{\frac{z}{a}}^{-5n}\right) \ldots$ $\left\{\begin{array}{l} - AO(PA:AO) \\ + O2(PC:CO) - c2(PCO) \\ + O4(PE:EO) + e4(PEO) \\ - O6(PG:GO) + g6(PGO) \end{array}\right\}$

$+ \frac{\lambda}{\delta} Q R^{\frac{\delta}{\lambda}} + \frac{2\delta}{\lambda} Q a^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}$

Et la fluente de $d \dot{z} z^{-\theta n - 1} \times \overline{z^n - a^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}$

sera $\frac{d}{n a^{\theta n}} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} \times \overline{\frac{z}{a}}^{-n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \overline{\frac{z}{a}}^{-2n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \overline{\frac{z}{a}}^{-3n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \overline{\frac{z}{a}}^{-4n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \overline{\frac{z}{a}}^{-5n}\right)$ $\left\{\begin{array}{l} + O1(PB:BO) + b1(PBO) \\ - O3(PD:DO) + d3(PDO) \\ - O5(PF:FO) - f5(PFO) \\ + OH(PH:HO) \end{array}\right\}$

$\ldots \frac{\lambda}{\delta} Q R^{\frac{\delta}{\lambda}} - \frac{2\delta}{\lambda} Q a^{-\frac{\delta}{\lambda}n - 1}$

Notez que $R = \frac{z^n \pm a^n}{a^n}$, $P = z^n \pm a^n$.

PROBLEME XVIII.

62. *Trouver la fluente de* $d\dot{z} z^{\pm\theta n \pm \frac{\delta}{\lambda}n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$, *lorsque* θ, λ, δ, *sont des nombres entiers quelconques.*

Lorsque θ est négatif, la fluente de cette fluxion peut être trouvée exactement par le quatorziéme probleme, & lorsque θ est positif, elle peut être réduite à la fluente de $d\dot{z} z^{\mp\frac{\delta}{\lambda}n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$, par le second cas du même probleme.

Par conséquent si l'on fait $v = a \times \overline{\frac{a^n + z^n}{z^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, cette fluxion peut être changée en cette autre $\frac{-\lambda}{n} d a^{-\delta} \dot{v} v^{\delta - 1} - \frac{\lambda}{n} d \times \frac{a^{\lambda - \delta} \dot{v} v^{\delta - 1}}{v^\lambda - a^\lambda}$, lorsque $+ \frac{\delta}{\lambda}$, & en $\frac{-\lambda}{n} d a^\delta \times \frac{\dot{v} v^{\lambda - \delta - 1}}{v^\lambda - a^\lambda}$, lorsque $- \frac{\delta}{\lambda}$.

En mettant la même construction qu'au dernier probleme, & faisant $OP = a \times \overline{\frac{z^n \pm a^n}{z^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, la fluente de $d\dot{z} z^{\theta n \pm \frac{\delta}{\lambda}n - 1} \times \overline{a^n + z^n}^{-\frac{\delta}{\lambda}}$ sera Fig. 7.

$$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda n}}}{n} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\theta n}}{\theta z^n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{a}{z}^{-n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{a}{z}^{-2n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{a}{z}^{-3n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{a}{z}^{-5n}\right) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O2(PC:CO)-C2(PCO) \\ +O4(PE:EO)+e4(PEO) \\ -O6(PG:GO)+g6(PGO) \end{array}\right\} \frac{2\delta}{\lambda n} Q a^n$$

Et la fluente de $dz z^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1} \times \overline{z^n - a^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}$

fera $$\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda n}}}{n} P^{1-\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\theta n}}{\theta z^n} + \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{a}{z}^{-n} + \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{a}{z}^{-2n} + \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{a}{z}^{-3n} + \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{a}{z}^{-4n}\right) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} +O1(PB:BO)+b1(PBO) \\ -O3(PD:DO)+d3(PDO) \\ -O5(PF:FO)-f5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array}\right\} \frac{2\delta}{\lambda n} Q a^n.$$

La fluente de $dz z^{\theta n\frac{\delta}{\lambda}n-1} \times \overline{a^n + z^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}$ fera

$$\frac{dz^{-\frac{\delta}{\lambda n}}}{n} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\theta n}}{\theta z^n} - \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{a}{z}^{-n} - \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{a}{z}^{-2n} - \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{a}{z}^{-3n} - \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{a}{z}^{-4n}\right) \ldots \; danQR^{\frac{\delta}{\lambda}} \left\{\begin{array}{l} -AO(PA:AO) \\ +O2(PC:CO)-c2(PCO) \\ +O4(PE:EO)+e4(PEO) \\ -O6(PG:GO)+g6(PGO) \end{array}\right\} - \frac{2\delta}{\lambda n} Q a^n.$$

Et la fluente de $dz z^{\theta n-\frac{\delta}{\lambda}n-1} \times \overline{z^n - a^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}$

fera $$\frac{d}{n} z^{-\frac{\delta}{\lambda n}} P^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times \text{par} \left(\frac{z^{\theta n}}{\theta z^n} + \frac{s-1}{\theta-1} A \frac{a}{z}^{-n} + \frac{s-2}{\theta-2} B \frac{a}{z}^{-2n} + \frac{s-3}{\theta-3} C \frac{a}{z}^{-n} + \frac{s-4}{\theta-4} D \frac{a}{z}^{-4n}\right) \ldots \left\{\begin{array}{l} +O1(PB:BO)+b1(PBO) \\ -O3(PD:DO)+d3(PDO) \\ -O5(PF:FO)-f5(PFO) \\ +OH(PH:HO) \end{array}\right\} d a^n Q R^{\frac{\delta}{\lambda}} + \frac{2\delta}{\lambda n} Q a^n$$

Notez que $R = \frac{z^n \pm a^n}{z^n}$, & $P = z^n \pm a^n$.

PROBLEME XIX.

63. *Soit* $P = e + f z^n + g z^{2n}$, *l'on demande la fluente de* $dz z^{n-1} P^{\pi}$, *lorsqu'elle peut se réduire à la quadrature des sections coniques.*

Soit $P^{\pi+1}$ × par ($K z^{\theta n-2n}$ + $L z^{\theta n-3n}$ + $M z^{\theta n-4n}$ + $N z^{\theta n-5n}$) - - - - $x F$ la fluente demandée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, & $\theta + 2\pi = s$, sera

$$\left(sgK + \left.\begin{matrix}\overline{s-1}, gL \\ \overline{r-1}, fK\end{matrix}\right\} z^{-n} + \left.\begin{matrix}\overline{s-2}, gM \\ \overline{r-2}, fL \\ \overline{\theta-2}, eK\end{matrix}\right\} z^{-2n} + \left.\begin{matrix}\overline{s-3}, gN \\ \overline{r-3}, fM \\ \overline{\theta-3}, eL\end{matrix}\right\}\right.$$

$$z^{-3n} + \left.\begin{matrix}\overline{r-4}, fN \\ \overline{\theta-4}, eM\end{matrix}\right\} z^{-4n} + \overline{\theta-5}, eN z^{-5n}) \times \text{par } n\dot{z} z^{\theta n-1}$$
P^{π}.

Car soit $z^{\theta n-tn} P^{\pi+1}$, un terme quelconque de cette fluente, on trouvera de la même maniere que ci-devant, que sa fluxion est $(\overline{\theta-t}, e z^{-tn} + \overline{r-t+1}, f z^{n-tn} + \overline{s-t+2}, g z^{2n-tn})$ × par $n\dot{z} z^{\theta n-1} P^{\pi}$; en faisant successivement t, égale à 2, 3, 4, 5, &c. on aura les fluxions des termes comme ci-dessus. Donc

$sgK = d,$	ou $+K = \frac{d}{sg}$.
$\overline{s-1}, gL + \overline{r-1}, fK = 0$	$-L = \frac{r-1}{s-1} \times \frac{fK}{g}$.
$\overline{s-2}, gM + \overline{r-2}, fL + \overline{\theta-2}, eK = 0$	$-M = \frac{r-2}{s-2} \times \frac{fL}{g} + \frac{\theta-2}{s-2} \times \frac{eK}{g}$.
$\overline{s-3}, gN + \overline{r-3}, fM + \overline{\theta-2}, eL = 0$	$-N = \frac{r-3}{s-3} \times \frac{fM}{g} + \frac{\theta-3}{s-3} \times \frac{eL}{g}$.

Mais lorsque $\theta = 5$, on a $\overline{\theta-5}, eN z^{-5n} = 0$, $\overline{1+\pi}, nfN + neM = x$, & $\dot{F} = \dot{z} z^{n-1} P^{\pi}$; & par la même raison, lorsque θ est tout au nombre entier, on aura toujours la même chose; par conséquent la fluente demandée sera $\frac{dz^{\theta n}}{nsgz^{2n}} P^{\pi+1}$ —

$$\frac{r-1}{s-1} \times \frac{fA}{gz^{n}} - \frac{r-2}{s-2} \times \frac{fB}{gz^{n}} - \frac{\theta-2}{s-2} \times \frac{eA}{gz^{2n}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{fC}{gz^{n}} - \frac{\theta-3}{s-3} \times \frac{eB}{gz^{2n}} \cdots$$

$\overline{1+\pi, nfN + neM}, F$.

Cette fluente doit être continuée à $\theta - 1$ termes; les lettres A, B, C, expriment chacune le terme qui la précéde avec son signe; & M, N, les coefficiens des deux derniers termes avec des signes contraires; mais lorsque $\theta = 2$, alors M sera $= 0$; & il faut remarquer que les termes sont distingués par des lignes tirées par-dessus.

COROLLAIRE I.

64. Lorsque $\pi = -\frac{1}{2}$, on aura $r = \theta - \frac{1}{2}$, & $s = \theta - 1$; & en faisant $v = \frac{f}{2g} + z^n$, & $aa = \frac{4eg - ff}{4g}$; la fluxion $\dot{z} z^{n-1} P^{-\frac{1}{2}}$, de F, peut être changée en celle-ci $\frac{\frac{1}{n}\dot{v}}{\sqrt{aa+gvv}}$; c'est pourquoi si $R = \sqrt{g}$, $T = \frac{gv}{\sqrt{aa+gvv}}$, & $S = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{aa+gvv}}$, on aura

Art. 35. $F = \frac{1}{ng}(1)$, * c'est-à-dire (1) sera le logarithme de $\frac{R+T}{S}$ multiplié par R, lorsque R, ou $\sqrt{g}$ est possible, ou un arc de cercle dont le rayon est R; la tangente T est la secante S, lorsque R, ou $\sqrt{g}$ est impossible; mais dans ce cas on prend $R = \sqrt{g}$, possible, comme on a fait voir dans l'article 35. Ainsi la fluente de $d\dot{z} z^{n-1} P^{-\frac{1}{2}}$, sera $\frac{dz^{\theta n - 2n}}{\theta - 1 \cdot ng} P^{\frac{1}{2}} - \overline{\frac{2\theta-3}{\theta-2} \times \frac{fA}{2gz^n} - \frac{2\theta-5}{\theta-3} \times \frac{fB}{2gz^n} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{eA}{gz^{2n}}} - \overline{\frac{2\theta-7}{\theta-4} \times \frac{fC}{2gz^n} - \frac{\theta-3}{\theta-4} \times \frac{eB}{gz^{2n}} \ldots \frac{fN + 2eM}{2g}}\, F$; ce qui donne $\frac{dP^{\frac{1}{2}}}{ng} - \frac{fd}{2ngg}(1)$, lorsque $\theta = 2$, parce que $M = 0$, $N = \frac{d}{ng}$; & $\frac{2gz^n - 3f}{4ngg} dP^{\frac{1}{2}} + \frac{3ff - 4eg}{8ng^3} d(1)$, lorsque $\theta = 3$; parce que $M = \frac{d}{2ng}$, $N = -\frac{3fd}{4ngg}$.

Mais si $\theta = 4$, on aura $\frac{15ff - 16eg - 10fz^n + 8ggz^{2n}}{24ng^3} dP^{\frac{1}{2}} + \frac{12efg - 5f^3}{16ng^4} d(1)$, parce que $-M = \frac{10fd}{24ngg}$, & $-N = \frac{16eg - 15ff}{24ngg} d$.

COROLLAIRE II.

65. Si θ est négatif, la fluxion $d\dot{z} z^{-\theta n - 1} \times \overline{e + fz^n + gz^{2n}}^{-\frac{1}{2}}$ peut être changée en celle-ci, $d\dot{z} z^{-\theta n - n - 1} \times \overline{ez^{-2n} + fz^{-n} + g}^{-\frac{1}{2}}$. Or comme $\frac{-\theta n - n}{-n} = \theta + 1$; en mettant $\theta + 1$ pour θ, $-n$ pour n, e pour g, g pour e, & z^{-n} pour z^n, dans la for-

mule générale, elle deviendra $\frac{dz^{n-\theta n}}{-n\theta e}P^{\frac{1}{2}} - \frac{2\theta-1}{\theta-1} \times \frac{fA}{2e}z^{n} - \frac{2\theta-3}{\theta-2} \times \frac{fB}{2e}z^{n} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{gA}{e}z^{2n} - \frac{2\theta-5}{\theta-3} \times \frac{fC}{2e}z^{n} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{gB}{e}z^{n} \ldots \frac{fN+2gM}{2e}$ F.

Cette fluente doit être continuée à θ termes ; & si $v = \frac{2e+fz^{n}}{2ez^{n}}$, $r = \sqrt{e}$, $t = \frac{ev}{\sqrt{aa+evv}}$, $s = \frac{a\sqrt{e}}{\sqrt{aa+gvv}}$, $aa = \frac{4eg-ff}{4e}$, $P = \frac{e+fz^{n}+gz^{2n}}{z^{2n}}$, & $F = \frac{1}{e}(2)$; en supposant (2), le logarithme de $\frac{r+t}{s}$, multiplié par r, lorsque r, ou $\sqrt{e}$ est une quantité possible, ou un arc de cercle, dont le rayon est r, la tangente t, & secante lorsque r est impossible ; c'est-à-dire lorsque $r = \sqrt{-e}$. Mais si $\theta = 1$, on aura $M = 0$.

De là il suit que si $\theta = 1$, on aura $\frac{-d}{ne}P^{\frac{1}{2}} + \frac{f}{2ne}d(2)$, pour la fluente de $d\dot{z}z^{-n-1}P^{-\frac{1}{2}}$, parce que $M = 0$, & $-N = \frac{d}{ne}$.

Si $\theta = 2$, on aura $\frac{-2e+3fz^{n}}{4neez^{n}}dP^{\frac{1}{2}} + \frac{4eg-3ff}{8ne^{3}}d(2)$, pour la fluente de $d\dot{z}z^{-2n-1}P^{-\frac{1}{2}}$, parce que $-M = \frac{2ed}{4nee}$, & $N = \frac{3fd}{4nee}$.

COROLLAIRE III.

66. Si $\pi = \frac{1}{2}$, on aura $\frac{2\theta+1}{2} = r$, & $\theta+1 = s$; & la fluente de $d\dot{z}z^{\theta n-1} \times \sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}$ sera $\frac{dz^{\theta n-2n}}{\theta+1, ng}P^{\frac{3}{2}} - \frac{2\theta-1}{\theta} \times \frac{fA}{2gz^{n}} - \frac{2\theta-3}{\theta-1} \times \frac{fB}{2gz^{n}} - \frac{\theta-2}{\theta-1} \times \frac{eA}{gz^{2n}} - \frac{2\theta-5}{\theta-2} \times \frac{fC}{2gz^{n}} - \frac{\theta-3}{\theta-2} \times \frac{eB}{gz^{2n}} \ldots \frac{3}{2}fN + eM, nF$.

En supposant les mêmes valeurs de v, a, R, S, T, que dans l'article 64, on aura $\frac{v}{n}\sqrt{aa+gvv}$, pour la fluxion de F ; & par conséquent $F = \frac{f+2gz^{n}}{4g}P^{\frac{1}{2}} + \frac{aa}{2g}(1)$.

Cette fluente doit être continuée à $\theta-1$, termes ; & lorsque θ est 1, ou 2, M sera $= 0$.

Si $\theta = 2$, on aura $\frac{8eg - 3ff + 2fgz^n + 8ggz^{2n}}{24ngg} d P^{\frac{3}{2}} + \frac{f^3 - 4efg}{16ng^3}$ $d(1)$, parce que $M = o$, & $N = \frac{d}{3ng}$, pour la fluente de $d\dot{z} z^{2n-1} \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$.

COROLLAIRE IV.

67. Lorſque θ eſt négatif, la fluxion $d\dot{z} z^{-\theta n - 1} \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$ peut être changée en celle-ci, $d\dot{z} z^{n - \theta n - 1} \sqrt{ez^{-2n} + fz^{-n} + g}$, & comme $\frac{n - \theta n}{-n} = \theta - 1$; en mettant $\theta - 1$, pour θ, $-n$ pour n, e pour g, g pour e, & z^{-n} pour z^n, dans la formule générale ci-deſſus, on aura $\frac{dz^{3n - \theta n}}{-\theta ne} P^{\frac{3}{2}} - \frac{2\theta - 3}{\theta - 1} \times \frac{fA}{2e} z^n - \frac{2\theta - 5}{\theta - 2} \times \frac{fB}{2e} z^n - \frac{\theta - 3}{\theta - 2} \times \frac{gA}{e} z^{2n} - \frac{2\theta - 7}{\theta - 3} \times \frac{fC}{2e} z^n - \frac{\theta - 4}{\theta - 3} \times \frac{gB}{e} z^{2n} \ldots \frac{3}{2} fN - gM$, F.

Cette fluente doit être continuée à $\theta - 2$ termes, & lorſque $\theta = 3$, on aura $M = o$; en retenant les mêmes valeurs de v, a, r, s, t, (2), que dans l'article 66, on aura $F = \frac{2e + fz^n}{-4ez^n} P^{\frac{3}{2}} + \frac{ff - 4eg}{8ee} (2)$; par conſéquent la fluente de $d\dot{z} z^{-3n-1} \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$, ſera $\frac{-8ee - 2efz^n - 8egz^{2n} + 3ffz^{2n}}{24neez^{2n}} d P^{\frac{3}{2}} + \frac{4efg - f^3}{16ne^3} d(2)$, parce que $M = o$, & $-N = \frac{d}{3ne}$.

COROLLAIRE V.

68. Si $\theta = o$, la fluxion $d\dot{z} z^{-1} \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}$, peut être changée en celle-ci, $\frac{de\dot{z}z^{-1}}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}} + \frac{2df\dot{z}z^{n-1} + dg\dot{z}z^{2n-1}}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$, ou bien en cette autre $\frac{ed\dot{z}z^{-2n-1}}{\sqrt{ez^{-2n} + fz^{-n} + g}} - \frac{fd\dot{z}z^{n-1}}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}} + \frac{2dfz^{n-1} + dg\dot{z}z^{2n-1}}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$; la fluente de ce dernier terme ſera $\frac{d}{n} P^{\frac{1}{2}}$; & retenant les mêmes valeurs de v, a, R, S, T, r, s, t, (1), (2), que dans les articles 64, 65; la fluente du ſecond terme ſera $\frac{fd}{ng}(1)$, & celle du premier $\frac{d}{n}(2)$: donc $\frac{d}{n} P^{\frac{1}{2}} + \frac{fd}{ng}(1) - \frac{d}{n}(2)$, ſera la fluente cherchée.

Mais si $\theta = -1$, la fluxion $d\dot{z}\, z^{-n-1} \sqrt{e + f z^{n} + g z^{2n}}$, peut être changée en celle-ci, $d\dot{z}\, z^{-1} \sqrt{e z^{-2n} + f z^{-n} + g}$, laquelle étant la même que celle ci-dessus, seulement ici, e, g, $-n$, z^{-n}, sont là, g, e, n, z^{n}; par conséquent $\frac{-1}{nz^{n}} d\, P^{\frac{1}{2}} - \frac{df}{ne}(1) + \frac{d}{n}(2)$.

On doit remarquer que lorsque $\pi = -\frac{1}{2}$, la fluente également distante de $\theta = 1$, & de $\theta = 0$, sont de même, seulement e, g, n, z^{n}, de l'une, sont exprimées par g, e, $-n$, z^{-n} dans l'autre; & lorsque $\pi = \frac{1}{2}$, les fluentes également distantes de $\theta = 0$, & de $\theta = -1$, sont aussi de même, avec la même exception.

PROBLEME XX.

69. *Soit* $P = e + f z^{n}$, $Q = g + h z^{n}$, *l'on demande la fluente de* $d\dot{z}\, z^{\theta n - 1} P^{\pi} Q^{\pi}$, *lorsqu'elle peut être réduite à la quadrature des sections coniques.*

Soit $d P^{\pi+1} Q^{\pi+1} \times$ par $(K z^{\theta n - 2n} + L z^{\theta n - n} + M z^{\theta n - 3n} + N z^{\theta n - 4n})$ ---- $x F + y G$, la fluente demandée, dont la fluxion disposée par ordre, en faisant $\theta + \pi = r$, $\theta + \pi = s$, & $\theta + \pi + \pi = t$, sera $t f h K + \left.\begin{matrix} \overline{r-1}, fgK \\ \overline{s-1}, ehK \\ \overline{t-1}, fhL \end{matrix}\right\}$

$$z^{-n} + \left.\begin{matrix} \overline{\theta-2}, egK \\ \overline{r-2}, fgL \\ \overline{s-2}, ehL \\ \overline{t-2}, fhM \end{matrix}\right\} z^{-2n} + \left.\begin{matrix} \overline{\theta-3}, egL \\ \overline{r-3}, fgM \\ \overline{s-3}, ehM \\ \overline{t-3}, fhN \end{matrix}\right\} z^{-3n} +$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{\theta-4}, egM \\ \overline{r-4}, fgN \\ \overline{s-4}, ehN \end{matrix}\right\} z^{-4n} - \overline{\theta-5}, egN\, z^{-5n} \times \text{par } n d\dot{z}\, z^{\theta n - 1} P^{\pi} Q^{\pi}.$$

Ainsi $t f h \mathrm{K} = 1$,

$\overline{r-1}, f g \mathrm{K} + \overline{s-1}, e h \mathrm{K} + \overline{t-1}, f h \mathrm{L} = 0.$

$\overline{\theta-2}, e g \mathrm{K} + \overline{r-2}, f g \mathrm{L} + \overline{s-2}, e h \mathrm{L} + \overline{t-2}, f h \mathrm{M} = 0.$

$\overline{\theta-3}, e g \mathrm{L} + \overline{r-3}, f g \mathrm{M} + \overline{s-3}, e h \mathrm{M} + \overline{t-3}, f h \mathrm{N} = 0.$

$\overline{\theta-4}, e g \mathrm{M} + \overline{r-4}, f g \mathrm{N} + \overline{s-4}, e h \mathrm{N} = x.$

$\overline{\theta-5}, e g \mathrm{N} = y.$

$$\text{ou} \left\{ \begin{aligned} &+\mathrm{K} = \frac{1}{t f h}. \\ &-\mathrm{L} = \frac{\overline{r-1}}{\overline{t-1}} \times \frac{g\mathrm{K}}{h} + \frac{\overline{s-1}}{\overline{t-1}} \times \frac{e\mathrm{K}}{f}. \\ &-\mathrm{M} = \frac{\overline{\theta-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{eg\mathrm{K}}{fh} + \frac{\overline{r-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{g\mathrm{L}}{h} + \frac{\overline{s-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{e\mathrm{L}}{f}. \\ &-\mathrm{N} = \frac{\overline{\theta-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{eg\mathrm{L}}{fh} + \frac{\overline{r-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{g\mathrm{M}}{h} + \frac{\overline{s-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{e\mathrm{M}}{f}. \end{aligned} \right.$$

Or si q exprime la moindre fraction de θ, ou $q = 0$, lorsque θ est un nombre entier, on aura $\theta - 5 = q$, $\theta - 4 = q + 1$, $r - 4\ (\theta + \pi - 4) = \pi + q + 1$, & $s - 4\ (\theta + \pi - 4) = \pi + q + 1$; & prenant N & M, pour les coefficiens des deux derniers termes, on aura $-y = egq\mathrm{N}$, & $-x = \overline{q+1}, eg\mathrm{M} + \overline{\pi + q + 1}, fg\mathrm{N} + \overline{\pi + q + 1}\, eh\mathrm{N}$; par conséquent la fluente sera $\frac{d z^{\theta n}}{n f h z^{2n}}$ $\mathrm{P}^{\pi+1}\ \mathrm{Q}^{\pi+1}$ $\times$ par $\Big(\frac{1}{t} - \frac{\overline{r-1}}{\overline{t-1}} \times \frac{g\mathrm{A}}{hz^n} - \frac{\overline{s-1}}{\overline{t-1}} \times \frac{e\mathrm{A}}{fz^n} - \frac{\overline{\theta-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{eg\mathrm{A}}{fhz^{2n}} - \frac{\overline{r-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{g\mathrm{B}}{hz^n} - \frac{\overline{s-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{e\mathrm{B}}{fz^n} - \frac{\overline{\theta-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{eg\mathrm{B}}{fhz^{2n}} - \frac{\overline{r-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{g\mathrm{C}}{hz^n} - \frac{\overline{s-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{e\mathrm{C}}{fz^n} - \Big)$ ---- $\left. \begin{array}{l} \overline{q+1}, eg\mathrm{M} \\ + \overline{\pi+q+1}, fg \\ + \overline{\pi+q+1}, eh \end{array} \right\} \mathrm{NF} - egq\mathrm{NG}.$

Remarquez que cette fluente doit être continuée à $\theta - 1$ termes; les lettres A, B, C, expriment chacune le terme qui la précéde avec son signe; les termes sont distingués avec une ligne par-dessus; lorsque $\theta = 2$, alors M sera $= 0$; & enfin $\mathrm{F} = \dot{z} z^{n + qn - 1}\, \mathrm{P}^{\pi}\, \mathrm{Q}^{\pi}$, & $\mathrm{G} = \dot{z} z^{qn - 1}\, \mathrm{P}^{\pi}\, \mathrm{Q}^{\pi}$.

CAS I.

70. Si θ est un nombre entier, & $\pi = -1$, on aura $q = 0$, $\theta \pm \pi = r$, $\theta - 1 = s$, & $\theta \pm \pi - 1 = t$; par conséquent la fluente de $d\dot{z}\, z^{\theta n - 1} \times \frac{\overline{e + fz^n}^{\pm\pi}}{g + hz^n}$, sera $\frac{d\, z^{\theta n}}{nfh\, z^n} P^{t \pm \pi} \times$ par $\left(\frac{1}{t} - \frac{\overline{r-1}}{\overline{t-1}} \times \frac{gA}{hz^n} - \frac{\overline{\theta-2}}{\overline{t-1}} \times \frac{eA}{fz^n} - \frac{\overline{\theta-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{\overline{r-2}}{\overline{t-2}} \times \frac{gB}{hz^n} - \frac{\overline{\theta-3}}{\overline{t-2}} \times \frac{eB}{fz^n} - \frac{\overline{\theta-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{\overline{r-3}}{\overline{t-3}} \times \frac{gC}{hz^n} - \frac{\overline{\theta-4}}{\overline{t-3}} \times \frac{eC}{fz^n} \right) \text{ - - } egM - \overline{1 \pm \pi}, fgN \times F$.

Si l'on suppose $\pi = \frac{\delta}{\lambda}$, & $v = \overline{e + fz^n}^{\frac{1}{\lambda}}$; $ha^\lambda = fg - eh$, la fluxion de F, $\dot{z}\, z^{n-1} \times \frac{\overline{e+fz^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}}{g + hz^n}$, peut être changée en $\frac{\lambda}{nh} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda - \delta - 1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsque $-\frac{\delta}{\lambda}$, ou en $\frac{\lambda}{nh}\, \dot{v}\, v^{\delta - 1} - \frac{\lambda}{nh} \times \frac{a^\lambda \dot{v}\, v^{\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsqu'il y a $+\frac{\delta}{\lambda}$, la fluente de l'un ou l'autre cas a été trouvée dans l'article 58.

CAS II.

71. Si θ est négatif, & le reste comme auparavant, la fluxion $d\dot{z}\, z^{-\theta n - 1} \times \frac{\overline{e+fz^n}^{\pm\pi}}{g + hz^n}$ peut être changée en celle-ci, $d\dot{z}\, z^{-\theta n \pm \pi n - n - 1} \times \frac{\overline{ez^{-n} + f}^{\pm\pi}}{gz^{-n} + h}$, & comme $\frac{-\theta n \pm \pi n - n}{-n} = \theta \mp \pi + 1$, on aura $\theta \mp \pi = s$, $\theta + 1 = r$, $\theta = t$, en mettant $s + 1$, $\theta + 1$, θ, e, f, g, h, $-n$, z^{-n}, au lieu de θ, r, t, f, e, h, g, n, z^n, dans la formule générale du probleme, on aura la fluente cherchée $\frac{dz^{n - sn}}{neg} P^{1 \pm \pi} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\overline{\theta - 1}} \times \frac{hA}{g} z^n - \frac{\overline{s-1}}{\overline{\theta-1}} \times \frac{fA}{e} z^n - \frac{\overline{s-1}}{\overline{\theta-2}} \times \frac{fhA}{g} z^{2n} - \frac{\overline{\theta-1}}{\overline{\theta-2}} \times \frac{hB}{g} z^n - \frac{\overline{s-2}}{\overline{\theta-2}} \times \frac{fB}{e} z^n - \frac{\overline{s-2}}{\overline{\theta-3}} \times \frac{fhB}{eg} z^{2n} - \frac{\overline{\theta-2}}{\overline{\theta-3}} \times \frac{hC}{g} z^n - \frac{\overline{s-3}}{\overline{\theta-3}} \times \frac{fC}{e} z^n \right) \text{ - - - } \overline{2 \mp \pi}, fhM + \left. \begin{matrix} \overline{2 \mp \pi}, eh \\ \overline{1 \mp \pi}, fg \end{matrix} \right\} NF + \overline{1 \mp \pi}, fhNG$.

Cette suite doit être continuée à θ termes, & $P = \frac{e+fz^n}{z^n}$; mais lorsque $\theta = 1$, on a $M = o$.

Si $v = \overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\lambda}}$, & $ha^\lambda = fg - eh$, en supposant $\pi = \frac{\delta}{\lambda}$, la fluxion $d\dot{z}\, z^{-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$ de G, peut être changée en $\frac{\lambda}{nh} \times \frac{\dot{z}\, v^{\lambda \pm \delta - 1}}{a^\lambda + v^\lambda} \times \frac{f}{v^\lambda - e}$; ce qui donne $\frac{\lambda e}{ng} \times \frac{\dot{v}\, v^{\delta-1}}{v^\lambda - e} + \frac{\lambda a^\lambda}{ng} \times \frac{\dot{v}\, v^{\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsque $+\frac{\delta}{\lambda}$, ou $\frac{\lambda}{ng} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda-\delta-1}}{v^\lambda - e} - \frac{\lambda h}{ng} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda-\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, lorsqu'il y a $-\frac{\delta}{\lambda}$.

Et la fluxion $d\dot{z}\, z^{-n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$ de F, sera changée en $\frac{\lambda h}{ngg} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda-\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda} - \frac{\lambda eh + \delta fg}{negg} \times \frac{\dot{v}\, v^{\lambda-\delta-1}}{v^\lambda - e} - \frac{f}{neg} \times$ flux. $\frac{v^{\lambda-\delta}}{v^\lambda - e}$, s'il y a $-\frac{\delta}{\lambda}$, ou en $-\frac{f}{ng}$ flux. $\frac{v^\delta}{v^\lambda - e} - \frac{\lambda eh - \delta fg}{ngg} \times \frac{\dot{v}\, v^{\delta-1}}{v^\lambda - e} - \frac{\lambda h a^\lambda}{ngg} \times \frac{\dot{v}\, v^{\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, s'il y a $+\frac{\delta}{\lambda}$, dont les fluentes peuvent être trouvées par ce qui précéde.

CAS III.

72. Si θ est un nombre entier positif quelconque, $\pi = -\frac{1}{2}$, $\pi = -1$; en mettant $-\frac{1}{2}$ au lieu de π, dans la fluente du premier cas, elle donnera $\frac{d z^{\theta n - 2n}}{nfh} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{2}{2\theta-3} - \frac{\overline{2\theta-3}}{2\theta-5} \times \frac{gA}{hz^n} - \frac{\overline{\theta-2}}{2\theta-5} \times \frac{2eA}{fz^n} - \frac{\overline{\theta-2}}{2\theta-7} \times \frac{2egA}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta-5}{2\theta-7} \times \frac{gB}{hz^n} - \frac{\theta-3}{2\theta-7} \times \frac{2eB}{fz^n} - \frac{\theta-3}{2\theta-9} \times \frac{2egB}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta-7}{2\theta-9} \times \frac{gC}{hz^n} - \frac{\theta-4}{2\theta-4} \times \frac{2eC}{fz^n}\right) - - - \overline{egM - \frac{1}{2}fN}$, F.

La fluxion de F sera ici $= \frac{2}{nh} \times \frac{\dot{v}}{aa+vv}$, selon ce même cas: or si $R = a = \sqrt{\frac{eh-fg}{h}}$, $T = \sqrt{e+fz^n}$, $S = \sqrt{\frac{fg+fhz^n}{h}}$, on aura $F = \frac{2}{n} \times \frac{g}{aah}(1)$. De là il suit que la fluente de $d\dot{z}\, z^{2n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{2}{nfh} dT + \frac{2gd}{naahh}(1)$, parce que $M = o$, & $N = \frac{2d}{nfh}$.

CAS IV.

73. Si θ est un nombre entier & négatif, $\pi = -\frac{1}{2}$, $\pi = -1$, la fluxion $d\dot{z}\, z^{-\theta n - 1} \times \overline{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}^{-\frac{1}{2}}$, peut être changée en $d\dot{z}\, z^{-\theta n - \frac{1}{2}n - 1} \times \overline{\frac{ez^{-n} + f}{gz^{-n} + h}}^{-\frac{1}{2}}$; & ainsi $s = \frac{2\theta - 1}{2}$, & la fluente du second cas deviendra $\frac{dz^{\frac{1}{2}n - \theta n}}{-neg} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta - 2} \times \frac{hA}{g} z^n - \frac{2\theta - 3}{\theta - 1} \times \frac{fA}{2e} z^n - \frac{2\theta - 3}{\theta - 2} \times \frac{fhA}{2eg} z^{2n} - \frac{\theta - 1}{\theta - 2} \times \frac{hB}{g} z^n - \frac{2\theta - 5}{\theta - 2} \times \frac{fB}{2e} z^n - \frac{2\theta - 5}{\theta - 3} \times \frac{fhB}{2eg} z^{2n} - \frac{\theta - 2}{\theta - 3} \times \frac{hC}{g} z^n - \frac{2\theta - 7}{\theta - 3} \times \frac{fC}{2e} z^n\right) - - \overline{\frac{5fhM + behN + 3fgN}{2}}$ $F + \frac{3}{2} fhNG$.

La fluxion de G sera ici $= \frac{2}{ng} \times \frac{\dot{v}}{vv - e} - \frac{2}{ng} \times \frac{\dot{v}}{aa + vv}$, & la fluxion de F, sera $= \frac{2h}{ngg} \times \frac{\dot{v}}{aa + vv} - \frac{f}{neg} \times$ flux. $\frac{\dot{v}}{vv - e} - \frac{2eh + fg}{negg} \times \frac{\dot{v}}{vv - e}$. Donc si $r = \sqrt{e}$, $t = \sqrt{e + fz^n}$, $s = \sqrt{fz^n}$, & les valeurs de R, S, T, (1), de même que dans le dernier cas, on aura $G = \frac{2h}{ng,\, eh - fg}(1) - \frac{2}{neg}(2)$, & $F = \frac{-1}{negz^n} T - \frac{2hh}{ngg,\, eh - fg}$ $(1) + \frac{2eh + fg}{neegg}(2)$.

CAS V.

74. Si θ est un nombre entier & positif, $\pi = \frac{1}{2}$, $\pi = -1$; la fluente de $d\dot{z}\, z^{\theta n - 1} \times \overline{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera par le premier cas, $\frac{dz^{\theta n - 2n}}{nfh} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{2}{2\theta - 1} - \frac{2\theta - 1}{2\theta - 3} \times \frac{gA}{hz^n} - \frac{\theta - 2}{2\theta - 3} \times \frac{2eA}{fz^n} - \frac{\theta - 2}{2\theta - 5} \times \frac{2egA}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta - 3}{2\theta - 5} \times \frac{gB}{hz^n} - \frac{\theta - 3}{2\theta - 5} \times \frac{2eB}{fz^n} - \frac{\theta - 3}{2\theta - 7} \times \frac{2egB}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta - 5}{2\theta - 7} \times \frac{gC}{hz^n} - \frac{\theta - 4}{2\theta - 7} \times \frac{2eC}{fz^n}\right) - - - - \overline{egM - \frac{3}{2} fgN} \times F$;

La fluxion $\dot{z}\, z^{n - 1} \times \overline{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, de F, sera $\frac{2\dot{v}}{nh} - \frac{2aa}{nh} \times \frac{\dot{v}}{aa + vv}$: c'est pourquoi $F = \frac{2}{nh} T - \frac{2}{nh}(1)$; par conséquent la fluente

de $dz\, z^{2n-1} \times \left(\frac{e+fz^n}{g+hz^n}\right)^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{2eh - 6fg + 2fhz^n}{3nfhh} dT + \frac{2g}{nhh} d(1)$, parce que $M = 0$, & $N = \frac{2d}{3fh}$.

CAS VI.

75. La fluxion $dz\, z^{-\theta n - 1} \times \left(\frac{e+fz^n}{g+hz^n}\right)^{\frac{1}{2}}$, peut être changée en celle-ci $dz\, z^{-\theta n - \frac{1}{2}n - 1} \times \left(\frac{ez^{-n}+f}{gz^{-n}+h}\right)^{\frac{1}{2}}$, dont la fluente par le second cas sera $\frac{dz^{\frac{1}{2}n - \theta n}}{-neg} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta - 1} \times \frac{hA}{g} z^n - \frac{2\theta - 3}{\theta - 1} \times \frac{fA}{2e} z^n - \frac{2\theta - 3}{\theta - 2} \times \frac{fhA}{2eg} z^{2n} - \frac{\theta - 1}{\theta - 2} \times \frac{hB}{g} z^n - \frac{2\theta - 5}{\theta - 2} \times \frac{fB}{2e} z^n - \frac{2\theta - 5}{\theta - 3} \times \frac{fhB}{2eg} z^{2n} - \frac{\theta - 2}{\theta - 3} \times \frac{hC}{g} z^n - \frac{2\theta - 7}{\theta - 3} \times \frac{fC}{2e} z^n\right) \text{- - - - -} \frac{3}{2} fhM + \frac{1}{2} fgN \times F + \frac{1}{2} fhNG$.

La fluxion de G, sera $= \frac{2e}{ng} \times \frac{\dot{v}}{vv - e} + \frac{2}{ng} \times \frac{aa\dot{v}}{aa + vv}$, & celle de F, sera $=$ flux. $\frac{-fv}{ng\, 2\, vv - e} - \frac{2eh - fg}{ngg} \times \frac{\dot{v}}{vv - e} - \frac{2h}{ngg} \times \frac{aa\dot{v}}{aa + vv}$.

Donc $G = \frac{2}{ng}(1) - \frac{2}{ng}(2)$, & $F = \frac{-1}{ngz^n} T - \frac{2h}{ngg}(1) + \frac{2eh - fg}{negg}(2)$.

CAS VII.

76. Si au lieu de θ l'on suppose $\theta \mp \frac{\delta}{\lambda}$, & $\pi = \frac{\delta}{\lambda}$, $\pi = -1$, la fluxion du probleme sera $dz\, z^{\theta n \mp \frac{\delta}{\lambda} n - 1} \times \left(\frac{e+fz^n}{g+hz^n}\right)^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$; & en faisant $r = \theta$, $s = \theta \mp \frac{\delta}{\lambda} - 1$, $t = \theta - 1$, la fluente sera $\frac{dz^{\theta n \mp \frac{\delta}{\lambda} n}}{nfhz^{2n}} P^{1 \pm \frac{\delta}{\lambda}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta - 1} - \frac{\theta - 1}{\theta - 2} \times \frac{gA}{hz^n} - \frac{s - 1}{\theta - 2} \times \frac{eA}{fz^n} - \frac{\theta - 2}{\theta - 3} \times \frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{\theta - 2}{\theta - 3} \times \frac{gB}{hz^n} - \frac{s - 2}{\theta - 3} \times \frac{eB}{fz^n} - \frac{\theta - 3}{\theta - 4} \times \frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{\theta - 3}{\theta - 4} \times \frac{gC}{fz^n} - \frac{s - 3}{\theta - 4} \times \frac{eC}{fz^n}\right) \text{- - -} 1 \mp \frac{\delta}{\lambda}, egM - fgN \mp ehN \times E \pm \frac{\delta}{\lambda} egNG$.

Si $v = \overline{\frac{e+fz^n}{z^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, & $ga^\lambda = eh - fg$, la fluxion $\dot z z^{\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$ de G, deviendra $-\frac{\lambda}{ng}\dot v v^{\delta-1} - \frac{\lambda}{ng}\times\frac{a^\lambda \dot v v^{\delta-1}}{a^\lambda + v^\lambda}$, s'il y a $+\delta$, ou $-\frac{\lambda}{ng}\times\frac{\dot v v^{\lambda-\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda}$, s'il y a $-\delta$.

Et la fluxion $d\dot z z^{n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$ de F, sera $-\frac{\lambda}{ng}\times \frac{\dot v v^{\lambda\mp\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda}\times\frac{e}{v^\lambda-f}$, ou $-\frac{\lambda}{nh}\times\frac{a^\lambda\dot v v^{\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda} - \frac{\lambda f}{nh}\times\frac{\dot v v^{\delta-1}}{v^\lambda-f}$, si $+\delta$, ou $\frac{\lambda}{nh}\times\frac{\dot v v^{\lambda-\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda} - \frac{\dot v v^{\lambda-\delta-1}}{v^\lambda - f}$ si $-\delta$, dont la fluente peut être trouvée comme ci-devant.

CAS VIII.

77. Soit θ un nombre entier négatif, la fluxion $d\dot z z^{-\theta n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$, peut être changée en $d\dot z z^{-\theta n-n-1}\times\overline{\frac{ez^{-n}+f}{gz^{-n}+h}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$; & comme $\frac{-\theta n-n}{-n} = \theta+1$, on aura $\theta+1=r$, $\theta\pm\frac{\delta}{\lambda}=s$, $\theta=t$, $q=0$; c'est pourquoi la fluente du probleme deviendra $\frac{dz^{-n-\theta n}}{-neg}P^{1\pm\frac{\delta}{\lambda}}\times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{hA}{g}z^n - \frac{s-1}{\theta-1}\times\frac{fA}{e}z^n - \frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{fhA}{eg} z^{2n} - \frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{hB}{g}z^n - \frac{s-2}{\theta-2}\times\frac{fB}{e}z^n - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{fhB}{eg}z^{2n} - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{hC}{g}z^n - \frac{s-3}{\theta-3}\times\frac{fC}{e}z^n\right)$ - - - - $fhM + 1 \pm\frac{\delta}{\lambda}, ehN, F.$

Si $v = \overline{\frac{e+fz^n}{z^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, & si $ga^\lambda = eh - eg$; la fluxion $\dot z z^{\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}$ de F, deviendra $-\frac{\lambda}{ng}\times\frac{\dot v v^{\lambda-\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda}$, si $-\delta$, ou $-\frac{\lambda}{ng}\dot v v^{\delta-1}+\frac{\lambda}{ng}\times\frac{a^\lambda\dot v v^{\delta-1}}{a^\lambda+v^\lambda}$, si $+\delta$; dont la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

CAS IX.

78. Soit θ un nombre entier, la fluente de $d\dot{z}\, z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera par le septiéme cas, $\frac{dz^{\theta n-\frac{1}{2}n}}{nfh} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta-1} - \frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{gA}{hz^n} - \frac{2\theta-5}{\theta-2}\times\frac{eA}{2fz^n} - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{gB}{hz^n} - \frac{2\theta-7}{\theta-3}\times \frac{eB}{2fz^n} - \frac{\theta-3}{\theta-4}\times\frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{\theta-3}{\theta-4}\times\frac{gC}{hz^n} - \frac{2\theta-9}{\theta-4}\times\frac{eC}{2fz^n}\right) \cdots\cdots -$ $\overline{\frac{3}{2}egM + fgN + \frac{1}{2}ehN} \times F + \frac{1}{2}egNG$.

La fluxion $\dot{z}\, z^{\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de G, sera $= \frac{2}{ng}\times\frac{\dot{v}}{aa+vv}$, & celle de $\dot{z}\, z^{\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de F, sera $\frac{2}{nh}\times\frac{\dot{v}}{aa+vv} - \frac{2}{nh}\times\frac{\dot{v}}{vv-f}$

C'est pourquoi, si $R = a = \sqrt{\frac{fg-eh}{g}}$, $T = v = \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$, $S = \sqrt{\frac{eg+ehz^n}{gz^n}}$, $t = f$, $t = T$, & $s = \sqrt{\frac{e}{z^n}}$, on aura $G = \frac{2}{naag}(1)$, & $F = \frac{2}{nhaa}(1) + \frac{2}{nfh}(2)$.

De là il suit que la fluente de $d\dot{z}\, z^{\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{z^n}{nfh}$ $dT - \frac{2g}{nbhaa}d(1) - \frac{2fg+eh}{nffhh}d(2)$, parce que $\theta = 2$, $M = 0$, & $N = \frac{d}{nfh}$.

CAS X.

79. La fluente de $d\dot{z}\, z^{-\theta n+\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera par le huitiéme cas, $\frac{dz^{n-\theta n}}{-neg} P^{\frac{1}{2}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{hA}{g}z^n - \frac{2\theta-3}{\theta-1}\times\frac{fA}{2e}z^n - \frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{fhA}{eg}z^{2n} - \frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{hB}{g}z^n - \frac{2\theta-5}{\theta-2}\times\frac{fB}{2e}z^n - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{fhB}{eg}z^{2n} - \frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{hC}{g}z^n - \frac{2\theta-7}{\theta-3}\times\frac{fC}{2e}\right) \cdots - \overline{fhM + \frac{1}{2}ehN}\times F$.

La fluxion $\dot{z}\, z^{\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de F, sera par le même cas

$\frac{-2}{2ng}\times\frac{\dot v}{aa+vv}$, & par conséquent $F=\frac{2}{ngaa}(1)$; de là il suit que la fluente de $d\dot z z^{-\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{-2}{neg}dT-\frac{2h}{nggaa}d(1)$, parce que $\theta=1$, $M=0$, & $N=\frac{-2d}{neg}$.

CAS XI.

80. Soit θ un nombre entier & positif; la fluente de $d\dot z z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera par le septiéme cas, $\frac{dz^{\theta n-\frac{1}{2}n}}{nfh}P^{\frac{1}{2}}\times$ par $\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{gA}{hz^n}-\frac{2\theta-3}{\theta-1}\times\frac{eA}{2fz^n}-\frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{egA}{fhz^{2n}}-\frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{gB}{hz^n}-\frac{2\theta-5}{\theta-2}\times\frac{eB}{2fz^n}-\frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{egB}{fhz^{2n}}-\frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{gC}{hz^n}-\frac{2\theta-7}{\theta-3}\times\frac{eC}{fz^n}\right)+\overline{\frac{1}{2}egM+fgN-\frac{1}{2}ehN}\times F-\frac{1}{2}egNG$.

La fluxion $\dot z z^{-\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de G, sera changée en $\frac{-2}{ng}\times\frac{\dot v vv}{aa+vv}$, ou bien en $\frac{-2\dot v}{ng}+\frac{2}{ng}\times\frac{aa\dot v}{aa+vv}$; & la fluxion $\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de F, en celle-ci $\frac{-2f}{nh}\times\frac{\dot v}{vv-f}-\frac{2}{ng}\times\frac{aa\dot v}{aa+vv}$; & ainsi $G=\frac{-2}{ng}T+\frac{2}{ng}(1)$, & $F=\frac{-2}{nh}(1)+\frac{2}{nh}(2)$.

De là il suit que la fluente de $d\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{z^n}{nh}dT+\frac{2g}{nhh}d(1)+\frac{eh-2fg}{nfhh}d(2)$; parce que $\theta=1$, $M=0$, & $N=\frac{d}{nfh}$.

CAS XII.

81. Soit θ un nombre entier négatif, la fluente de $d\dot z z^{-\theta n+\frac{1}{2}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera par le huitiéme cas, $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-\theta n}}{-neg}P^{\frac{1}{2}}\times$ par $\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{hA}{g}z^n-\frac{2\theta-1}{\theta-1}\times\frac{fA}{2e}z^n-\frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{fhA}{eg}z^{2n}-\frac{\theta-1}{\theta-2}\times\frac{hB}{g}z^n-\frac{2\theta-3}{\theta-2}\times\frac{fB}{2e}z^n-\frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{fhB}{eg}z^{2n}-\frac{\theta-2}{\theta-3}\times\frac{hC}{g}z^n-\frac{2\theta-5}{\theta-3}\times\frac{fC}{2e}z^n\right)\cdots+\overline{fhM+\frac{3}{2}ehN}\times F$.

La fluxion $\dot{z}\, z^{-\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de F, deviendra $\frac{-2\dot{v}}{ng} + \frac{2}{ng} \times \frac{aa\dot{v}}{aa+vv}$.

Donc $F = \frac{-2}{ng} T + \frac{2}{ng}(1)$. De là il suit que la fluente de $d\dot{z}\, z^{-\frac{1}{2}n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$, sera $\frac{-2eg-2fgz^n+6ehz^n}{3neggz^n} dT - \frac{2hd}{ngg}$ (2); parce que $\theta = 2$, $M = 0$, & $N = \frac{-2d}{3neg}$.

CAS XIII.

82. Si θ est un nombre entier positif, la fluente de $d\dot{z}\, z^{\theta n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{\delta}{\lambda}}$, sera $\frac{dz^{\theta n-2n}\overline{P}^{1+\frac{\delta}{\lambda}}}{nfhQ} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{r-1}{\theta-1} \times \frac{gA}{hz^n} - \frac{s-1}{\theta-1} \times \frac{eA}{fz^n} - \frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{r-2}{\theta-2} \times \frac{gB}{hz^n} - \frac{s-2}{\theta-2} \times \frac{eB}{fz^n} - \frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{r-3}{\theta-3} \times \frac{gC}{hz^n} - \frac{s-3}{\theta-3} \times \frac{eC}{fz^n}\right) \ldots - \overline{egM + \overline{1+\frac{\delta}{\lambda}}, fgN + \overline{1-\frac{\delta}{\lambda}}, ehN}, \times F$.

Si l'on fait $v = \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{\lambda}}$, & $aa = fg - eh$, la fluxion $\dot{z}\, z^{n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{\delta}{\lambda}}$ de F, deviendra $\frac{aa}{n} \times \frac{\lambda \dot{v} v^{\delta+\lambda-1}}{\overline{hv^\lambda - f}^2}$, ou bien $\frac{aa}{nh} \times \frac{\delta \dot{v} v^{\delta-1}}{hv^\lambda - f} - \frac{aa}{nh} \times$ flux. $\frac{-v^\delta}{hv^\lambda - f}$, dont la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit auparavant.

CAS XIV.

83. Lorsque θ est négatif, la fluxion $d\dot{z}\, z^{-\theta n-1} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{\delta}{\lambda}}$ peut être changée en $d\dot{z}\, z^{-\theta n-1} \times \overline{\frac{ez^{-n}+f}{gz^{-n}+h}}^{\frac{\delta}{\lambda}}$; & comme $\frac{-\theta n}{-n} = \theta$; si l'on met e pour f, f pour e, g pour h, h pour g, $-n$ pour n, & z^{-n} pour z^n, on aura $\frac{dz^{2n-\theta n}}{-neg} \times \overline{\frac{P}{Q}}^{1+\frac{\delta}{\lambda}} \times$ par $\left(\frac{1}{\theta} - \right.$

$r-1$

$\frac{r-1}{\theta-1}\times\frac{hA}{g}z^n - \frac{s-1}{\theta-1}\times\frac{fA}{e}z^n - \frac{fhA}{eg}z^{2n} - \frac{r-2}{\theta-2}\times\frac{hB}{g}z^n - \frac{s-2}{\theta-2}\times$
$\frac{fB}{e}z^n - \frac{fhB}{eg}z^{2n} - \frac{r-3}{\theta-3}\times\frac{hC}{g}z^n - \frac{s-3}{\theta-3}\times\frac{fC}{e}z^n)$ - - - - - - - -
$\overline{fhM + 1+\frac{\delta}{\lambda}, ehN + 1-\frac{\delta}{\lambda}, fgN}\times F.$

La fluxion $\dot{z}z^{-n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{\delta}{\lambda}}$ de F, deviendra $-\frac{aa}{ng}\times\frac{\delta\dot{v}v^{\delta-1}}{gv^{\lambda}-f}$ $+\frac{aa}{ng}$ flux. $\frac{v^{\delta}}{gv^{\lambda}-f}$, dont la fluente peut être trouvée par ce qui a été dit ci-devant.

CAS XV.

84. Si $\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}$, on aura $\frac{2\theta+1}{2}=r$, $\frac{2\theta-1}{2}=s$, & la fluente de $d\dot{z}z^{\theta n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ deviendra par le treiziéme cas, $\frac{dz^{\theta n-2n}}{nfh}\times\frac{P^{\frac{3}{2}}}{Q}$ × par $(\frac{1}{\theta} - \frac{2\theta-1}{\theta-1}\times\frac{gA}{2hz^n} - \frac{2\theta-3}{\theta-1}\times\frac{eA}{2fz^n} - \frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta-3}{\theta-2}\times$
$\frac{gB}{2hz^n} - \frac{2\theta-5}{\theta-2}\times\frac{eB}{2fz^n} - \frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{2\theta-5}{\theta-3}\times\frac{gC}{2hz^n} - \frac{2\theta-7}{\theta-3}\times\frac{eC}{fz^n})$ - - -
$\overline{egM+\frac{3}{2}fgN+\frac{1}{2}ehN}\times F.$

Et la fluxion $\dot{z}z^{-n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ de F, sera $\frac{aa}{nh}\times\frac{\dot{v}}{hvv-f} - \frac{aa}{nh}$ flux. $\frac{v}{hvv-f}$.

Donc si $R=\sqrt{\frac{f}{h}}$, $T=\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$, $S=\sqrt{\frac{eh-fg}{hg+hhz^n}}$, on aura $F=\frac{1}{nh}\overline{PQ}^{\frac{1}{2}}+\frac{eh-fg}{nfh}$ (1).

CAS XVI.

85. Lorsque θ est négatif, la fluente de $d\dot{z}z^{-\theta n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}$ sera par le quatorziéme cas, $\frac{dz^{2n-\theta n}}{-neg}\times\frac{P^{\frac{3}{2}}}{Q}\times$ par $(\frac{1}{\theta} - \frac{2\theta-1}{\theta-1}\times\frac{hA}{2g}$
$z^n - \frac{2\theta-3}{\theta-1}\times\frac{fA}{2e}z^n - \frac{fhA}{eg}z^{2n} - \frac{2\theta-3}{\theta-2}\times\frac{hB}{2g}z^n - \frac{2\theta-5}{\theta-2}\times\frac{fB}{2e}z^n -$

$\frac{fhB}{eg} z^{2n} - \frac{2\theta-5}{\theta-3} \times \frac{hC}{2g} z^{n} - \frac{2\theta-7}{\theta-3} \times \frac{fC}{2e} z^{n}) - - \overline{fhM + \frac{3}{2}ehN + \frac{1}{2}fgN}$ $\times$ F.

Et la fluxion $\dot{z} z^{-n-1} \times \overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}}^{\frac{1}{2}}$ de F, fera $-\frac{aa}{ng} \times \frac{\dot{v}}{gvv-f} + \frac{aa}{ng}$ flux. $\frac{v}{gvv-f}$.

Donc si $r = \sqrt{\frac{e}{g}}$, $t = \overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}}^{\frac{1}{2}}$, $s = \overline{\frac{fgz^{n}-ehz^{n}}{gg+ghz^{n}}}^{\frac{1}{2}}$, on aura F $= \frac{-1}{ngz^{n}} \overline{PQ}^{\frac{1}{2}} - \frac{fg-eh}{neg}$ (2).

Et la fluxion $\dot{z} z^{-1} \times \overline{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}}^{\frac{1}{2}}$, fera $-\frac{2}{n} \times \frac{f\dot{v}}{hvv-f} - \frac{2}{n} \times \frac{e\dot{v}}{e-gvv}$; par conséquent la fluente fera $\frac{2}{n}$ (1) $- \frac{2}{n}$ (2).

CAS XVII.

86. Si $\pi = \varpi = -1$, on aura $\theta - 1 = r = s$, $t = \theta - 2$, & la fluente de $\frac{d\dot{z} z^{\theta n-1}}{\overline{e+fz^{n}} \times \overline{g+hz^{n}}}$, fera par le probleme $\frac{dz^{\theta n-2n}}{nfh}$ $\times$ par $(\frac{1}{\theta-2} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{gA}{hz^{n}} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{eA}{fz^{n}} - \frac{\theta-2}{\theta-4} \times \frac{egA}{fhz^{2n}} - \frac{\theta-3}{\theta-4} \times \frac{gB}{hz^{n}} - \frac{\theta-3}{\theta-4} \times \frac{eB}{fz^{n}} - \frac{\theta-3}{\theta-5} \times \frac{egB}{fhz^{2n}} - \frac{\theta-4}{\theta-5} \times \frac{gC}{hz^{n}} - \frac{\theta-4}{\theta-5} \times \frac{eC}{fz^{n}}) - - -$ log. $\frac{g, \overline{e+fz^{n}}}{e, \overline{g+hz^{n}}}$ $\times$ par $\frac{egM}{eh-fg^{n}}$; cette suite doit être continuée à $\theta - 2$ termes outre le logarithme.

CAS XVIII.

87. La fluente de $\frac{d\dot{z} z^{-\theta n-1}}{\overline{e+fz^{n}} \times \overline{g+hz^{n}}}$, fera par le probleme $\frac{dz^{-\theta n}}{-n\theta eg}$ $- \frac{\theta}{\theta-1} \times \frac{hAz^{n}}{g} - \frac{\theta}{\theta-1} \times \frac{fA}{e} z^{n} - \frac{\theta}{\theta-2} \times \frac{fhA}{eg} z^{2n} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{hB}{g} z^{n} - \frac{\theta-1}{\theta-2} \times \frac{fB}{e} z^{n} - \frac{\theta-1}{\theta-3} \times \frac{fhB}{eg} z^{2n} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{hC}{g} z^{n} - \frac{\theta-2}{\theta-3} \times \frac{fC}{e} z^{n}) - - -$ $\frac{fhM}{eh-fg} \times \frac{gf}{eh}$ log. $\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}$.

CAS XIX.

88. Si $\frac{dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$, on aura $\theta+\frac{\delta}{\lambda}-1=r=s$, $\theta+\frac{\delta}{\lambda}-2=t$: or $r-1=t$, & la fluente sera par le probleme, en faisant $\pi=1$, $\pi=-1$, $\frac{dz^{tn}}{nfht}\overline{-\frac{r-1}{r-2}\times\frac{gA}{hz^n}-\frac{r-1}{r-2}\times\frac{eA}{fz^n}-\frac{r-1}{r-3}\times\frac{egA}{fhz^{2n}}-\frac{r-2}{r-3}\times\frac{gB}{hz^n}-\frac{r-2}{r-3}\times\frac{eB}{fz^n}-\frac{r-2}{r-4}\times\frac{egB}{fhz^{2n}}-\frac{r-3}{r-4}\times}$ $\overline{\frac{gC}{hz^n}-\frac{r-3}{r-4}\times\frac{eC}{fz^n}})$ -- $\overline{1+\frac{\delta}{\lambda}}$, $egM+\frac{\delta}{\lambda}$, $\overline{fg+eh}$, $N\times F+\frac{\delta}{\lambda}egNG$.

La fluxion $\frac{\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de G, peut, en faisant $a=eh-fg$, être changée en $\frac{1}{a}\left(\frac{f\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n}-\frac{h\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{g+hz^n}\right)$, & la fluxion $\frac{\dot z z^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de F, en $\frac{1}{a}\left(\frac{e\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n}-\frac{g\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{g+hz^n}\right)$, dont les fluentes peuvent être trouvées par ce qui a été dit ci-devant.

CAS XX.

89. Lorsque θ est négatif, la fluxion $\frac{d\dot z z^{-\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ peut être changée en $\frac{d\dot z z^{-\theta n-2n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{ez^{-n}+f}\times\overline{gz^{-n}+h}}$, & comme $\frac{-\theta n-2n+\frac{\delta}{\lambda}n}{-n}=\theta+2-\frac{\delta}{\lambda}$, on aura $\theta-\frac{\delta}{\lambda}+1=r=s$, & $\theta-\frac{\delta}{\lambda}=t$; si donc on met $\theta+2-\frac{\delta}{\lambda}$, ou $r+1$ pour θ, $-n$ pour n, e pour f, f pour e, g pour h, h pour g, & z^{-n} pour z^n, dans la derniere formule, on aura $\frac{dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-\theta n}}{-neg}\times$ par $\overline{(\frac{1}{r-1}-\frac{r-1}{r-2}\times\frac{hA}{g}z^n-\frac{r-1}{r-2}\times\frac{fA}{e}z^n-\frac{r-1}{r-3}}$ $\overline{\times\frac{fhA}{eg}z^{2n}-\frac{r-2}{r-3}\times\frac{hB}{g}z^n-\frac{r-2}{r-3}\times\frac{fB}{e}z^n-\frac{r-2}{r-4}\times\frac{fhB}{eg}z^{2n}}-$

$\overline{\frac{r-3}{r-4}\times\frac{hC}{g}z^n - \frac{r-3}{r-4}\times\frac{fC}{e}z^n}\Big)$ - - $\overline{1+\frac{\delta}{\lambda}}, fhM + \overline{eh+fg}, \frac{\delta}{\lambda}N\times F$ $+\frac{\delta}{\lambda}fhNG$; cette fluente doit être continuée à θ termes.

La fluxion $\frac{\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de G, se peut réduire à $\frac{1}{a}\left(\frac{f\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n} - \frac{h\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{g+hz^n},\right)$ en supposant $a = fg - eh$, & la fluxion $\frac{\dot z z^{-n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de F, à $\frac{1}{eg}\times\dot z z^{-n+\frac{\delta}{\lambda}n-1} - \frac{ff}{ae}\times\frac{\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n} - \frac{hh}{ag}\times\frac{\dot z z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{g+hz^n}$, les fluentes de l'une & de l'autre peuvent être trouvées par le moyen de la quadrature des sections coniques.

CAS XXI.

90. Si $\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}$, la fluente de $\frac{d\dot z z^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$, sera, par le dix-neuviéme cas, $\frac{dz^{\theta n-\frac{n}{2}}}{nfh}\times$ par $\Big(\frac{2}{2\theta-3} - \overline{\frac{2\theta-3}{2\theta-5}\times\frac{gA}{hz^n} - \frac{2\theta-3}{2\theta-5}\times\frac{eA}{fz^n}}$ $\overline{- \frac{2\theta-3}{2\theta-7}\times\frac{egA}{fhz^{2n}}} - \overline{\frac{2\theta-5}{2\theta-7}\times\frac{gB}{hz^n} - \frac{2\theta-5}{2\theta-7}\times\frac{eB}{fz^n}} - \overline{\frac{2\theta-5}{2\theta-9}\times\frac{egB}{fhz^{2n}}} -$ $\overline{\frac{2\theta-7}{2\theta-9}\times\frac{gC}{hz^n} - \frac{2\theta-7}{2\theta-9}\times\frac{eC}{fz^n}}\Big)$ - - - $\frac{1}{2}egM + \overline{fg+eh}\times\frac{1}{2}N\times F$ $+\frac{1}{2}egNG$.

La fluxion $\frac{\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de G, sera $=\frac{f}{a}\times\frac{\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n} - \frac{h}{a}\times\frac{\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}}{g+hz^n}$; & la fluxion $\frac{\dot z z^{\overline{\frac{1}{2}n}-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de F, $= \frac{e}{a}\times\frac{-\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}+\frac{g}{a}\times\frac{\dot z z^{\frac{1}{2}n-1}}{g+hz^n}$. Par conséquent, si $R=\sqrt{\frac{-e}{f}}$, $T=z^{\frac{1}{2}n}$, $S=\frac{\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{2}}}{f}$, $r=\sqrt{\frac{-g}{h}}$, $t=z^{\frac{1}{2}n}$, $s=\frac{\overline{g+hz^n}^{\frac{1}{2}}}{h}$, on aura $G=\frac{2f}{nae}(1) - \frac{2h}{nag}(2)$, & $F=\frac{-2}{na}(1)+\frac{2}{na}(2)$.

CAS XXII.

91. La fluente de $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$, sera par le vingtiéme cas,

$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-\theta n}}{-neg}\times$ par $\frac{2}{2\theta-1}-\frac{2\theta-5}{2\theta-7}\times\frac{hC}{g}z^n-\overline{\frac{2\theta-1}{2\theta-3}\times\frac{fA}{e}z^n-\frac{2\theta-1}{2\theta-5}\times\frac{fhA}{eg}}$ $\overline{z^{2n}-\frac{2\theta-2}{2\theta-5}\times\frac{hB}{g}z^n-\frac{2\theta-3}{2\theta-5}\times\frac{fB}{e}z^n}-\overline{\frac{2\theta-3}{2\theta-7}\times\frac{fhB}{eg}z^{2n}-\frac{2\theta-5}{2\theta-7}\times}$ $\overline{\frac{hC}{g}z^n-\frac{2\theta-5}{2\theta-7}\times\frac{fC}{e}z^n})---\frac{3}{2}fhM+\overline{eh+fg},\frac{1}{2}N\times F+\frac{1}{2}fhNG.$

La fluxion $\frac{\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de G, sera $=\frac{f}{a}\times\frac{\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}-\frac{h}{a}\times$ $\frac{\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{g+hz^n}$, & la fluxion $\frac{\dot{z}z^{-\frac{1}{2}n-1}}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$ de F, $=\frac{1}{eg}\times\dot{z}z^{-\frac{1}{2}n-1}$ $-\frac{ff}{ae}\times\frac{\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}+\frac{hh}{ag}\times\frac{\dot{z}z^{\frac{1}{2}n-1}}{g+hz^n}$; par conséquent $G=\frac{2f}{nae}(1)+$ $\frac{2h}{nag}(2)$, & $F=\frac{-2}{negz^{\frac{1}{2}n}}-\frac{2ff}{nae e}(1)+\frac{2hh}{nagg}(2).$

PROBLEME XXI.

92. *L'on demande la fluente de* $\frac{d\dot{z}z^{\theta n-1}}{\overline{k+lz^n}\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}}$.

En faisant $q=ell-fkl+gkk$; cette fluxion peut être changée en celle-ci, $\frac{d}{q}\times$ par $\left(\frac{ll\dot{z}z^{\theta n-1}}{k+lz^n}-\frac{\overline{glz^n+lf-gk}\times\dot{z}z^{\theta n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}\right)$, la fluente de $\frac{ll\dot{z}z^{\theta n-1}}{k+lz^n}$, sera par l'article 35. $\frac{z^{\theta n-n}}{n}\times$ par $\left(\frac{l}{\theta-1}-\right.$ $\left.\frac{kz^{-n}}{\theta-2}+\frac{kk}{l}\times\frac{z^{-2n}}{\theta-3}-\frac{k^3}{l}\times\frac{z^{-3n}}{\theta-4}+\frac{k^4}{l}\times\frac{z^{-4n}}{\theta-5}\right)--\pm\frac{k^{\theta-1}}{nl}L\frac{k+lz^n}{k}.$

Et si $\frac{glz^n+lf-gk}{e+fz^n+gz^{2n}}=Az^{-n}+Bz^{-2n}+Cz^{-3n}+Dz^{-4n}--$ $xF+yG$, en réduisant cette égalité sous la même dénomination, on aura $glz^n+fl-gk=gAz^n+\left.\begin{matrix}gB\\fA\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}gC\\fB\\eA\end{matrix}\right\}$ $z^{-n}+\left.\begin{matrix}gD\\fC\\eB\end{matrix}\right\}z^{-2n}---+\left.\begin{matrix}fD\\eC\end{matrix}\right\}z^{-3n}+eDz^{-4n}.$

De là, en faisant les coefficiens des mêmes termes égaux, & les autres égaux à zero, on aura

$$gA = gl \qquad A = l.$$
$$gB + fA = fl - gk, \quad \text{ou} \quad -B = k.$$
$$gC + fB + eA = 0, \qquad -C = \frac{f}{g}B + \frac{e}{g}A.$$
$$gD + fC + eB = 0, \qquad -D = \frac{f}{g}C + \frac{e}{g}B.$$
$$fD + eC = x, \qquad -x = fD + eC.$$
$$eD = y, \qquad -y = 2 - - - eD.$$

Donc $\frac{z^{\theta n - n}}{n} \times$ par $\left(\frac{A}{\theta - 1} + \frac{Bz^{-n}}{\theta - 2} + \frac{Cz^{-2n}}{\theta - 3} + \frac{Dz^{-4n}}{\theta - 4}\right)$ ------ $\overline{fD + eC}$, F + e D G, sera la fluente cherchée ; l'une & l'autre de ces fluentes doivent être continuées à $\theta - 1$ termes, & leur différence multipliée par $\frac{d}{q}$, donnera la fluente cherchée du probleme, lorsque $\theta = 2$, on aura $C = 0$; si $P = e + fz^n + gz^{2n}$, $\dot{z}z^{2n-1}P^{-1}$ sera la fluxion de F, & $\dot{z}z^{n-1}P^{-1}$ celle de G.

Si l'on fait $2gv = f + 2gz^n$, & $4ag = 4eg - ff$, la fluxion de G deviendra $\frac{\frac{1}{n}\dot{v}}{a + gvv}$, & celle de F, $\frac{1}{2ng} \times \frac{2gv\dot{v} - f\dot{v}}{a + gvv}$. Or si $R = \sqrt{\frac{a}{g}}$, $T = v$, $S = \frac{\overline{a + gvv}^{\frac{1}{2}}}{g}$, & $L = \log. \frac{e + fz^n + gz^{2n}}{e}$, on aura $G = \frac{1}{na}(1)$, & $F = \frac{L}{2ng} - \frac{f}{2nag}(2)$.

COROLLAIRE I.

93. Si $\theta = 1$, la fluxion $\frac{d}{q} \times \left(\frac{ll\dot{z}z^{n-1}}{k + lz^n} - \frac{\overline{glz^n + fl - gk}\,\dot{z}z^{n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}}\right)$ deviendra $\frac{d}{q} \times \left(\frac{ll\dot{z}z^{n-1}}{k + lz^n} - \frac{2glv\dot{v} + lf\dot{v} - 2gk\dot{v}}{2n, \overline{a + gvv}}\right)$, dont la fluente sera $\frac{dl}{nq}\log. \frac{k + lz^n}{k} - \frac{dl}{2ng}L + \frac{lf - 2gk}{2nag}d(1)$, ou bien en faisant $K = \log. \frac{e + fz^n + gz^{2n}}{\overline{k + lz^n}^2}$, cette fluente deviendra $\frac{-dl}{2nq}K + \frac{lf - 2gk}{2naq}(2)$.

COROLLAIRE II.

94. Si $\theta = 2$, la fluxion $\frac{d\dot{z}z^{2n-1}}{\overline{k+lz^n} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}}$, sera, par l'article 93, changée en $\frac{d}{q} \times \left(\frac{lk\dot{z}z^{n-1}}{k+lz^n} - \frac{\overline{el+gkz^n} \times \dot{z}z^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}\right)$, & le dernier terme, par le même article, en $\frac{1}{2n} \times \frac{\overline{2el-fk}, \dot{v}+2gkv\dot{v}}{a+gz^n}$, dont la fluente est $\frac{2el-fk}{2an}(1) + \frac{k}{2n}L$; & celle du premier sera $\frac{k}{2n} \times \log. \frac{\overline{k+lz^n}^2}{k}$: or comme $L - \log. \frac{\overline{k+lz^n}^2}{k} = K$, la fluente cherchée sera $\frac{dk}{2nq}K + \frac{2el-fk}{2naq}(1)$.

COROLLAIRE III.

95. Si $\theta = 3$; la premiere fluente sera $\frac{lz^{2n}}{2n} - \frac{kz^n}{n} + \frac{kk}{nl}\log. \frac{k+lz^n}{k}$, & la seconde $\frac{lz^{2n}}{2n} - \frac{kz^n}{n} - \frac{el-fk}{2ng}L + \frac{2egk+efl-ffk}{2nag}$ (1), parce que $C = \frac{l}{2n}$, & $D = -\frac{k}{n}$; & comme $q = ell - fkl + gkk$, ou $\frac{q-gkk}{l} = el - fk$, on aura $\frac{el-fk}{2ng}L = \frac{q-gkk}{2ngl}L = \frac{q}{2ngl}L - \frac{kk}{2nl}L$; & comme on a aussi $\frac{kk}{nl}\log. \frac{k+lz^n}{k} = \frac{kk}{2nl}\log. \frac{\overline{k+lz^n}^2}{k}$, on aura $\frac{kk}{2nl}L - \frac{kk}{2nl}\log. \frac{\overline{k+lz^n}^2}{l} = \frac{kk}{2nl}K$, art. 93; par conséquent $\frac{d}{2ngl}L - \frac{kkel}{2nlq}K + \frac{2egk+efl-ffk}{2angq}$ d (1), sera la fluente cherchée.

COROLLAIRE IV.

96. Si $\theta = 0$, la fluxion $\frac{d\dot{z}z^{-1}}{\overline{k+lz^n} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}}$, peut être changée en celle-ci $\frac{d\dot{z}z^{-3n-1}}{\overline{kz^{-n}+l} \times \overline{ez^{-2n}+fz^{-n}+g}}$. Or si l'on met k pour l, l pour k, e pour g, g pour e, $-n$, pour n, & z^{-n} pour z^n, dans la fluente de l'article précédent, on aura $\frac{-d}{2nek}$

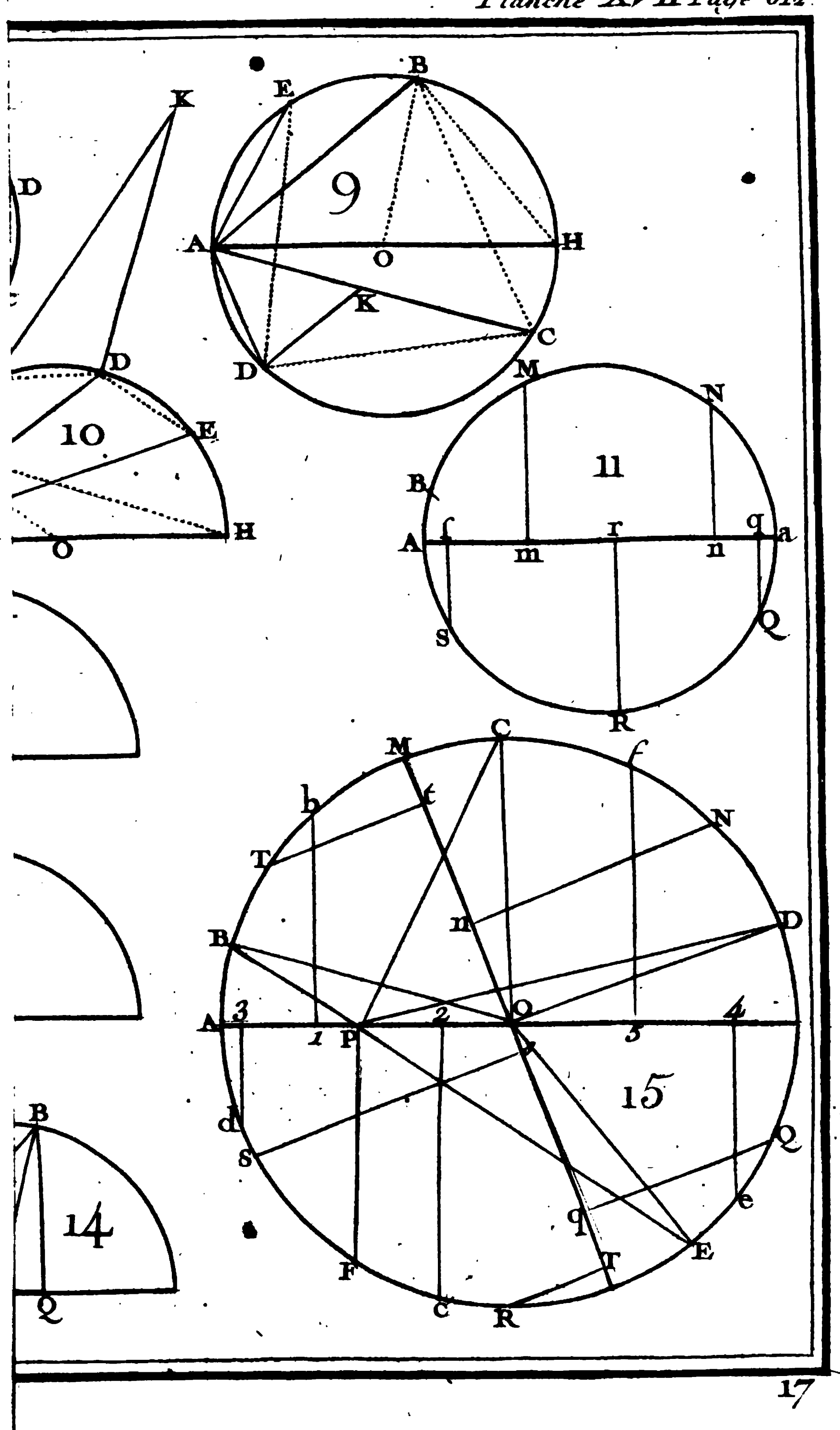
$L + \frac{lld}{2neq} K - \frac{2egl + fgk - ffl}{2aneq}$ (2), pour la fluente de cette fluxion.

COROLLAIRE V.

97. A cause que la fluxion $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n-1}}{\overline{k+lz^n} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}}$, peut être changée en $\frac{d\dot{z}z^{-\theta n-3n-1}}{\overline{kz^{-n}+l} \times \overline{ez^{-2n}+fz^{-n}+g}}$; & comme les cas ou $-\theta$ eſt o, 1, 2, 3, &c. répondent aux cas dans leſquels $+\theta$ eſt 3, 4, 5, 6, &c. en prenant $l, k, g, e, -n, z^{-n}$, pour k, l, e, g, n, z^n, reſpectivement, on aura les fluentes de cette derniere fluxion dans ces différens cas.

Il eſt aiſé de s'appercevoir que la méthode que nous venons de ſuivre s'étend à des fluxions dont le dénominateur eſt un multinome quelconque, ou le produit de pluſieurs; mais comme la ſpéculation peut être pouſſée trop loin : nous avons cru que ce que nous venons de dire étoit ſuffiſant pour l'inſtruction du lecteur, lequel peut, s'il le veut, la continuer autant qu'il jugera à propos.

Formules


9
E B A H O K C D
K D
10
D E H O
11
M N B A ſ r q a m n S Q R
14
B Q
15
M C ſ b t N T B D A 3 1 P 2 O 3 4 d S Q q e F C R T E
17

Formules générales contenues dans ce Traité.

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}}{e+fz^n}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{e+fz^n}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}}{z^{2n}\mp 2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{n\pm\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{z^{2n}\mp 2uz^n r^{n-1}+r^{2n}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\overline{e+fz^n}^{\pm\pi}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\overline{a^n\pm z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\overline{a^n\mp z^n}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}^{\pm\frac{1}{2}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\pi}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\frac{\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{2}}}{g+hz^n}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-n}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\pm\frac{\delta}{\lambda}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}^{\frac{1}{2}}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n\mp\frac{\delta}{\lambda}n-1}\times\frac{\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{2}}}{g+hz^n}.$$

$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\frac{\overline{e+fz^n}^{\frac{\delta}{\lambda}}}{g+hz^n}.$$

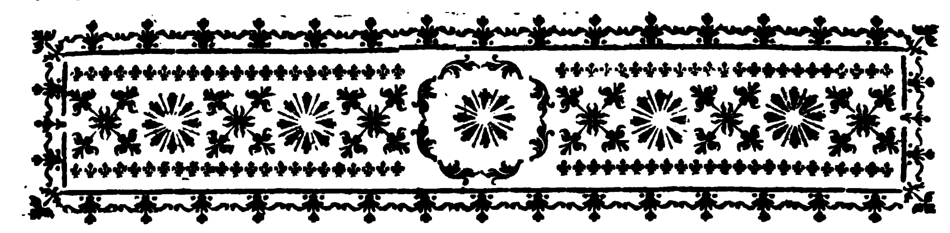
$$d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}\times\frac{\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{2}}}{g+hz^n}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}}{\overline{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}}{\overline{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n+\frac{1}{2}n-}}{\overline{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}}.$$

$$\frac{d\dot z\, z^{\pm\theta n-1}}{\overline{\overline{k+lz^n}\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}}}.$$



TRAITÉ DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

INTRODUCTION.

La Méchanique, quant aux besoins de la vie, est sans contredit la partie des Mathématiques la plus utile, & en même temps la plus étendue. Elle est devenue plus recommandable encore depuis qu'on est parvenu à l'appliquer au cours des Astres. Aussi les plus habiles Mathématiciens s'y sont attachés préférablement à toute autre. Chacun profitant des réflexions de ceux qui l'avoient précédé, & de leurs découvertes, faisoit tous ses efforts pour l'approfondir, & pour en étendre les limites, de maniere que peu à peu cette inestimable science est parvenue à un si haut degré de perfection, qu'il semble qu'à peine on n'y puisse rien ajouter digne d'être présenté au public.

Galilée découvrit les loix du mouvement des corps qui tombent dans un milieu sans résistance. Il appliqua cette découverte à la courbe que décrit un corps poussé par une vîtesse donnée dans une direction quelconque.

M. Descartes, observant la force par laquelle une pierre, que l'on tourne dans une fronde, tâche à s'éloigner, ouvrit sur le mouvement une nouvelle carriere beaucoup plus vaste que n'avoit fait Galilée.

M. Huygens, qui appella cette force, *force centrifuge*, s'appliqua fort à la recherche de ses loix. Il fit pour cet effet un

grand nombre de tentatives, & donna enfin treize theorêmes, ſans démonſtration.

A peine le Chevalier Newton l'ayant ſçu, que ſa pénétration extraordinaire le conduiſit bientôt à la découverte des loix de la force qui détourne les corps en mouvement de leurs directions en ligne droite pour leur faire décrire des courbes quelconques : il nomma cette force, *force centripete*. Mais non content d'en avoir démontré les loix dans un milieu ſans réſiſtance, il en fit l'application dans un milieu quelconque : autre découverte, encore beaucoup plus étendue que toutes celles qu'on avoit faites avant lui ſur cette matiere.

Kepler, ayant trouvé par un grand nombre d'obſervations aſtronomiques, que les orbes des planetes étoient des ellipſes, dont le ſoleil occupoit un des foyers ; que leurs temps périodiques étoient entr'eux comme les aires décrites par la ligne tirée de ce foyer ou centre de force, au centre du corps ; & que les quarrés des temps étoient comme les cubes des diſtances moyennes des orbes ; l'incomparable Newton démontra mathématiquement l'infaillibilité de ces loix, & il trouva outre cela que les forces centripetes qui retiennent les corps dans les orbes elliptiques, étoient en raiſon inverſe des quarrés des diſtances du foyer ; & que la cauſe qui retenoit un corps dans ſon orbe devoit être auſſi celle qui retenoit tout autre corps dans le ſien. Delà s'enſuivit la gravité univerſelle : ſur ce principe il compoſa ſon ſyſtême du Monde, qui aſſurément doit rendre ſon nom immortel.

Depuis que les Principes de Philoſophie naturelle ont paru, les plus grands Mathématiciens de l'Europe ſe ſont trouvés aſſez occupés à en dévoiler quelque partie. Car il y traite les choſes d'une maniere fort ſuccincte, & les démontre par la ſyntheſe, ce qui rend pluſieurs de ſes démonſtrations un peu obſcures. D'un autre côté, ce Livre contient preſque toutes les parties des Mathématiques & de Phyſique : on n'a guere lieu d'eſpérer de nouvelles découvertes ; auſſi tout ce qu'on a pu faire depuis, a été ou d'en démontrer quelque partie d'une maniere plus claire, ou de les étendre davantage que l'Auteur n'avoit fait.

Le but de cet ouvrage eſt de réduire tout ce qu'il y a d'eſſentiel ſur le mouvement dans le Livre de Newton, ſous un même point de vue par un ſyſtême du mouvement en général, d'une maniere auſſi claire qu'aiſée. Tout ce qu'on y donne ne

dépendant que de deux Theorêmes généraux connus de ceux qui ont traité du mouvement ; le reste en découle comme des conséquences nécessaires. Après avoir donné les premiers principes du mouvement dans un milieu sans résistance, on tâche de développer le rapport des forces qui poussent ou attirent les corps, c'est-à-dire, la force centripete qui tend vers un point fixe, ou dont les directions sont paralleles ; & pour mieux connoître l'usage de ce Problême, on donne des exemples de l'un & de l'autre cas dans les sections coniques.

La force centripete, qui tend vers un des foyers, étant toujours réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, les temps comme les espaces décrits par la ligne tirée du foyer au corps, & les quarrés des temps périodiques comme les cubes des distances moyennes, & si ces loix s'accordent parfaitement avec celles que Kepler avoit observées dans les Planetes, on a eu raison de conclure que les corps célestes décrivent des ellipses dans leurs révolutions autour du soleil, qui en occupe un des foyers. Cependant, malgré cette grande uniformité des loix observées par Kepler, & celles qu'on découvre dans l'*ellipse par la* théorie, quelques Mathématiciens ont douté s'il n'y avoit point d'autre courbe qui ait les mêmes propriétés que l'ellipse. Quoiqu'on en sentît assez l'impossibilité, on a néanmoins voulu donner l'inverse de ce problême ; sçavoir, la force centripete étant réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, l'on demande la nature de la courbe décrite par le corps, & l'on trouve encore que c'est une section conique, c'est-à-dire, une ellipse, ne pouvant être ni hyperbole, ni parabole, l'une & l'autre s'ouvrant à l'infini.

On a remarqué par les plus exactes observations que la parallaxe horizontale du soleil est de dix secondes & demie ; delà on trouve la distance moyenne de la terre au soleil exprimée en demi-diametres de la terre ; les distances moyennes des Planetes au Soleil exprimées par les mêmes rayons. Or connoissant les diametres apparens des Planetes, & leurs temps périodiques par observation, il est facile d'en connoître leurs vrais diametres aussi-bien que leur solidité & la densité de celles qui ont des Satellites ; car quant aux autres, on n'a pas encore découvert la méthode de les connoître.

Quoique nos principes soient généraux & applicables à toutes les différentes loix dont les forces centripetes peuvent être suf-

ceptibles, nous n'avons néanmoins donné des exemples que du seul cas, lorsqu'elles sont comme les quarrés de la distance inverse, qui est la seule qui ait lieu dans la nature, de peur d'abuser de la patience du lecteur qui cherche à s'instruire; c'est pourquoi, nous n'avons fait entrer dans ce petit ouvrage, que des questions qui sont ou fort utiles, ou très-essentielles; & nous pensons ne l'avoir pas peu obligé en lui épargnant & son temps, & la peine de lire un gros volume.

Depuis que le célebre Newton a proposé aux Philosophes la figure de la terre, cette recherche a été le principal objet d'étude des plus grands Géometres. Plusieurs ouvrages ont depuis paru sans qu'aucun ait pu encore s'accorder sur le rapport que l'équateur doit avoir avec l'axe; & il est fort étonnant que malgré les méditations de tant de célebres Mathématiciens, malgré les mesures des degrés de Méridiens dans plusieurs latitudes, & un nombre d'expériences presqu'infinie, sur la longueur des Pendules à secondes, qu'on a fait depuis quelque temps sous le cercle polaire & l'équateur, outre celles qu'on avoit déja faites en France & en Angleterre, il est, dis-je, étonnant qu'après tant de travaux, on se trouve encore dans la premiere incertitude. Voilà la raison pour laquelle nous croyons ne pouvoir rien mettre au jour qui mérite davantage l'attention du public que de déduire des principes les plus simples, la véritable figure de la terre, sans faire aucun usage du calcul des fluxions, dont tous les Auteurs se sont servis, excepté le seul Chevalier Newton.

Pour parvenir à trouver cette figure selon la méthode ordinaire, on cherche d'abord la force avec laquelle un corps placé sur la surface de la terre est attiré vers le centre; on se sert pour cet effet assez inutilement d'un calcul fort long & très-ennuyeux. Car dès qu'on accorde que la force centripete est en raison directe de la quantité de matiere qui attire, & en raison inverse des quarrés des distances, il est évident que si la distance est égale au demi-diametre du corps, l'attraction sera dans les solides semblables en raison directe de la distance; la solidité des corps semblables étant comme les cubes des demi-diametres, qui divisée par le quarré du même demi-diametre, donne pour quotient le demi-diametre en question, qui exprimera l'effort de la force centripete dans ce cas.

On cherche aussi la direction de la gravité à la surface d'une sphéroïde en repos, non seulement par un calcul encore plus

ennuyeux que l'autre, mais encore avec moins de raison. N'est-il pas évident par les loix de l'Hydrostatique, que la gravité agit toujours perpendiculairement à la surface de tout fluide ? Car placez de niveau avec un niveau d'eau, un plan bien poli, mettez un globe également poli sur ce plan, le globe restera en repos. Il est bien naturel par cette seule expérience de conclure que la gravité agit partout perpendiculairement à la surface de la terre. Or les autres Planetes, selon les sentimens des Philosophes modernes, étant composées de matiere à peu près semblable à celle de la terre, & peut-être en partie de fluide, ne peut-on pas conclure que la gravité agit perpendiculairement sur leurs surfaces, aussi-bien que sur celle de notre terre ?

Après avoir bien ennuyé le lecteur par ces longs *calculs*, on vient enfin au problême en question. Les Auteurs Anglois veulent que le rapport entre l'équateur & l'axe soit comme 231 à 230. M. Clairaut, qui a suivi leur méthode, trouve ou prétend trouver le même rapport. M. Bouguer s'imagine que ce rapport est comme 179 à 178 ; mais examinons un peu la maniere dont il se sert pour le trouver : il commence par rejetter *la section* elliptique de la terre ; il fait ensuite un grand nombre de suppositions sur l'accroissement des degrés du Méridien ; il adopte ensuite celui du quarré des sinus de latitude ; & sans s'embarrasser de la figure de la section, il trouve le rapport ci-dessus mentionné, qu'il dit être le seul qui soit véritable.

Mais si, en supposant ce rapport, ce Sçavant avoit confronté les degrés du Méridien, mesurés par ses Confreres sous le cercle polaire, & ceux mesurés en France & en Angleterre, il auroit immanquablement bientôt reconnu son erreur. De même, s'il avoit comparé la longueur du Pendule à secondes, qu'il dit avoir mesuré fort exactement, avec celles qu'on avoit observées dans d'autres latitudes, il auroit du s'appercevoir que la sienne ne s'accorde nullement avec les autres.

Quoiqu'il ne désigne pas la section méridienne de la terre, on voit cependant assez, par ce qu'il en dit, que c'est une spirale, puisque sa développée est ou un quart de cercle, ou une courbe, dont ce quart de cercle est la développée ; ainsi le lecteur peut juger si cet Auteur a raison ou non.

M. Clairaut (1) écrit, page 153 de son livre sur la figure de la terre, que le Chevalier Newton a trouvé le rapport entre l'équa-

(1) Voyez la réponse de cet Auteur à la fin de cet Ouvrage.

teur & l'axe de 230 à 229, sur la supposition que la section de la terre est une ellipse, sans l'avoir démontré : & à la page suivante, il dit : *J'ai cherché les moyens de connoître si en effet elle étoit légitime, & je suis parvenu à en prouver la vérité.* On croiroit à l'entendre qu'il est très-difficile de prouver que cette section est en effet une ellipse. Mais si l'on considére, comme l'a fait M. Newton, que les parties d'un fluide, étant attirées vers un point fixe avec des forces égales à des distances égales de ce point, ce fluide formera une sphere : supposez cette sphere tourner autour de son axe avec une certaine vîtesse, comparable à celle produite par la force centripete, les rayons des cercles paralleles à l'équateur, s'alongeront proportionnellement à leur longueur : cela étant, voilà l'ellipse démontrée en tout son jour ; & si le Chevalier Newton ne l'a pas démontrée lui-même, c'est qu'il l'a cru si simple & si palpable, que cela devoit sauter aux yeux de tout le monde.

Mais venons au principal, M. Clairaut suppose d'abord, page 191, que la force centrifuge sous l'équateur est la 289me partie de la gravité primitive, & delà il trouve la différence entre les axes de $\frac{10}{2304}$; ce qui donne le rapport entre les axes de 2314 à 2304, ou de 463 à 461, en l'exprimant par trois figures ; & ce rapport ne s'accordant absolument point avec celui donné par Messieurs Maclaurin & Simpson, qu'il suit dans son calcul, il le suppose être comme 231 à 230, & cherche la force centrifuge, qu'il trouve n'être que la 287. 5me partie de la gravité primitive. Mais n'est-ce pas supposer ce que l'on cherche ? puisque l'équation qu'il donne page 192, exprime le rapport entre la différence des axes & de la force centrifuge, comme 5 à 4 à peu près. Or s'il fait le rapport entre les axes de 231 à 230, il suppose en même temps le rapport entre la force centrifuge & la gravité sous l'équateur de 287. 5 à l'unité : il étoit donc fort inutile de faire la recherche de la force centrifuge par de longs détours, comme il fait dans les deux pages suivantes. Pour faire voir que le rapport entre les axes déterminé par ce Sçavant, & en même temps par les Auteurs Anglois mentionnés ci-dessus, n'est point du tout le véritable ; il suffit de jetter les yeux sur la page 194 de son Livre, où il trouve le degré du Méridien sous l'équateur de 57309 toises, ce qui surpasse ce même degré, mesuré par Messieurs Bouguer & Condamine, de 556 toises. S'il admet que ses Confreres se soient si fort trompés dans leurs

mesures, que doit-on croire des mesures du Nord, auxquelles il étoit lui-même employé ? Mais on fait voir dans cet ouvrage qu'ils ont été plus heureux dans leurs mesures que dans la recherche sur le rapport des axes.

La seconde partie de ce petit Traité contient les loix du mouvement dans un milieu, dont la résistance suit la loi des vîtesses élevée à une puissance quelconque ; & la supposition que la résistance est comme le quarré des vîtesses, étant peut-être la seule qui soit vraie, du moins dans l'air, l'application qu'on fait roule principalement sur cette supposition : mais d'ailleurs nos principes étant généraux, on peut les appliquer à telle hypothese qu'on voudra.

Lorsqu'il s'agit du mouvement dans un milieu résistant, il se trouve toujours une quantité indéterminée, que l'on doit connoître avant que de parvenir à la résolution des problêmes ; quelle est, par exemple, la hauteur d'où le corps en question doit tomber dans ce milieu pour y acquérir sa plus grande vîtesse possible. Le Chevalier Newton a été le seul, que je sçache, qui ait donné la solution de ce problême, dans la quarantieme proposition du second livre de ses Principes ; mais comme elle dépend de plusieurs théorêmes fort difficiles, on en donne une démonstration fort simple dans cet ouvrage. On commence par les exemples les plus simples, sur les mouvemens des corps qui tombent ou qui sont jettés ; & afin d'en mieux comprendre les principes, on suppose d'abord les corps jettés verticalement en haut, ensuite on cherche la propriété du projectile, lorsque la résistance est comme le quarré des vîtesses, dont on donne la portée, le point le plus haut, la vîtesse & le temps employé. Et enfin on s'attache à démontrer tout ce qu'il y a d'essentiel dans ce sujet d'une maniere si aisée que le lecteur ne peut manquer de l'entendre parfaitement avec une application fort modérée.

Il n'y a point, à mon avis, de problême qui soit plus difficile dans toute la Méchanique, que celui des projectiles ; l'équation fluxionaire de cette courbe étant si difficile à résoudre, qu'il faut employer tout ce que la Géométrie & l'Algebre peuvent fournir de plus recherché. Car on ne peut exprimer la fluente de cette fluxion par un nombre fini de termes, ni par la quadrature des sections coniques. Il n'y a donc par conséquent point d'autre moyen que de l'exprimer par une suite infinie, ou par la méthode des différences du Chevalier Newton. Mais l'une & l'autre

de ces méthodes est sujette à de grands inconvéniens ; car ceux qui l'ont exprimée par des suites infinies, comme l'a fait M. Euler, n'ont pas pris garde que ces suites ne convergent que fort lentement, & qu'il faut beaucoup plus de termes qu'ils en ont donnés dans des certains cas, & dans beaucoup d'autres elles ne convergent point du tout. Ainsi cette méthode ne peut être que de très-peu d'usage, du moins de la maniere qu'on l'a publiée. En se servant de la méthode des différences ; comme M. Simpson a fait, & dont George Campbell dit être l'Auteur, on ne peut trouver la portée entiere qu'en tâtonnant ; ce qui coûte beaucoup de temps & de travail inutile : mais d'ailleurs cette méthode a encore d'autres défauts plus considérables ; sçavoir, qu'on ne peut point trouver la portée lorsque l'objet est au dessus ou au dessous de l'horison ; ce qui est cependant fort nécessaire, puisqu'il n'entre que très-rarement dans la pratique que l'objet soit placé exactement dans le niveau avec la batterie. De plus, lorsque la distance de l'objet est donnée, & que l'on veut sçavoir quel angle d'élévation il faut pour atteindre cet objet, on ne le sçauroit trouver par méthode.

On donne ici trois manieres différentes de résoudre la plûpart de ces problêmes : la premiere, par des suites infinies, lorsque l'origine des co-ordonnées est au commencement de la courbe où le mortier est placé, mais modifiées de maniere qu'elles convergent dans tous les cas possibles : la seconde, par la méthode des différences, & on a eu soin d'insérer une petite table par le moyen de laquelle les opérations numériques sont beaucoup abrégées : la troisieme est encore par des suites infinies, mais dont l'origine des co-ordonnées commence au sommet, ou le plus haut point de la courbe. On a donné des exemples numériques de l'une & l'autre maniere, tant pour faire voir que l'une & l'autre mene au même but, que pour laisser la liberté de l'application au lecteur, selon qu'il le jugera à propos, étant certain qu'il peut y avoir des cas où l'une pourroit être plus aisée que l'autre.

Le Traité est terminé par quelques problêmes touchant les Pendules qui font leurs oscillations dans des cycloïdes, lorsque la résistance est comme le quarré des vîtesses, ou comme les vîtesses simples ; pour confirmer ce que le Chevalier Newton a dit là-dessus dans le second Livre de ses Principes, sur quoi quelques Auteurs avoient cru qu'il s'étoit trompé.

PREMIERE PARTIE.

Du Mouvement dans un milieu sans résistance.

THEOREME.

1. *La fluxion de la vîtesse d'un corps mis en mouvement par une force quelconque qui varie selon quelque loi, est à la fin d'un tems donné, comme le rectangle fait par cette force à la fin de ce tems & la fluxion du tems écoulé.*

Car il est clair que cette force imprime plus ou moins de vîtesse au corps dans des tems égaux, selon qu'elle est plus grande ou moindre pendant ce tems; & comme l'action de la force sur le corps est continuelle, soit qu'il soit en mouvement ou en repos, par supposition, & que les effets sont proportionnels à leurs causes, il est évident que les degrés de vîtesse imprimés à chaque instant, sont comme les causes qui les a produites, & la somme totale de tous les degrés de vîtesse, ou la vîtesse acquise pendant un tems donné, est comme la somme totale de tous les effets de la force motrice.

Fig. 1. Si l'abscisse A P exprime donc le tems, & que A B soit à P M, comme la force au commencement du mouvement est à la force à la fin du tems A P, & si la courbe B M est le lieu du point M, l'espace A B M P, exprimera la somme de tous les efforts de la force pendant le tems A P, & par conséquent la vîtesse acquise dans ce tems. Or comme la fluxion de cet espace est égal au rectangle fait par l'appliquée P M, & la fluxion de l'abscisse A P, la fluxion de la vîtesse du corps sera comme le rectangle fait par la force, & la fluxion du tems écoulé.

THEOREME.

2. *La fluxion de l'espace parcouru par un corps avec une vîtesse quelconque qui varie selon quelque loi donnée, est comme le rectangle fait par la vîtesse à la fin du tems, & la fluxion du tems écoulé.*

Car il est clair que le corps parcourra des espaces plus ou moins grands dans des tems égaux, selon que cette vîtesse est

plus ou moins grande dans ces tems. Or si l'on suppose le tems divisé en des momens ou instans égaux, les espaces parcourus dans chacun de ces instans, seront comme les vîtesses, & la somme totale des espaces parcourus sera comme la somme totale des vîtesses pendant ce tems.

Ainsi, si A B est à P M, comme la vîtesse au commencement du mouvement est à la vîtesse à la fin du tems A P, l'espace A B M P exprimera la somme de toutes les vîtesses, & par conséquent l'espace parcouru pendant le tems A P. Par conséquent la fluxion de l'espace parcouru par un corps est comme le rectangle fait par la vîtesse P M à la fin du tems, & la fluxion du tems écoulé A P.

COROLLAIRE I.

3. Delà il suit que si p exprime la force, v la vîtesse acquise dans le t, & s l'espace parcouru, en supposant les quantités qui forment l'égalité entre les fluxions ci-dessus, égales à l'unité qu'on déterminera ci-après, on aura $\dot{v} = p\dot{t}$ par l'article 1, & $\dot{s} = v\dot{t}$ par l'article 2; & en multipliant les deux équations ensemble, afin de détruire $\dot{t}$, on aura $p\dot{s} = v\dot{v}$, & si $\dot{t}$ est pris pour constant, la fluxion de l'égalité $\dot{s} = v\dot{t}$, donnera $\ddot{s} = \dot{v}\dot{t}$, laquelle étant multipliée par $\dot{v} = p\dot{t}$, afin de détruire $\dot{v}$, donnera $\ddot{s} = p\dot{t}\dot{t}$.

Voilà les équations qui servent à déterminer les loix du mouvement en géneral dans toutes sortes de cas, soit que p exprime la gravité des corps ou une force centripete, comme on verra dans la suite.

COROLLAIRE II.

4. Si l'on suppose la vîtesse v constante, comme dans le mou- *Fig. 2.*
vement uniforme, la ligne courbe B M devient une droite, comme F C dans la seconde figure, parallele à A B; & la fluente de l'équation $\dot{s} = v\dot{t}$, sera $s = vt$ égal au rectangle F B. Ce qui fait voir que les espaces parcourus uniformément avec la même vîtesse, sont comme les tems écoulés depuis le commencement du mouvement; & les espaces parcourus avec des vîtesses uniformes dans le même tems, comme les vîtesses; & enfin lorsque les tems & les vîtesses sont inégales, les espaces parcourus sont dans la raison composée des tems & des vîtesses.

COROLLAIRE III.

5. Si la force p eſt conſtante, comme la gravité des corps proche la ſurface de la terre, la ligne courbe B M deviendra une ligne droite, comme A C, fig. 2, qui fait un angle donné avec la baſe A B, & rencontrera cette ligne au point A, ſi le corps commence ſon mouvement au point de repos : or les fluentes des équations $p\dot{t} = \dot{v}$, $p\dot{s} = v\dot{v}$, donnent $pt = v$, & $2ps = vv$: ce qui fait voir que ſi la baſe A B d'un triangle exprime le tems, & la perpendiculaire B C la vîteſſe, & ſi d'un point D quelconque dans la baſe, on tire D E parallele à B C, le tems A B ſera au tems A D, comme la vîteſſe B C, à la fin du tems A B eſt à la vîteſſe D E, à la fin du tems A D. Et comme $2ps = vv$, les eſpaces parcourus A D E, A B C, ſont comme les quarrés des vîteſſes B C & D E, ou comme les quarrés des tems A B & A D.

COROLLAIRE IV.

6. Il eſt manifeſte que l'eſpace parcouru par un corps qui tombe du point de repos, eſt la moitié de l'eſpace parcouru *dans le* même tems avec une vîteſſe uniforme, & égale à celle que le corps aura acquiſe en tombant. Car ſi A B exprime le tems, & B C la vîteſſe acquiſe en tombant, il eſt évident que l'eſpace parcouru avec une vîteſſe uniforme & égale à B C, ſera exprimé par le rectangle B F, qui eſt double du triangle A B C, *qui* exprime l'eſpace parcouru en tombant.

COROLLAIRE V.

7. Si l'on ſuppoſe le tems t donné, & égal à l'unité, comme par exemple d'une ſeconde, l'équation $2s = ptt$, donnera $2s = p$, ce qui fait voir que les gravités des corps, dans différentes latitudes, ſont comme le double des eſpaces parcourus dans une ſeconde, en tombant depuis le point de repos. Car il faut remarquer que quoiqu'on ſuppoſe communément que la gravité qui anime les corps eſt de même par toute la ſurface de la terre, elle differe néanmoins dans differentes latitudes, comme l'expérience l'a fait voir : car on a trouvé que les Pendules à ſecondes ſont plus courts vers l'équateur que vers les pôles ; ce qui ne pourroit être, à moins que la gravité ne ſoit moindre ſous l'équateur qu'ailleurs, comme nous le ferons voir ci-après.

COROLLAIRE VI.

8. Si h exprime la hauteur de la chûte dans une ſeconde de tems, dans une latitude donnée, on aura $2h = p$, par le dernier corollaire ; & comme $2sp = vv$, & $2s = 2ptt$, en mettant la valeur de p, on aura $4sh = vv$, & $s = tth$, ou $\frac{s}{h} = tt$.

D'où l'on tire les deux

REGLES GENERALES.

I. *Pour trouver la diſtance qu'un corps peut parcourir uniformément dans une ſeconde de tems avec une vîteſſe donnée.*

Prenez le double de la racine quarrée du produit de la hauteur de la chûte dans une ſeconde, depuis le point de repos, & celle que le corps doit avoir pour acquérir la vîteſſe donnée, & vous aurez la diſtance cherchée.

II. *Pour avoir le tems de la chûte d'un corps exprimé en ſecondes.*

Diviſez la hauteur de la chûte par celle que le corps a dans une ſeconde depuis le point de repos, & la racine quarrée donnera le tems exprimé en ſecondes.

EXEMPLE.

9. Suppoſant qu'un corps tombe de la hauteur de 15. 0979 pieds de France dans la latitude de Paris, l'on demande l'eſpace que le corps parcourra uniformément dans une ſeconde, avec une vîteſſe acquiſe en tombant de la hauteur de 5280 pieds. On aura $h = 15.0979$, $s = 5280$, & par conſéquent la racine quarrée 282. 34, du produit 79716. 912, étant multipliée par 2, donnera 564. 68 pieds, que le corps parcourra dans une ſeconde avec cette vîteſſe uniformément continuée.

Pour avoir le tems que le corps a employé en tombant de la hauteur de 5280 pieds, cette hauteur étant diviſée par (h) 15. 0979, donne 349. 72, dont la racine quarrée donne 18. 7 ſecondes, pour le temps que le corps a employé en tombant de la hauteur de 5280 pieds dans la latitude de Paris.

REMARQUE.

Comme nous avons démontré les premiers principes des fluxions par le moyen des loix du mouvement, dans notre Traité

analytique, on pourroit dire que je suppose ce que je cherche; mais ce que je viens de dire du mouvement uniforme, qui est la seule partie du mouvement employé dans la démonstration des fluxions, n'est seulement que pour faire voir l'universalité des deux premiers theorêmes, & n'est nullement appliqué dans ce que nous dirons dans ce Traité-ci. D'ailleurs nous avons fait voir dans une addition au Traité analytique, que les principes des fluxions peuvent être démontrés sans les loix du mouvement: ainsi ceux qui ne seront point satisfaits de ce que nous venons de dire, peuvent regarder ce que nous avons dit dans le quatrieme article, comme n'étant d'aucun usage.

PROBLEME GENERAL
POUR LES FORCES CENTRIPETES.

Fig. 3.

10. *Si un corps jetté dans une direction donnée* A E *avec une vîtesse donnée, est attiré vers un point fixe* C, *par une force* P *quelconque, dont la fonction est exprimée par les distances* C M *de ce point & des constantes, l'on demande la nature de la courbe* A M *décrite par ce corps.*

Soient tirées C E, C S, perpendiculaires aux tangentes en A & M, & d'un point quelconque T dans la tangente en M, la ligne T R perpendiculaire au rayon C M. Cela posé, si C M $= y$, C S $= s$, & l'arc A M $= z$, on aura M T $= \dot{z}$, M R $= \dot{y}$, T R $= \dot{x}$; & si v exprime la vîtesse en M, t le tems écoulé, on aura

Art. 2. * $\dot{z} = v\,\dot{t}$.

Or comme la force P dans la direction C M, est à son effet dans la direction de la tangente M T, comme C M est à M S, ou à cause des triangles semblables C M S, T R M, comme T M est à M R, cet effet sera donc exprimé par $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} \times$ P, & par consé-

Art. 1. quent $\times \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \times P \times \dot{t} = \dot{v}$, ou en mettant la valeur de $\dot{t}$ prise dans $\dot{z} = v\,\dot{t}$, on aura $P\dot{y} = v\dot{v}$.

La force P dans la direction C M est à son effet dans la direction C S perpendiculaire à la tangente M T, comme C M est à C S; cet effet sera donc exprimé par $\frac{s}{y}$ P: mais cette force doit être appliquée à l'extrêmité T du levier M T, ou de $\dot{z}$; & comme le rayon M S est au rayon M T, comme la fluxion $\dot{s}$ de l'arc décrit par le rayon M S, est à la fluxion de l'arc décrit par le rayon M T, ou à l'espace décrit par la force dans la direction

perpendiculaire à la tangente MT, & que CM : MS : : MT : MR, on aura $\frac{y\dot y}{\dot z}$ = MS ; & MS : MT, ou $\frac{y\dot y}{\dot z} : \dot z :: \dot s : \frac{\dot z^2 \dot s}{y\dot y}$ = à l'espace décrit par la force dans la direction CS. Or comme cet espace est décrit dans le même tems que $\dot z$, il doit être une seconde fluxion à l'égard de $\dot z$, ainsi * $\frac{s}{y} P \times \dot t\, \dot t = \frac{\dot z^2 \dot s}{y\dot y}$, ou en mettant la valeur de $\dot t$ prise dans $\dot z = v\dot t$, on aura $Ps\dot y = \dot s vv$. Par conséquent la fonction de la force P étant exprimée par les distances y & des constantes, on trouvera la valeur de vv, par le moyen de l'équation $P\dot y = v\dot v$, laquelle étant comparée avec celle dans l'équation $Ps\dot y = \dot s vv$, donnera l'équation de la courbe cherchée, comme on verra ci-après. * Art. 3.

REMARQUES.

I. Lorsque $\dot y$ & $\dot v$, ou ce qui revient au même, lorsque y & v augmentent, ou diminuent ensemble, on aura toujours $P\dot y = v\dot v$; mais si l'une de ces quantités augmente pendant que l'autre diminue, on aura $-P\dot y = v\dot v$.

II. Lorsque $\dot y$ & $\dot s$, ou y & s augmentent ensemble, on aura toujours $Ps\dot y = \dot s vv$; mais si l'une de ces quantités augmente pendant que l'autre diminue, on aura $-Ps\dot y = \dot s vv$.

III. Enfin l'équation $P\dot y = v\dot v$ fait voir que les vîtesses sont toujours égales à des distances égales du centre C au corps, quelque figure que le corps puisse décrire, soit une ligne droite ou courbe.

Il est nécessaire de se souvenir de ces remarques dans la suite, autrement les expressions des vîtesses & des tems ne seront pas celles que l'on cherche, & l'équation de la courbe ne sera pas celle que l'on demande.

COROLLAIRE I.

11. Puisque $Ps\dot y = \dot s vv$, & $P\dot y = v\dot v$, dans la figure présente, la derniere égalité étant multipliée par la premiere, afin de détruire P, donnera $-s\dot v = v\dot s$, ou $v\dot s + s\dot v = 0$, dont la fluente est $vs = A$. Or si CE $= d$, lorsque v devient égale à la vîtesse donnée c, on aura $s = d$: partant $dc = A$, dans ce cas ; & par conséquent l'équation $vs = A$, deviendra $vs = cd$. Ce qui fait voir que *les vîtesses v sont partout réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires* CS, CE, *tirées du centre* C *aux*

tangentes qui passent par le centre du corps, quelle que puisse être la force centripete P.

COROLLAIRE II.

12. Comme $\dot{z} = v\dot{t}$, & $vs = cd$, on aura $s\dot{z} = cd\dot{t}$, en multipliant également, & comme CM : CS :: TM : TR, ou $y\dot{z} = s\dot{z}$; en mettant cette valeur de $s\dot{z}$ dans la derniere équation, on aura $y\dot{z} = cd\dot{t}$. Mais $y\dot{x}$ est la fluxion d'un espace double de CAM, il viendra donc $2\,CAM = cdt$. Ce qui fait voir *que les tems sont toujours comme les espaces décrits par le rayon* CM *tiré du point fixe* C *au centre du corps, quelle que puisse être la force centripete* P.

COROLLAIRE III.

13. Si l'on suppose que le centre C s'éloigne du sommet A à une distance infinie, de sorte que les directions CM, CA, de la force P, deviennent infinies & égales, en nommant $CA = a$, & le rayon étant au sinus de l'angle CAE, comme l'unité est à k, on aura $y = a$ dans ce cas, & $d = ak$; & comme $s\dot{z} = \dot{x}y$ devient ici $s\dot{z} = a\dot{x}$, ou $= \frac{a\dot{x}}{\dot{z}}$; en supposant $\dot{x}$ constante, la fluxion de cette égalité sera $-\dot{s} = \frac{a\dot{x}\ddot{z}}{\dot{z}^2}$. Les valeurs de s & de $\dot{s}$ étant substituées dans les équations $s\dot{z} = cd\dot{s}$, $ve = cd$, & $Ps\dot{y} = \dot{s}vv$, elles deviendront $\dot{x} = ck\dot{s}$, ou $x = ckt$, $\dot{x}v = ck\dot{z}$, & $-P\dot{y}\dot{z} = vv\ddot{z}$, ou $P\dot{y}\dot{z} + vv\ddot{z} = 0$, parce que $\dot{y}\ddot{y} = \dot{z}\ddot{z}$, lorsque $\dot{x}$ est constante.

Comme les déductions qu'on vient de faire dans ce dernier corollaire, peuvent paroître un peu obscures à quelques lecteurs, par rapport à l'expression *infinie* dont on s'est servi, on va démontrer la même chose dans le problême suivant, afin de ne rien obmettre de ce qui pourroit paroître nécessaire aux commençans, & qui peut éclaircir le sujet.

PROBLEME.

Fig. 4. 14. *Si un corps jetté du point* A *dans la direction* AE, *donnée avec une vîtesse donnée* c, *est partout poussé ou attiré par une force quelconque* P *dans des directions paralleles, l'on demande la nature de la courbe décrite par ce corps.*

Soit AB perpendiculaire aux directions PM de la force P, & d'un

d'un point quelconque T dans la tangente en M, soit tirée TR perpendiculaire à PM, & enfin du point R, la ligne RS perpendiculaire à MT : cela posé, si $AP = x$, $PM = y$, l'arc AM $= z$, on aura $TM = \dot{z}$, $MR = \dot{y}$, & $TR = \dot{x}$.

Puisque la force P dans la direction PM est à son effet dans la direction de la tangente MT, comme RM est à MS, ou à cause des triangles semblables RSM, TRM, comme MT est à MR; cet effet sera exprimé par $\frac{\dot{y}}{\dot{z}}P$, & par conséquent * $\frac{\dot{y}}{\dot{z}}P \times \dot{t} = -\dot{v}$, ou $-P\dot{y} = v\dot{v}$, parce que $\dot{z} = v\dot{t}$. * Art. 11

La force P dans la direction PM, est à son effet dans la direction RS perpendiculaire à la tangente, comme MR est à RS, ou comme MT est à RT, (cet effet sera exprimé par $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}P$). Or comme cet effet retient le corps dans la courbe, & l'empêche de suivre la direction de la tangente, il doit être appliqué à l'extrémité de la fluxion MT de la courbe; ainsi en nommant r le rayon de courbure en M, on aura, à cause de l'angle droit que ce rayon fait avec la tangente, le rayon r est au rayon MT, comme la fluxion $\dot{z}$ de l'arc décrit par le rayon r est à la fluxion $\frac{\dot{z}^2}{r}$ de l'arc décrit par le rayon MT, ou l'espace décrit par la force $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}$; & comme cet espace est décrit en même tems que la fluxion $\dot{z}$, il doit être une seconde fluxion à l'égard de z. Donc * $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}P \times \dot{t}\dot{t} = \frac{\dot{z}^2}{r}$, ou $P\dot{x}r = vv\dot{z}$, parce que $\dot{z} = v\dot{t}$. Mais lorsque $\dot{x}$ est constante, on aura * $-r = \frac{\dot{y}\dot{z}^2}{\dot{x}\ddot{z}}$; cette valeur étant mise dans la derniere équation, donnera $-P\dot{y}\dot{z} = vv\ddot{z}$, ce qui est précisément la même équation, aussi-bien que $-P\dot{y} = v\dot{v}$, que celles que nous avions trouvée dans le dernier corollaire. * Art. 3. * Art. 194.

COROLLAIRE I.

15. Si l'équation $-P\dot{y}\dot{z} = vv\ddot{z}$ est multipliée par l'équation $P\dot{y} = v\dot{v}$, afin de détruire P, on aura $\dot{z}\dot{v} = v\ddot{z}$, ou $\dot{z}\dot{v} - v\ddot{z} = 0$, dont la fluente est $\frac{v}{\dot{z}} = A$, ou à cause que $\dot{x}$ est constante, cette fluente doit être $\frac{v\dot{x}}{\dot{z}} = A$. Or si le rayon est au sinus de l'angle d'élévation PAE, comme l'unité est à k, lorsque la vîtesse v devient la vîtesse projectile c, on a $\dot{z} : \dot{x} :: 1 : k$, ou $k\dot{z}$

$=\dot{x}$; cette valeur de $\dot{x}$ étant substituée dans $\frac{v\dot{z}}{\dot{x}}=A$, donnera $ck=A$; & en mettant cette valeur de A dans la même équation, on aura $v\dot{x}=ck\dot{z}$. Et en mettant la valeur de v prise dans $\dot{z}=vt$, dans la derniere équation on aura $\dot{x}=ck\dot{t}$, dont la fluente est $x=ckt$, ce qui donne encore les mêmes équations que ci-dessus.

COROLLAIRE II.

16. Puisque $\dot{x}v=ck\dot{z}$, on aura au sommet D, ou $\dot{z}=\dot{x}$, $v=ck$, pour la vîtesse en ce point. D'où il suit, que si un corps est jetté du point A avec une vîtesse, & une autre du sommet D dans une direction horizontale, ensorte que ces deux corps décrivent le même arc DK, il faut que la vîtesse du premier soit à la vîtesse du second, comme le rayon est au sinus k de l'angle de projection PAE.

Et comme $x=ckt$, lorsque t exprime le tems de la description de la courbe entiere ADK, laquelle est double de la partie DM, dans un milieu sans résistance, il faut diviser t par 2, ou multiplier son égal par 2, pour avoir $2x=ckt$, lorsque le corps est jetté de D, ou $2x=ct$, lorsque c exprime la vîtesse au sommet D.

On peut déduire la même chose de l'expression $2CAM=cdt$; car lorsque les directions sont paralleles, on a $x=y$, & $y\dot{x}=a\dot{x}$; donc $CAM=ax$, & $2x=ct$, parce que $d=a$, par supposition.

COROLLAIRE III.

17. En quarrant l'équation $\dot{x}v=ck\dot{z}$, on a $\dot{x}^2v^2=cckk\dot{z}^2$, ou à cause que $\dot{z}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$, il viendra $\dot{x}^2v^2=cckk\times\overline{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, d'où l'on tire $ck\dot{y}=\dot{x}\sqrt{vv-cckk}$, pour l'équation générale de la courbe, lorsque les directions de la force P sont paralleles, laquelle exprimera le rapport entre les abscisses & appliquées correspondantes, lorsque la force P est donnée, parce que le rapport des vîtesses c & v sera donné aussi.

EXEMPLE.

18. Soit la force P constante & égale à p, on aura $-p\dot{y}=v\dot{v}$, * dont la fluente est $A-2py=vv$, & au point A, ou

* Art. 10.

$v = c$, y sera $= o$, ce qui donne $A = cc$, & par conséquent $cc - 2py = vv$: cette valeur de vv étant mise dans l'équation générale, donne $cky = x\sqrt{ccll - 2py}$, en supposant l le cosinus de l'angle PAE, ou $1 - kk = ll$, dont la fluente est, $Ap - ck\sqrt{ccll - 2py} = px$: or au point A, $y = x = o$, donc $Ap = cckl$, par conséquent $cckl - ck\sqrt{ccll - 2py} = px$, sera l'équation de la courbe cherchée.

COROLLAIRE IV.

19. Si h exprime la hauteur d'où un corps doit tomber pour acquérir la vîtesse c, on aura * $2ph = cc$; par conséquent, si la quantité sous le signe est mise dans un membre de l'équation, & les autres termes dans l'autre, & que l'on mette au lieu de cc sa valeur dans le quarré de l'équation, on aura $4hkky = 4hklx - xx$, après la réduction faite pour l'équation de la courbe, laquelle est la parabole ordinaire. * Art. 5.

COROLLAIRE V.

20. En faisant $y = o$, dans la derniere équation, on aura $AK = x = 4hkl$; ce qui fait voir que les portées horizontales, tirées avec la même charge à h, sont entr'elles comme le sinus $2kl$ des angles doubles de ceux des élévations ; & les portées, tirées sous un même angle d'élévation, sont comme les hauteurs h, desquelles un corps doit tomber pour acquérir les vîtesses de projection.

COROLLAIRE VI.

21. En faisant $\dot{y} = o$, on aura $AB = x = 2hkl$, pour l'abscisse qui correspond à la plus grande appliquée BD, & qui par conséquent est la moitié de la partie horizontale, & l'appliquée $BD = hll$. La troisieme proportionnelle à BD & AB, donne $4hkk$ pour le parametre de l'axe BD ; & si F est le foyer, on a $DF = hkk$, par la nature de la parabole, de même $AF = BD + DF = h$, parce que $ll + kk = 1$, & $AF - MP = FM = h - y$. Par conséquent $2p \times MF = vv$.

COROLLAIRE VII.

22. Delà il suit que si la hauteur h est un mille d'Angleterre,

c'est-à-dire, si $h = 5280$ pieds Anglois, & l'angle d'élévation 45 degrés, on aura $l = k$, & $2kl = 1$; ainsi $AB = 2hkl = 5280$, $BD = DF = 2640$; & comme $x = ckt$, $x = 2h$, $c = \sqrt{2hp}$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura $2h = x\sqrt{hp}$; par conséquent, si * $p = 32.2$, on trouvera le tems t, de 25. 6 secondes, & la vîtesse c au point D, telle qu'elle parcourra une espace de 412 pieds par secondes par un mouvement uniforme.

* Art. 25.

EXEMPLE.

Fig. 51

23. Soit la courbe AME la cycloïde ordinaire, & ANB la moitié de son cercle générateur, dont la propriété est telle, qu'en tirant une perpendiculaire PM, à l'axe AB, la partie NM, terminée par le cercle & la courbe, est toujours égal à l'arc correspondant AN du cercle générateur; & par conséquent la base BE égale à la demi-circonférence. En faisant $AB = a$, $AP = y$, & que l'on suppose que le corps commence son mouvement en E, par la gravité p, on aura * $v = \sqrt{2ap - 2pq}$, pour la vîtesse au point M, & $c = \sqrt{2ap}$, pour celle au point le plus bas A; & comme * $2x = ct$, il viendra $2x = t\sqrt{2ap}$, ou en quarrant $2xx = aptt$.

* Art. 5.

* Art. 6.

Or comme x exprime la moitié de la circonférence dans la description de la demi-cycloïde AE, elle exprimera la circonférence entiere dans la description de la courbe entiere; en faisant $r = 3.14159$, &c. on aura $ra = x$, ce qui donne $2arr = ptt$.

COROLLAIRE VIII.

24. Puisque la longueur d'un Pendule qui décrit une cycloïde est double du diametre de son cercle générateur, il est évident que cette longueur est comme la gravité p, dans un tems donné, & que les quarrés des tems, sont dans la raison directe des longueurs & de la gravité inverse. Par conséquent la longueur d'un Pendule à secondes étant donnée dans une latitude quelconque, la hauteur d'où un corps tombera dans une seconde sera aussi donnée.

EXEMPLE.

25. Le Chevalier Newton & le Docteur Halley ont fait des

expériences sur la longueur d'un Pendule à secondes dans la latitude de 51°, 32' Londres, & ils ont trouvé :

La longueur d'un Pendule { à secondes { 39. 125. Halley. 39. 207. Newton. à $\frac{1}{2}$ secondes { 9. 781. Halley. 9. 801. Newton.

en pouces d'Angleterre ; & comme $r = 3.14159$, &c. on aura $rr = 9.8696$; & en mettant cette valeur dans $2arr = ptt$, il viendra $9.8696a = ptt$; en supposant que p exprime l'espace simple parcouru dans une seconde, & non pas double comme ci-devant.

Si à présent l'on fait $2a = 39.125$, & que le tems soit l'unité, on aura $p = 193.074$ pouces ; & si $2a = 39.207$, on trouvera $p = 193.4787$. Si à présent l'on suppose le tems d'une demi-seconde, on aura $39.4784a = p$; & si $2a = 9.781$, on aura $p = 193.0591$; & si $2a = 9.801$, on trouvera $p = 193.46393$ en prenant un milieu entre les quatre valeurs de p, on aura $p = 193.2689$ pouces, ou 16. 1057 pieds d'Angleterre, pour la hauteur de la chûte dans une seconde, dans la latitude de 51°, 32'.

Comme la longueur d'un Pendule à secondes, dans la latitude de 40°, 50' de Paris, est de $440\frac{17}{30}$ lignes, suivant les observations de M. de Mairan ; en faisant $2a = 440\frac{17}{30}$, l'équation $9.8696a = p$, donnera $p = 2174.1084$ lignes, ou 15. 0979 pieds pour la hauteur tombée à Paris.

Pour avoir le rapport entre la gravité dans les latitudes de Londres & de Paris, il faut réduire la mesure d'Angleterre à celle de Paris, qui sont comme 114 à 107, selon les dernieres expériences faites par les Messieurs de l'Académie Royale des Sciences à Paris, & ceux de la Société Royale de Londres, ce qui donne 15. 1167 pieds de France pour la hauteur de la chûte à Londres dans une seconde de tems. Par conséquent la gravité à Londres est à la gravité à Paris, comme 151167 est à 150979, ou comme 804 est à 803, ou bien comme 100000 est à 100124.

REMARQUE.

Il faut observer qu'un Pendule parcourt un arc quelconque de la cycloïde dans le même tems qu'il parcourt toute la cycloïde. Car si $AP = d$, & que y exprime une partie du diametre moindre que AP, on aura $v = \sqrt{2pd - 2py}$, & comme

* Art. 2. $\dot{z} = \frac{a\dot{y}}{\sqrt{ay}}$ par la propriété de la cycloïde, l'équation * $\dot{z} = v\,t$, donne $\frac{a\dot{y}}{\sqrt{dy-yy}} = t\sqrt{2ap}$. Or comme $\frac{\frac{1}{2}d\dot{y}}{\sqrt{dy-yy}}$ exprime la fluxion d'un arc de cercle x, dont le diametre est d, & l'abscisse y, on aura $\frac{2a\dot{x}}{d} = t\sqrt{2ap}$; & lorsque $y = 0$, on aura $x = dr$, & ainsi $2ar = t\sqrt{2ap}$, ou en quarrant $2arr = ptt$, comme ci-dessus.

EXEMPLE I.

Fig. 6. 26. *Soit la courbe* A M *la parabole ordinaire, le point fixe* C *le foyer, l'on demande la valeur de la force centripete* P, *telle que le corps puisse décrire cette courbe.*

Soit la distance A C $= a$, du sommet au foyer, C M $= y$, C T $= s$, comme ci-devant, on aura $s = \sqrt{ay}$, par la propriété de la parabole; en mettant cette valeur de s dans * $v\,s = c\,d$, on aura $v\sqrt{ay} = ac$, parce que d est ici $= a$, ou $vv = \frac{acc}{y}$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{acc\dot{y}}{2yy}$; & cette valeur étant mise dans * $-P\dot{y} = v\dot{v}$, donne $P = \frac{acc}{2yy}$. Ce qui fait voir *que cette force doit être réciproquement comme le quarré des distances du foyer au corps.*

* Art. 11.

* Art. 14.

EXEMPLE II.

Fig. 7. 27. *Soit la courbe une ellipse, & le point fixe* C *un de ses foyers, l'on demande la valeur de la force centripete* P.

Soient a & b, les demi-premier & second axes, on aura C T $= s = \frac{by}{\sqrt{2ay-yy}}$, par la propriété de l'ellipse; cette valeur étant mise dans l'équation * $v\,s = c\,d$, donne $c\,d\sqrt{2ay-yy} = b\,y\,v$, ou en quarrant $vv = \frac{ddcc}{bb} \times \frac{2a-y}{y}$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{addcc\dot{y}}{bbyy}$; par conséquent $-P\dot{y} = v\dot{v}$, donnera $P = \frac{addcc}{bbyy}$. Ce qui fait voir *que cette force est réciproquement comme le quarré des distances du foyer au corps.*

* Art. 14.

On trouve la même valeur de P qu'ici, lorsque la courbe est

une hyperbole, mais négative; ce qui fait voir que cette force devient centrifuge dans ce cas.

COROLLAIRE IX.

28. Si l'on fait $v = 0$, l'équation $cd\sqrt{2ay - yy} = byv$, donnera $2a = y$, ce qui montre que si l'on prolonge le premier axe A a, du côté du foyer opposé F, ensorte que AG = AF, le point G sera tel qu'à la distance CG, la vîtesse v sera nulle. L'on voit aussi que la vîtesse en a sera la plus grande qu'il est possible, puisqu'elle est partout réciproquement comme les distances CS, ou Ca.

EXEMPLE.

29. Soit la courbe encore une ellipse, & le point fixe C son centre, en tirant le diametre CD parallele à la tangente MT, la somme des quarrés de CM & de CD, sera égale à la somme des axes CA & CB; en faisant $aa + bb = rr$, on aura CD $= \sqrt{rr - yy}$; mais le rectangle ab des demi-axes est égal au rectangle CD × CT, par la propriété de l'ellipse, ce qui donne $ab = s\sqrt{rr - yy}$; cette valeur de s étant mise dans * $vs = cd$, donnera $c\sqrt{rr - yy} = bc$, parce que d ici égal a, d'où l'on tire $vv = \frac{cc}{bb} \times \overline{rr - yy}$, dont la fluxion est $-v\dot{v} = \frac{ccy\dot{y}}{bb}$. Par conséquent $-P\dot{y} = v\dot{v}$, devient $P = \frac{ccy}{bb}$; ce qui fait voir *que la force* P *est comme les distances* CM. Fig. 2. * Art. 11.

COROLLAIRE X.

30. Lorsque l'ellipse devient un cercle, b & y deviennent égales à a, ainsi $aP = cc$. D'où l'on voit *que la force* P *est comme le quarré de la vîtesse directe, & l'inverse du rayon.*

Comme on a trouvé par expérience que la gravité agit universellement comme la quantité de matiere directe, & le quarré des distances inverses, on voit que les orbes des planetes doivent être des ellipses, parce que l'ellipse paroît être la seule courbe qui rentre en elle-même qui a cette propriété; mais on n'est pas satisfait de ce qu'elle a cette propriété, parce que l'on ne sçait pas s'il n'y a point d'autres courbes qui ayent la même. C'est

pourquoi nous allons chercher quelle doit être la courbe, lorsque la force centripete est telle que l'expérience le demande.

PROBLEME.

Fig. 7. 31. *La force centripete* P *étant partout réciproquement comme les quarrés des distances* CM, *l'on demande la nature de la courbe.*

Puisque P est comme $\frac{1}{yy}$, l'équation $-P\dot{y}=v\dot{v}$; devient $-\frac{\dot{y}}{yy}=v\dot{v}$, dont la fluente est $2A+\frac{2}{y}=vv$. Or si l'on suppose que $2a$ exprime la distance du point C au point où la vîtesse v devient nulle, on aura $-A=\frac{1}{2a}$, & par conséquent $2A+\frac{2}{y}=vv$, devient $\frac{2}{y}-\frac{1}{a}=vv$, ou $2a-y=ayvv$. *Si l'on* fait $CA=a+d$, & que la tangente fasse un angle droit avec CA, lorsque $v=c$, y sera $=a+d$; & ainsi $2a-y=ayvv$, donne $a-d=acc\times\overline{a+d}$. Or comme * $vs=c\times\overline{a+d}$, ou $vvss=cc\times\overline{a+d}^2$, en mettant les valeurs de vv & de cc dans cette derniere équation, on trouvera $\overline{2a-y}\times ss=y\times\overline{aa-dd}$, ou en faisant $aa-dd=bb$, on aura $s\sqrt{2ay-yy}=by$, pour l'équation de la courbe demandée, laquelle sera une section conique, dont le point fixe C est un de ses foyers.

* Art. 11.

1°. Lorsque $d=0$, c'est-à-dire, CA = AG, la courbe sera la parabole ordinaire.

2°. Lorsque d est moindre que a, elle sera une ellipse.

3°. Et lorsque d est plus grand que a, une hyperbole; mais comme le quarré de la vîtesse c devient ici négatif, la force P devient centrifuge.

De là on voit clairement que les orbes des corps célestes qui tournent autour des autres, ne peuvent être que des ellipses, puisqu'il n'y peut point avoir d'autre courbe qui ait cette propriété: tous les Philosophes en conviennent à présent; c'est pourquoi il n'y a point d'autre systême du monde qui soit suivi que celui de Kepler, lequel est fondé sur cette propriété.

COROLLAIRE I.

32. Delà il suit que si f exprime la distance du point C au point où la force P devient égale à la gravité p, proche la surface de

de la planete, on aura $P=\frac{pff}{yy}$, & comme * $P=\frac{addcc}{bbyy}$, on aura $addcc=bbffp$, ou $cd=bf\sqrt{\frac{p}{a}}$; cette valeur étant mise dans $vs=cd$, & * $2CAM=cdt$, donne $vs=fb\sqrt{\frac{p}{a}}$, & $2CAM=bft\sqrt{\frac{p}{a}}$. * Art. 27. * Art. 12.

Or si T exprime le tems d'une révolution entiere, & $r=3.14159$, on aura $abr=CAM$; & en mettant cette valeur, & T pour t, on aura $2ar=Tf\sqrt{\frac{p}{a}}$, ou en quarrant $4rra^3=pffTT$.

COROLLAIRE II.

33. Delà il suit que les tems périodiques dans les ellipses qui ont le même premier axe, sont égaux, depuis la plus petite jusqu'au cercle, quel que puisse être leur second axe, & les quarrés des tems périodiques des corps qui tournent autour du même centre, sont comme les cubes de leurs distances moyennes, ou axes; car p & f sont constans dans ce cas.

COROLLAIRE III.

34. Puisque * $P=\frac{cc}{a}$, dans le cercle, & que $2CAM=cdt$, est $2ra=cdt$, dans une révolution entiere, on aura $P=\frac{4rra}{tt}$. Ce qui fait voir, *que si les tems périodiques sont égaux, les forces centrifuges ou centripetes, sont comme les rayons des cercles*. Que si les tems sont différens dans des cercles égaux, *les forces centrifuges seront réciproquement comme les quarrés des tems périodiques*, & dans des cercles différens, *les forces sont comme les rayons directs & les quarrés des tems inverses*; & comme $2ra=ct$, *les vîtesses sont comme les rayons directs, & les tems périodiques inverses*. * Art. 30.

COROLLAIRE IV.

35. Puisque * $=\frac{acc}{2yy}$, dans la parabole, & * $P=\frac{ffp}{yy}$, on aura $cc=\frac{2ffp}{a}$, ou en mettant cette valeur de cc dans * $vvss=ccdd$, & a pour d, il viendra $vvss=2apff$, & comme * ay * Art. 26. * Art. 32. * Art. 11. * Art. 26.

$=ss$ par la propriété de la parabole, la derniere équation deviendra $vvy = 2pff$, ou $v = f\sqrt{\frac{2p}{y}}$. Delà il suit.

1°. Que la vîtesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la moitié du premier arc d'une ellipse, est à la vîtesse d'un corps qui tourne dans l'ellipse autour du même centre, comme * $f\sqrt{\frac{p}{a}}$ est à $\frac{bf}{s}\sqrt{\frac{p}{a}}$, ou comme s est à b, parce que s devient égale à b, dans le cercle.

* Art. 32.

2°. La vîtesse d'un corps qui tourne dans une ellipse à sa distance moyenne, est égale à la vîtesse d'un corps qui tourne dans un cercle dont le rayon est égal à la même distance, parce que $b = s$, dans ce cas.

3°. La vîtesse d'un corps qui tourne dans la parabole, est égale à la vîtesse d'un corps qui tourne dans un cercle à la moitié de cette distance. Car si $\frac{1}{2}y = a$, la vîtesse dans la parabole $v = f\sqrt{\frac{2p}{y}}$, deviendra $v = f\sqrt{\frac{p}{a}}$, de même que dans un cercle dont le rayon est a.

REMARQUE.

La parallaxe horizontale du soleil a été trouvée de $10\frac{1}{2}''$ par les meilleures observations : or la tangente de cet angle, qui est 50905436, est au rayon 100000, 00000, 00, comme le rayon de la terre, qui est de 19644 rayons de la terre. Mais si cette parallaxe n'étoit que de $10''$, la distance moyenne de la terre au soleil seroit de 22688, ce qui surpasse la premiere de 3044 rayons. D'où l'on voit l'importance d'avoir cette parallaxe le plus exactement qu'il soit possible.

Comme dans l'équation $2ra^{\frac{3}{2}} = fTp^{\frac{1}{2}}$, pour avoir la valeur de f, il faut que p exprime le double de la hauteur de la chûte dans un jour, puisque les tems T sont exprimés en jours, & de plus p doit être exprimé en rayon de la terre, puisque a est ainsi exprimé : or comme les tems sont * comme les racines quarrées double des hauteurs de la chûte, la hauteur de la chûte dans une seconde dans la latitude de Paris, étant de 15.095 pieds, & 86400 exprimant le nombre des secondes dans un jour, on trouvera $p^{\frac{1}{2}} = 474739.1424$, de pieds; & comme le rayon de la terre est, selon M. Picard, de 19615800 pieds, dont la racine quarrée est 4428. 9727 ; ainsi en divisant la valeur de $p^{\frac{1}{2}}$, par cette

* Art. 5.

racine, on aura $p^{\frac{1}{2}} = 107.18944$ exprimé en rayons de la terre. Cette valeur & celle de $2r$, qui est de 6. 28318, dans l'équation $2ra^{\frac{1}{2}} = fTp^{\frac{1}{2}}$, donnera $fT\ 0.058817 \times a^{\frac{1}{2}}$. D'où l'on voit que si deux de ces quantités f, T, a, sont données la troisieme le sera aussi.

Tems périodiques.

Saturn.	*Jupiter.*	*Mars.*	*Terre.*	*Venus.*	*Mercure.*
10759. 275 :	4332. 514 :	686. 9785 :	365. 2565 :	224. 6176 :	67. 9692.

Si l'on met la valeur de T & de a, c'est-à-dire, 365. 2565, dans l'équation ci-dessus, on aura $f = 441.8455877$, & $ff = 195227$. D'où en mettant la valeur de f, dans l'équation, on aura $T \times 7537.8403 = a^{\frac{1}{2}}$.

Cette derniere équation exprime le rapport entre le tems périodique & la distance moyenne d'une planete quelconque, qui tourne autour du soleil; car il faut remarquer que la valeur de f change lorsque le corps qui occupe le centre change.

En mettant la valeur de T dans la derniere équation prise ci-dessus, on aura les distances moyennes des planetes exprimées en rayons de la terre.

Distances moyennes.

Saturn.	*Jupiter.*	*Mars.*	*Terre.*	*Venus.*	*Mercure.*
187364 :	102170 :	29931 :	19644 :	14205 :	7604.

La distance moyenne de la lune à la terre, est de 60. 11 rayons de la terre. Or les diametres apparens des planetes étant connues, on trouvera leurs diametres véritables comme ci-dessous.

Diametres des Planetes.

Sol.	*Sat.*	*Jupit.*	*Mars.*	*Terre.*	*Ven.*	*Mer.*	*Lune.*
92 :	7.267 :	9.1633 :	0.5226 :	1 :	1.033 :	0.3686 :	0.27.

Car le diametre apparent du soleil est de 32′ : 12″ = 1932″, lorsque le diametre apparent de la terre est 21″, c'est-à-dire, double de la parallaxe horizontale du soleil : donc le diametre du soleil est au diametre de la terre, comme 1932 est à 21, ou comme 92 est à l'unité.

Un Observateur placé dans le soleil verroit Saturne sous un angle de 16″, à la distance moyenne, ou sous un angle de $\frac{187364}{19644} \times 16'' = 152.6076''$, à la distance moyenne de la terre; ainsi le diametre du soleil est au diametre de Saturne, comme 1932 est à 152. 6076, ou comme 92 est à 7. 267.

Jupiter feroit vu du soleil sous un angle de 37″ à sa distance moyenne, & sous un angle de $\frac{102170}{19644} \times 37'' = 192.4399''$ à la distance moyenne de la terre : donc le diametre du soleil est au diametre de Jupiter, comme 1932 est à 192.4399, ou comme 92 est à 9.1638.

Mars feroit vu du soleil sous un angle de 30″, lorsque sa distance à la terre est à sa distance moyenne de la terre, comme 15 est à 41, & par conséquent sous un angle de $\frac{15}{41} \times 30'' = 10.9756''$, à la distance moyenne de la terre, par conséquent le diametre du soleil est au diametre de Mars, comme 1932 est à 10.9756, ou comme 92 est à 0.5226.

Venus feroit vu du soleil sous un angle de 30″ à sa distance moyenne, & sous un angle de $\frac{14205}{19644} \times 30'' = 21.6936''$, à la distance moyenne de la terre : donc le diametre du soleil est au diametre de Venus, comme 1932 est à 21.6936, ou comme 92 est à 1.033.

Mercure feroit vu du soleil sous un angle de 20″ à la distance moyenne, & sous un angle de $\frac{7104}{19644} \times 20'' = 7.741''$; ainsi le diametre du soleil est au diametre de Mercure, comme 1932 est à 7.741, ou comme 92 est à 0.3686.

Enfin le diametre de la lune paroît être de $15' : 38'' = 938''$, lorsque sa parallaxe est de $57' : 12'' = 3432''$. Par conséquent le diametre de la terre est au diametre de la lune, comme 3432 est à 938, ou comme l'unité à 0.27.

Les solides semblables étant comme les cubes de leurs diametres, en supposant les planetes semblables, on aura pour leurs.

Solidités.

Sol.	*Sat.*	*Jupit.*	*Mars.*	*Terre.*	*Ven.*	*Mer.*	*Lune.*
778688 :	383.765 :	769.532 :	0.14226 :	1 :	1.1023 :	0.5 :	0.01968.

D'où l'on voit que Venus est à peu près égale à la terre, Mercure la moitié, Jupiter plus grand que toutes les autres Planetes ensemble, & le soleil presqu'un million de fois plus grand que la terre.

Si à présent on suppose que Saturne occupe le centre des forces ; le tems périodique du Satellite découvert par M. Hugens étant de 15.945 jours, & sa distance au centre de Saturne de huit demi-diametres de son anneau ; le diametre de l'anneau étant au diametre de Saturne, comme 42″ est à 18″, c'est-à-dire, comme 7 est à 3 ; ainsi cette distance sera $\frac{7 \times 8}{3} = \frac{56}{3}$ demi-

diametres de Saturne, ou parce que ce diametre contient 7. 267 diametres de la terre, elle sera $\frac{7.267}{2} \times \frac{56}{3} = 67.8253$ diametres de la terre.

Si donc on fait T = 15. 945, $a = 67.8253$, on trouvera que $Tf = 0.058617 \times a^{\frac{3}{2}}$, donc $f = 2.053355$, & $ff = 4.216$. Cette valeur de f étant mise dans $Tf = 0.058617 \times a^{\frac{3}{2}}$, donnera $T \times 35.03 = a^{\frac{3}{2}}$.

Tems périodiques des satellites de Saturne.

1. 888 : 2. 737 : 4. 577 : 15. 945 : 79. 325 jours.

Par le moyen des tems périodiques & de la derniere équation, on trouvera les distances moyennes comme ci-dessous, exprimés en rayons de la terre.

Distances moyennes des satellites de Saturne.

16. 344 : 20. 9356 : 29. 236 : 67. 8253 : 197. 522.

Si c'est Jupiter qui occupe le centre, le tems périodique du Satellite le plus éloigné étant de 16. 6889 jours, & sa distance moyenne de 24. 299 demi-diametres de Jupiter, le diametre de Jupiter contient 115. 917488 rayons de la terre. Donc faisant $T = 16.6889$, & $a = 115.917488$, on aura $a^{\frac{3}{2}} = 1248.0254$, & par conséquent l'équation $Tf = 0.058617 \times a^{\frac{3}{2}}$, donnera $f = 4.3834$, ou $ff = 19.214$. Cette valeur de f étant mise dans $Tf = 0.058617 \times a^{\frac{3}{2}}$, donne $T \times 74.7803 = a^{\frac{3}{2}}$, ou bien $T^{\frac{2}{3}} \times 17.749\, a$.

Tems périodiques des satellites de Jupiter.

1. 76914 : 3. 5508 : 7. 154 : 16. 6889.

Par le moyen des tems périodiques & de la derniere équation, on trouvera les distances moyennes de ces satellites en rayons de la terre.

Distances moyennes des satellites de Jupiter.

25. 949 : 41. 302 : 65. 990 : 115. 917.

Si P exprime la force absolue avec laquelle une planete attire les corps, & que g soit celle qui est proche de la surface de la terre : puisque f exprime la distance où la force centripete est égale $a\,g$, on aura $P = gff$, ou $g : P :: 1 : ff$; donc les

valeurs trouvées pour ff, exprimeront le rapport entre les forces absolues des planetes qui occupent le centre à celle de la terre supposée l'unité.

Gravité absolue du

Soleil.		*Saturne.*		*Jupiter.*		*Terre.*
195227	:	4. 216	:	19. 214	:	1.

Les poids des corps égaux placés sur les surfaces des planetes, sont comme les forces attractives des planetes; ainsi si y exprime le rayon d'une planete, & que l'on mette la valeur de ff, trouvée pour cette planete dans $P = \frac{ff}{yy}$, on aura les poids P placés sur leur surface.

Gravité des corps placés sur les surfaces du

Soleil.		*Saturne.*		*Jupiter.*		*Terre.*
922625	:	3193	:	9154	:	1000.

Or la quantité de matiere exprimée par ff, est aussi égale à la densité D, & au volume ensemble; & comme les volumes sont comme les cubes des rayons dans les solides semblables, on aura $Dy^3 = ff$; d'où en mettant cette valeur dans $P = \frac{ff}{yy}$, on aura $P = Dy$, ou $D = \frac{P}{y}$; par conséquent en mettant au lieu de P & de y, leurs valeurs trouvées ci-devant, on aura pour les

Densités du

Soleil.		*Saturne.*		*Jupiter.*		*Terre.*
25071	:	1098	:	2497	:	100000.

Il faut remarquer que l'on n'a pas encore trouvé le moyen d'avoir la gravité ni la densité des planetes qui n'ont point des satellites ou corps qui tournent autour d'eux.

Voilà à peu près l'application la plus utile que nous avons cru faire de nos principes, en ce qui regarde l'Astronomie: nous en aurions pu donner plusieurs autres sur les différentes hypotheses qu'on peut faire à l'égard de la force centripete; mais comme cela auroit plutôt fatigué le lecteur, au lieu de l'instruire, on a cru qu'il vaudroit mieux s'attacher seulement à ce qui est utile.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

THEOREME I.

36. *Soit un amas de matiere uniforme dont les parties sont détachées les unes des autres, & qui sont attirées vers un centre ou point fixe* C, *avec des forces égales à des distances égales : je dis que cet amas formera une sphere* AMD*a*. Fig. 9.

Car il est clair que les parties de cette matiere les plus proches du centre C, s'approcheront de ce point autant qu'il est possible, & qu'elles doivent s'arranger selon une forme sphérique, puisque leurs attractions sont égales par supposition : les autres parties les plus proches, s'arrangeront autour des premieres, & formeront une couche sphérique autour des premieres, & ainsi de suite jusqu'aux dernieres, & par conséquent cet amas de matiere formera un solide dont la figure est sphérique, & ne sçauroit être d'aucune autre forme.

COROLLAIRE.

37. Delà il suit qu'il est manifeste, que si la force attractive cessoit d'agir à une certaine distance C du point fixe, ou que si quelqu'autre force répulsive venoit à détruire cette attraction à une certaine distance du centre C, les parties de matiere s'arrêteront en cette distance sans s'approcher davantage, & en ce cas il y auroit un vuide L*mn* en dedans de la sphere, qui auroit la même figure que la premiere, puisque la cessation de la force attractive, à une certaine distance, n'empêcheroit pas que la partie solide ne fût une orbe sphérique.

On a fait voir que les forces centripetes sont dans la raison directe des quantités de matiere & des quarrés des distances inverses, l'attraction sur la surface des spheres, sera donc dans la raison directe des cubes de leurs rayons & de leurs quarrés inverses, c'est-à-dire, dans la raison directe de leurs rayons.

THEOREME II.

38. *Si à présent on suppose que cette sphere vienne à tourner autour de l'axe* A*a*, *avec une certaine vîtesse qui soit comparable avec celle produite par la force attractive ; je dis que cette sphere s'alongera vers l'équateur* BC, *& formera un sphéroïde.* Fig. 10.

En tirant N P perpendiculaire à l'axe A *a*, & en décomposant la force dans la direction CM, en la perpendiculaire MP, & en la parallele CA à l'axe, la force en M dans la direction MP, sera à la force en D, comme PM est à CD; & comme la force centrifuge en M est aussi à la force centrifuge en D dans la raison de * PM à DC; l'augmentation MN de PM, causée par la force centrifuge en M, sera à l'augmentation BD de CD, causée par la force centrifuge en D, comme PM est à CD, ce qui est la propriété de l'ellipse; par conséquent si la sphere tourne autour de son axe A *a*, elle sera changée en un sphéroïde.

* Art. 34.

COROLLAIRE I.

39. Il est manifeste que ce sphéroïde s'alongera d'autant plus vers l'équateur, que la force centrifuge est plus grande: or cette force augmente dans des cercles égaux, autant que la révolution se fait en moins de tems; & cette force pourroit être telle que le sphéroïde deviendroit tout plat vers les pôles; & lorsqu'il seroit égal à la force qui attire les corps vers le centre, les parties ne pourroient plus s'approcher du centre, & le tiendroient aux mêmes distances.

COROLLAIRE II.

40. Il est aussi évident que, quoique les parties de la matiere qui forment les corps célestes soient de différentes densités ou non, cela n'empêche pas que les corps ne soient des sphéroïdes, puisque les parties les plus solides s'approcheront les premieres, & s'arrangeront autour du centre, & les autres selon leurs densités; & en ce cas, il n'y auroit point d'autre changement, si ce n'est que le sphéroïde seroit plus dense vers le centre que proche de la surface, puique la force centrifuge doit produire son effet; mais que le sphéroïde fût alongé vers les pôles, il n'y a aucune raison, & par conséquent cette forme est impossible.

THEOREME III.

41. *L'attraction du corps vers le centre d'un Pendule, placé à la surface, est comme la distance du centre.*

Car on a prouvé, & les expériences l'ont confirmé, que les corps célestes s'attirent les uns les autres par des forces (1) qui

(1) Voyez la gravité des corps placés sur la surface des planetes.

sont

ſont comme la quantité de matiere directe, & les quarrés des diſtances inverſes. Or la quantité de matiere peut être exprimée par le cube des demi-diametres dans les ſphéroïdes ſemblables, & la diſtance étant auſſi égale au demi-diametre, la force qui attire les corps placés ſur la ſurface des planetes, eſt donc comme les cubes des demi-diametres directs, & comme les quarrés des mêmes demi-diametres inverſes, ou comme les diſtances directes.

Les Auteurs qui ont traité cette matiere, ont prouvé la même choſe, mais par un calcul très-embarraſſant, & qui me paroît être fort inutile, puiſque cela eſt évident de ſoi-même : car quand on ſuppoſe que les attractions éloignées à différentes diſtances, ſont dans la raiſon de la quantité de matiere directe, & des quarrés des diſtances inverſes, il faut de néceſſité que les corps placés à la ſurface des planetes ſemblables, ſoient comme les diſtances du centre à ces points, puiſqu'elles ſont ſenſiblement ſemblables, & par conſéquent comme les cubes des demi-diametres ſemblables, à moins qu'on ne veuille ſuppoſer que la denſité de matiere d'un côté du centre ſoit différente de l'autre; & en ce cas il n'eſt pas poſſible de trouver cette attraction par aucun moyen, de ſorte que le grand calcul employé par les Auteurs dont je veux parler, deviendroit auſſi inutile que ce que nous venons de prouver d'une maniere ſi aiſée.

THEOREME IV.

42. *Dans les planetes la direction de la gravité eſt partout perpendiculaire à la tangente en chaque point de la ſurface.* Fig. 11.

L'expérience fait voir clairement que cela eſt ainſi à l'égard de notre terre, & il eſt manifeſte par la Statique, que la direction de la gravité dans tous les fluides, eſt perpendiculaire à ſa ſurface; & la choſe ne ſçauroit être autrement, puiſque ſes parties ne ſçauroient être en repos ſans cela : or il eſt très-probable que toutes les planetes ſont en partie compoſées de fluides; & en ce cas la direction de la gravité eſt perpendiculaire à la ſurface : je dis même que cela doit être ainſi dans tout corps qui tourne autour d'un axe, quoiqu'aucune de ſes parties ne ſoit fluide; car autrement les corps qui tomberoient ſur leurs ſurfaces, rouleroient vers la partie la plus baſſe, de la même maniere que ſi le corps tomboit ſur un plan incliné. De plus, puiſque la même cauſe, qui dirige la direction de la gravité ſur la ſurface de la terre, ſe trouve dans toute autre planete, ou corps qui tourne

autour d'un axe, il faut de nécessité que les effets soient de même : par conséquent la direction de la gravité, sur la surface d'une planete quelconque, est perpendiculaire à la tangente en chaque point de la surface.

N. B. Messieurs Bouguer & Clairaut prétendent que la direction perpendiculaire dans les fluides ne suit pas nécessairement de leur équilibre dans de certaines hypotheses qu'on peut faire sur la pesanteur : mais pour détruire cette loi universelle, il faudroit que l'un ou l'autre prouvât auparavant que cette hypothese peut avoir lieu dans la nature, ce qu'ils n'ont pas faits & ne sçauroient faire : de plus, si on vouloit révoquer en doute tous les principes de Méchanique par des hypotheses imaginaires, nous ne serions certains d'aucune chose du monde ; & si cela étoit légitime, on pourroit fort bien faire des hypotheses qui détruiroient tout ce que ces Messieurs ont avancé dans leurs écrits.

PROBLEME I.

Fig. 21. 43. *Le rapport entre les forces de gravité dans deux latitudes quelconques d'une planete étant donné, il s'agit de trouver le rapport entre le diametre de l'équateur & l'axe qui passe par les poles.*

Soit AB*a* une section par les poles A, *a*, & soit MK perpendiculaire à la tangente M, rencontrant le rayon CB de l'équateur en K, & soit tiré le diametre CM & MP perpendiculaire à CB ; cela posé.

Puisque la direction de la gravité en M est dans la perpendiculaire MK, celle de la force centrifuge dans CB, & celle de la force centrale dans CM ; & puisque trois puissances sont en équilibre lorsqu'elles sont dans la raison des côtés du triangle formé par leurs directions, selon les regles de Méchanique, si CM exprime la force centrale, MK exprimera la gravité au point M, & CK la force centrifuge en ce point : or nous avons prouvé que les forces centrales sont comme les distances ; il est donc vrai que les forces de gravité sont aussi comme les perpendiculaires MK, & les forces centrifuges comme les parties CK du rayon de l'équateur terminées par les perpendiculaires.

Par conséquent le rapport entre deux de ces perpendiculaires étant donné, le rapport entre les axes de l'ellipse sera aussi donné.

COROLLAIRE I.

44. Delà il suit que si le point M tombe en B, la perpendiculaire M K deviendra égale au parametre du demi-axe C B, par la nature de l'ellipse, c'est-à-dire, qu'elle est troisieme proportionnelle à C B & C A; & lorsque le point M tombe en A, la perpendiculaire M K devient égale à C A. Donc puisque C B est à C A, comme C A est au parametre de B C, il suit que la gravité au pole A est à la gravité sous l'équateur B, comme le rayon C B est au demi-axe C A; ce qui est précisément la même chose que ce que tous les Auteurs ont trouvé par des voies différentes.

COROLLAIRE II.

45. Par la propriété de l'ellipse, C K est à cette partie de C B, lorsque le point M tombe en B, comme C P est à C B; & par conséquent la force centrifuge au point M est à la force centrifuge sous l'équateur B, comme le rayon C P du cercle décrit par le point M dans la révolution de la figure autour de l'axe Aa, est au rayon C B de l'équateur; ce qui s'accorde avec ce que les Auteurs dont il s'agit, ont trouvé, & avec ce que nous avons prouvé dans l'article 34.

COROLLAIRE III.

46. Si l'on tire le demi-diametre C N parallele à la tangente en M, & que la perpendiculaire M K soit prolongée jusqu'à la rencontre de C N, en L, la ligne M L exprimera la gravité primitive en M, ou la force totale avec laquelle un corps, placé en M, seroit attiré dans la direction M K, si elle n'étoit diminuée par la force centrifuge. Car en décomposant la force centrifuge C K en la perpendiculaire C L, & en la parallele L K, la partie L K exprimera son effet dans la direction M K, & par conséquent diminuera la force de gravité primitive de cette quantité.

COROLLAIRE IV.

47. Si le rayon C B de l'équateur est l'unité, $CA = a$, $CP = u$, $PM = y$, & la distance du centre au foyer d, c'est-à-dire, $1 - bb = dd$, on aura $yy = bb \times \overline{1 - uu}$, & $KP = bbu$, par la propriété de l'ellipse; & la somme des quarrés de P K & de

PM est égale au quarré de MK, c'est-à-dire, $\overline{MK}^2 = yy +$ uub^4; & en mettant la valeur de yy, il viendra $\overline{MK}^2 = bb \times \overline{1 - uu + bbuu}$, ou à cause que $c - bb = dd$, on aura enfin $MK = b\sqrt{1 - dduu}$.

COROLLAIRE V.

48. Pour avoir l'expression de KM, qui puisse se rapporter aux observations, il faut chercher le rapport entre CP, & le sinus de l'angle MKB, qui est celui de la latitude du point M; ce qui se fait en nommant s le sinus de cet angle MKB, t son cosinus; & on aura KP (bbu) : PM (y) : : $s : t$, ou $sy = bbtu$; substituant la valeur de y dans l'équation de l'ellipse $yy = bb \times \overline{1 - uu}$, on aura $bbttuu = ss = uuss$; & la valeur de uu prise dans cette équation, étant mise dans celle de MK, donne $\overline{MK}^2 = bb \times 1 - \frac{ssdd}{ss + ttbb}$. Ce qui étant réduit sous la même dénomination, & bb étant mis au lieu de $1 - dd$, l'unité pour $ss + tt$, & en faisant $1 - n = bb$, il viendra enfin $bb = MK\sqrt{1 - nu}$, pour l'équation qui contient le rapport entre les axes, lequel sera entiérement connu lorsque le rapport de la gravité en deux latitudes différentes, est donné.

COROLLAIRE VI.

49. Delà il suit, que si p est à c, comme la gravité dans une latitude quelconque M donnée, est à la gravité sous l'équateur B, comme MK, devient égale à bb, sous l'équateur, on aura pp : cc : : 1 : $\overline{1 - ntt}$, ou $ee = pp \times \overline{1 - ntt}$, ou en faisant $1 - \frac{ee}{pp} = r$, on aura $r = ntt$, pour l'équation qui exprime le rapport entre les axes de l'ellipse; lorsque celui de la gravité sous l'équateur & dans une latitude quelconque est donné.

Tous les Auteurs, depuis le Chevalier Newton, ont cherché ce rapport, par la méthode des fluxions; ce qui les a obligé d'avoir recours à la quadrature des sections coniques, lesquelles ne se peuvent exprimer que par des suites infinies; de sorte que leur calcul est fort long & embarrassant, & quelques-uns fort obscurs, ce qui est ordinairement le fruit des recherches trop

raffinées, & qui au bout du compte, rend ce qu'on veut trouver fort douteux, en ce qu'il n'est pas fort aisé de sçavoir si l'on n'a pas commis quelques erreurs, ou dans le calcul, ou dans quelques-uns des principes : du moins cela est arrivé dans le cas présent, puisque tous ceux qui ont écrit sur ce sujet n'ont pas trouvé le véritable rapport qu'il y a entre l'équateur & l'axe de la terre.

EXEMPLE.

50. Soit la latitude de 48 degrés & 50 minutes, qui est celle de Paris, on aura $t = .752798$ & $tt = .5667$; en prenant le rapport de M. Clairaut, entre la gravité à Paris & sous l'équateur, on aura $p = 43482$ & $e = 43375$, après avoir divisé les nombres qu'il donne par 5, pour rendre l'opération plus simple; ainsi $pp = 1890684324$, & $ee = 1881390625$, ce qui donne $r = \frac{9293699}{1890584324}$, & $n = \frac{9293699}{1071460260}$; par conséquent $1 - n = bb = \frac{1062166561}{1071460260}$, dont la racine quarrée est $b = \frac{3259089}{3273317}$.

En supposant le numérateur de cette fraction 229, selon le Chevalier de Newton, on trouvera le dénominateur de 229.99773, ou 230 à trois 10000me partie près : mais en supposant le numérateur de 230, selon quelques Auteurs, on trouvera 231.004 pour le dénominateur. D'où l'on voit que le premier rapport est vingt fois plus proche que le second. Par conséquent le Chevalier Newton a mieux réussi par une méthode fort simple, que tous les Auteurs qui ont traité ce sujet depuis, par des calculs très-ennuyans & embarrassés.

Comme ce rapport ne s'accorde pas avec les mesures actuelles qu'on a prises depuis quelques années des différens degrés de méridiens, il s'agit d'en trouver un autre qui réponde le plus près aux dernieres expériences qu'il soit possible : mais en faisant usage du degré de méridien mesuré sous le cercle polaire, & celui corrigé en France par M. de Maupertuis, on trouve un rapport entre les axes, qui ne s'accorde pas avec la mesure qu'on a prise sous l'équateur, ni avec la longueur du Pendule à secondes; & si l'on se sert des mesures prises sous l'équateur & le cercle polaire, on ne réussit pas mieux : de plus, en comparant les longueurs des Pendules à secondes, déterminées par M. Bouguer sous l'équateur, & par M. de Mairan à Paris, on trouvera encore un rapport bien éloigné du véritable.

Je suppose donc la longueur du Pendule à secondes de 440.

567 lignes mesures de France, à Paris, & celle sous l'équateur de 439.41 lignes, laquelle est d'un cinquieme de ligne plus longue que celle que M. Bouguer dit avoir mesuré, & un peu moindre que la longueur donnée par M. Newton, ce qui donne $p = 440567$, $e = 439410$, & $pp = 194099281 5$, & $ee = 193081 1481$, puisque $tt = .5667$, on trouvera $r = \frac{10181334}{1940992815}$, & $n = \frac{12966003}{1940992815}$. Par conséquent $1 - n = bb = \frac{1924926812}{1940992813}$, dont la racine quarrée est $b = \frac{438523}{440567}$.

En cherchant le rapport le plus proche exprimé par trois figures, on trouvera $b = \frac{215}{216}$; ce qui est bien différent de tous les rapports trouvés par les autres Auteurs; & pour prouver que c'est en effet le plus proche, il s'agit de faire voir qu'il s'accorde aussi bien avec les mesures actuelles qu'on puisse le désirer.

Pour le prouver, il faut se souvenir que les petits arcs sont entr'eux comme les rayons de courbures; & ces rayons sont entr'eux comme * les cubes des perpendiculaires divisées par b^4, lorsque A C est l'unité, comme nous l'avons supposé; & comme les perpendiculaires MK, sont réciproquement proportionnelles à * $\sqrt{1 - ntt}$: les arcs sont réciproquement proportionnels aux cubes des $\sqrt{1 - ntt}$.

* Art. 200. Sect. Con.

* Art. 47.

Si à présent l'on suppose $q = \sqrt{1 - ntt}$, dans la latitude de 66 degrés 20 minutes, on aura $t = .915896$, & $tt = .83886$; en mettant cette valeur aussi-bien que celle de n, dans $q = \sqrt{1 - ntt}$, & en extrayant la racine quarrée on aura $q = .99610$, & $q^3 = .98833$.

En faisant $p = \sqrt{1 - ntt}$ dans la latitude de Paris, on aura $tt = .5667$, $p = .99727$, & p^3 .99213. Or, selon M. de Maupertuis, le degré de méridien sous le cercle polaire est de 57437.9 toises; par conséquent 99213 : 98833 :: 57437.9 : 57218 toises pour le degré de méridien à Paris; ce qui est moindre de 74 toises, que 57292 celui mesuré par M. Picard, selon ce qu'on a publié en 1701.

Comme le rayon de courbure sous le cercle polaire est à celui sous l'équateur, comme l'unité est à .98833; en multipliant 57437.9 toises par .98833, on trouvera 56767.6 toises pour le degré de méridien sous l'équateur; ce qui surpasse 56753 toises, celui mesuré sous l'équateur que de 14.6 toises seulement.

Si nous cherchons le degré de méridien de Londres, qui est

dans la latitude de 51 degrés & 52 minutes, on aura $tt = .61304$, & $\sqrt{1 - ntt} = .99714$, dont le cube est .99145, ainsi 99145 : 98833 : : 57438 toises est à 57258 toises pour le degré de méridien à Londres, ce qui ne différe de 57300 celui mesuré par M. Norwood que de 42 toises.

D'où il est manifeste que notre théorie s'accorde aussi-bien qu'on puisse souhaiter avec les quatre mesures qu'on a prises des degrés de méridiens dans différentes latitudes; car ceux qui les ont prises ne pourront se promettre d'avoir réussi si bien dans leurs opérations, qu'ils ne puissent manquer de 40 ou 50 toises: il leur doit suffire, & le public doit leur sçavoir gré du soin & des fatigues qu'ils ont pris, & de ce qu'ils ont approché si près de la mesure véritable. Il est vrai que l'on prétend que le degré de méridien mesuré par M. Picard, doit être moindre que celui qu'il a donné; mais comme il s'accorde parfaitement bien avec les autres mesures qu'on a prises depuis dans différentes latitudes, sa mesure doit être aussi exacte que celles prises par les autres Sçavans: autrement ils se sont tous trompés du même côté; ce qui n'est pas croyable.

Voyons à présent si notre théorie s'accorde aussi avec les expériences qu'on a faites sur le Pendule à secondes; en nommant $m = \sqrt{1 - ntt}$, dans la latitude de Pello, qui est de 66 degrés & 48 minutes, on aura $t = .919315$, & $tt = .8448$, d'où l'on trouvera $= .99608$; & comme la gravité sous l'équateur est à celle à Pello, comme m (.99608) est à l'unité. Ainsi divisant la longueur 439.41 lignes du Pendule sous l'équateur, par 99608, on trouvera 441.24 lignes pour la longueur du Pendule à Pello, ce qui ne différe de 441.17 lignes, qui est celle trouvée par M. de Maupertuis, que de $\frac{3}{100}$ de lignes.

En cherchant la longueur du Pendule à secondes à Londres, on la trouvera de 440.67 lignes mesure de France; ce qui s'accorde parfaitement bien avec les expériences citées dans l'article 26. Car en réduisant cette longueur en mesure d'Angleterre, on trouvera 469.498 lignes, ou 39.125 pouces, ce qui est exactement la longueur trouvée par le Docteur Halley.

D'où l'on voit que le rapport trouvé entre les axes de l'ellipse s'accorde aussi avec les expériences faites sur la longueur des Pendules, excepté la mesure de M. Bouguer: mais quand on considere que la sienne ne s'accorde pas avec la mesure des degrés de

méridiens, & que l'instrument dont il étoit obligé de se servir, qui n'étoit pas une Horloge à Pendule, mais seulement un poids attaché à un mur par le moyen d'une verge de pith, qui, comme l'on sçait, ne fait point les oscillations dans des tems égaux, il étoit moralement impossible qu'il pût mesurer cette longueur d'un cinquieme de ligne près : d'ailleurs il s'est servi d'un poids dont la figure étoit très-incommode pour trouver son centre d'oscillation, qu'il faut cependant avoir lorsque l'on veut être aussi exact qu'on doit l'être dans une telle expérience.

Pour avoir la longueur du rayon de l'équateur, il faut chercher le rayon de courbure de l'arc mesuré sous le cercle polaire, & on trouvera 3290948. 9 toises pour ce rayon ; & comme l'unité est à q^3 (98833) comme le rayon 3290948. 9 est au rayon de courbure sous l'équateur, que l'on trouvera de 3252543. 5 toises ; pour avoir la partie qu'il faut ajouter à ce rayon, on dira comme le numérateur 1923026812 de la valeur de bb est au numérateur 17966003, de la valeur de n, ou en rejettant les trois dernieres figures, 1923027 est à 17966, comme le rayon de courbure 3252543. 5, pour avoir le rayon de l'équateur, qui sera de 3282930. 5 toises, ou de 19697583 pieds.

Nous avons fait voir que n exprime la force centrifuge sous l'équateur, lorsque la force de la gravité primitive est représentée par le rayon BC de l'équateur ou l'unité : mais comme cette gravité primitive est constante ou uniforme, & que la force centrifuge est comme le sinus verse d'un petit arc, qui ne différe pas essentiellement de sa corde, cette force doit être considérée comme accélerée, eu égard à la premiere : la force de gravité parcourra donc un espace double du rayon BC, pendant que la force centrifuge parcourra l'espace CK ; par conséquent l'effet de la gravité primitive est à l'effet de la force centrifuge, comme l'unité est à $\frac{1}{2}n$.

Ce que l'on prouvera encore de la maniere suivante : puisque

* Art. 47. * $bb = MK\sqrt{1+\frac{1}{2}ntt}$, on aura $MK = bb \times \overline{1+\frac{1}{2}ntt}$ à peu près, & que la force de gravité primitive est l'unité sous l'équateur, les accroissemens de gravité de l'équateur vers les poles, seront comme $\frac{1}{2}ntt$, à peu près ; mais les accroissemens sont comme les décroissemens de la force centrifuge, & aux poles cet accroissement devient $\frac{1}{2}n$, laquelle est par conséquent égale à la force centrifuge sous l'équateur.

Ceci

Ceci se prouve encore mieux par des exemples; car on a trouvé $n = \frac{9293699}{1071460260}$, lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe, est comme 230 à 229 : l'effort de la gravité primitive sous l'équateur sera à l'effort de la force centrifuge dans le même endroit, comme le double du dénominateur 107146062 au numérateur 9293699, ou comme 230 est à l'unité à peu près; ce qui est évident, puisque l'effort de la force centrifuge doit ôter une 230me partie de l'effort de la gravité primitive sous l'équateur, pour que les parties fluides soient en équilibre avec celles des deux poles.

Et comme $n = \frac{17966003}{1940992815}$, lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe est comme 216 à 215, l'effort de la gravité primitive sous l'équateur est à l'effort de la force centrifuge au même endroit, comme le double du dénominateur 1940992815, est au numerateur 17966003, ou comme 216 est l'unité à peu près. Ce qui fait voir évidemment que l'effort de la force centrifuge doit être exprimé par $\frac{1}{2} n$, lorsque la gravité primitive sous l'équateur est exprimée par le rayon de l'équateur ou de l'unité.

N. B. Après avoir réfléchi sur ce que nous trouvons l'effort de la force centrifuge différent des autres qui ont traité cette matiere; j'ai vu qu'ils ont trouvé une valeur pour CK, par rapport à un sphéroïde qui ne fait point de révolution autour de son axe, & que cette valeur est d'un cinquieme moindre que la nôtre à peu près, comme M. Simpson l'a fait voir dans son Traité des Fluxions, page 465. Ainsi en diminuant la nôtre d'un cinquieme, ou, ce qui est la même chose, en prenant les quatre cinquiemes de $\frac{1}{2} n$, on aura $\frac{2}{5} n$, pour la même valeur que les autres ont trouvé.

Car lorsque le rapport entre l'équateur & l'axe est comme 230 à 229, on a $n = \frac{459}{52900}$, dont les deux cinquiemes donneront $\frac{918}{264500}$, ou la gravité primitive est à la force centrifuge, comme 288 à l'unité à peu près. Mais si l'on cherche cette valeur de la force centrifuge en supposant le rapport entre l'équateur & l'axe, comme 216 à 215, on trouvera que la gravité primitive sous l'équateur est à la force centrifuge, comme 317 est à l'unité. Ce qui fait voir que la force centrifuge dépend du rapport entre l'équateur & l'axe, & que ceux qui ont supposé le rapport de 288 à l'unité, entre la gravité primitive à la force centrifuge, ont tacitement supposé le rapport de 230 à 229, de l'équateur à l'axe.

M. Simpſon trouve le rapport entre l'équateur & l'axe, comme $\sqrt{1 + \frac{1}{2}n}$ à l'unité ; & il ſuppoſe $n = \frac{1}{289}$, & delà il trouve ce rapport de 231 à 230. Mais ſi au lieu de prendre $1 + \frac{5}{4}n$, pour la racine quarrée de $\sqrt{1 + \frac{1}{2}n}$, comme il a fait, qu'on extraie la racine quarrée de cette quantité, on trouvera ce rapport entre 232 à 231, & 233 à 232. Ce qui montre qu'en négligeant la moindre choſe, on trouve ce rapport différent de celui qu'on cherche.

M. Clairaut, dans ſon Traité ſur la figure de la Terre, page 192, trouve $\frac{10}{2304}$ pour la différence entre le rayon de l'équateur au demi-axe ; ce qui donne pour leur rapport 2314 à 2304, ou ſi l'on veut exprimer ce rapport en trois figures, comme 463 à 461 ; ce qui eſt bien différent de celui de 231 à 230 qu'il donne. Il eſt vrai qu'il tâche de corriger le rapport de $\frac{10}{2304}$, pour avoir celui de 231 à 230 ; & pour le faire il ſuppoſe ce dernier rapport comme vrai ; & par ce moyen il cherche la force centrifuge qu'il avoit d'abord ſuppoſée être de $\frac{1}{288}$, & delà il le trouve de $\frac{100}{28752}$; mais cela s'appelle un cercle vicieux en Logique : or quand ce dernier rapport ſeroit vrai, il ne s'enſuit nullement que le premier le ſoit ; car il a trouvé par la ſuppoſition, que le degré du méridien ſous l'équateur eſt de 57309 toiſes ; ce qui ſurpaſſe celui meſuré par Meſſieurs Bouguer & de la Condamine, ſeulement de 556 toiſes ; ce qui eſt peu de choſe quand on veut avoir un rapport qui étoit déja donné par des Auteurs Anglois, & qu'il ſemble vouloir imiter.

Il paroît que cet Auteur a une très-mauvaiſe opinion des meſures que ſes Confreres ont priſes ſous l'équateur, puiſqu'il en différe tant dans ſes calculs, & en même tems de celles priſes ſous le cercle polaire, auſquelles il a eu part : de plus le rapport entre l'équateur & l'axe qu'il donne, ne s'accorde nullement avec ſa propre meſure, ni avec celles qui ont été priſes ſous l'équateur, comme il eſt aiſé de s'en convaincre par ce que nous avons fait voir ci-devant.

M. Bouguer, dans ſon Traité de la figure de la terre, page 291, donne le rapport entre l'équateur & l'axe, comme 179 à 178, & il prétend que c'eſt le plus proche qu'on puiſſe trouver : mais ſur quelle théorie a t'il fondé ſon calcul ? ſur une hypotheſe la plus étrange qu'il ſoit poſſible d'imaginer : car une courbe qui rentre en elle-même, comme la figure de la terre le demande,

a cette propriété que les accroissemens des degrés du méridien sont comme les quatriemes puissances des sinus de latitude. S'il avoit pris la peine de chercher cette courbe, il n'auroit sans doute pas avancé une chose si extraordinaire : il est vrai qu'il dit que la développée de la courbe, qu'il appelle gravicentrique, est un quart de cercle, mais il seroit très-difficile de tirer la figure de la terre de cette supposition : comme il suppose plusieurs courbes, les unes des développées des autres, dont la premiere est un quart de cercle, dont la développée est une spirale, la développée d'une spirale est encore une spirale, & ainsi de suite ; de sorte que, selon cette supposition, la figure de la terre doit être une partie de spirale, ce qui est absurde.

Il semble que cet Auteur rejette absolument la figure elliptique, quoique ce soit la seule qui soit possible : car qu'il cherche tant qu'il voudra, il n'en trouvera jamais d'autre qui rentre en elle-même, & qui puisse satisfaire à la question : la cycloïde ordinaire est la seule qui rentre en elle-même, outre l'ellipse ; mais comme sa base & son axe sont dans un rapport déterminé de la circonférence au diametre, elle ne peut pas être celle que la section de la terre par les poles doit avoir.

Si l'on cherche le rapport entre l'équateur & l'axe, par le moyen du probleme de M. de Maupertuis, dans son Traité de la figure de la terre, où il suppose le rayon de l'équateur limité, D la différence entre les axes, F un degré de méridien sous l'équateur, & E un autre degré dont le sinus des latitudes est s, on trouvera $D = \frac{E - F}{3Ess}$. D'où en faisant $F = 56753$, & $E = 57438$, selon les mesures faites sous l'équateur & au cercle polaire, on aura $ss = .838587$, pour le quarré du sinus de 66 degrés & 19 minutes, & en mettant ces nombres, on trouvera $D = \frac{685}{143921}$, d'où l'on tire le rapport demandé, comme 143921 est à 143236, ou comme 210 est à 209. Comme la solution de ce probleme est juste, il faut que la différence entre celui-ci & celui que nous avons donné, vienne des quantités que M. de Maupertuis a négligées comme peu de chose, & cependant assez considérables pour changer le rapport demandé.

Nous avons fait voir que les accroissemens de gravité, depuis l'équateur jusqu'aux poles, sont à peu près comme $\frac{1}{2}ntt$, ou à cause que $\frac{1}{2}n$, est constante comme tt les quarrés des sinus de latitude ; & c'est par cette regle que les Auteurs construisent

communément des Tables sur les longueurs des Pendules pour les différens endroits de la terre; mais comme cette approximation ne va guere plus loin qu'à quatre figures, elle n'est pas suffisamment exacte: c'est pourquoi, il vaut mieux faire ces longueurs réciproquement proportionnelles à $\sqrt{1-ntt}$, comme nous avons fait voir dans l'article 47; & alors on est certain que les valeurs qu'on trouve, seront d'autant plus exactes, que l'on poussera l'extraction de la racine quarrée de cette quantité plus loin.

PROBLEME.

51. *Le rapport entre les diametres de l'équateur de la terre, & celui d'une planete quelconque, étant donné aussi-bien que celui de leurs tems de révolution, il s'agit de trouver le rapport entre les axes de cette planete.*

Soit r le tems de révolution de la terre, t celui de la planete, & soit le rapport entre les diametres des équateurs, comme l'unité à a, cela posé, puisque les forces centrifuges sont dans la
* Art. 34. raison des rayons directs, * & des quarrés des tems de révolution inverse; en nommant n la force centrifuge de la terre, on aura $\frac{1}{rr}:\frac{a}{tt}::n:\frac{anrr}{tt}=$ à la force centrifuge de cette planete: c'est pourquoi, si le rayon de l'équateur est l'unité, & le demi-
* Art. 47. axe b, on aura * $1-bb=\frac{anrr}{tt}$, ou $bb=1-\frac{anrr}{tt}$, dont la racine quarrée donnera le rapport demandé.

EXEMPLE.

52. Soit Jupiter la planete: comme la terre tourne autour de son axe en 23 heures 56 minutes, & Jupiter en 9 heures & 56 minutes, & que les quarrés de ces tems sont comme 29 à 5, à peu près, ainsi $rr=29$, $t=5$: & comme nous avons trouvé, en comparant les diametres des planetes, que le diametre de Jupiter étoit 9. 1638 diametres de la terre, on aura $a=9.16$, à peu près: nous avons aussi trouvé $n=\frac{431}{46656}$; d'où en mettant ces valeurs, on aura $bb=\frac{11449}{23328}$, dont la racine quarrée donne $b=\frac{107}{153}$, pour le rapport demandé; ce qui est comme 5 à 7, à peu près.

Il faut remarquer que le rapport entre les diametres des équateurs que nous venons de supposer, ne pourroit pas être le

véritable ; & dans ce cas, il peut arriver que le rapport que nous venons de trouver ne soit point exact ; car vu la grande difficulté que les Astronomes trouvent en observant des objets qui paroissent si petits par rapport à leurs éloignemens, il n'est presque pas possible qu'ils puissent distinguer la différence qui se trouve entre leurs axes : cependant il est vraisemblable qu'ils cherchent toujours à mesurer les plus grands, parce qu'il est plus visible, ou qu'il donne un angle plus mesurable.

Des noyaux ou vuides dans les Planetes.

Plusieurs Philosophes croient qu'il peut y avoir des vuides dans le centre des planetes. Quoique cela ne soit qu'une conjecture, elle est néanmoins fondée sur de très-bonnes raisons ; en effet quand on considere le grand amas de matiere dans les planetes qui ne semble pas avoir aucun usage après une certaine profondeur, on est tenté de croire que ce que nous voyons n'est autre chose qu'une croute d'une certaine épaisseur. Car selon la bonne philosophie, Dieu ne créa rien en vain, & ce qui n'est d'aucun usage est superflu : par conséquent, si les planetes sont solides, la matiere que nous croyons inutile doit être de quelqu'usage inconnu aux hommes. Cependant comme les hommes ne peuvent juger des choses que selon la raison, & que cette raison nous persuade que les planetes doivent avoir des noyaux vuides, il n'y a point d'absurdité de supposer qu'il y en a un en effet.

S'il y a un vuide dans les planetes, il faut que la matiere ait quelqu'autre propriété aussi universelle que celle que nous appellons la gravité ; autrement elle ne s'arrêtera pas à une certaine distance du centre, comme cela doit être, selon la supposition d'un vuide. Il semble en effet qu'il y a une propriété répulsive dans la nature, comme il y en a une qui attire les corps vers un certain point : car nous voyons dans les expériences faites sur l'Electricité, que certains corps fort légers ne s'approchent du verre frotté que jusqu'à une certaine distance, & après cela, ils s'éloignent avec beaucoup de vivacité ; & que quelques autres corps un peu plus pesans, sont comme suspendus en l'air, sans s'approcher ni d'un côté ni de l'autre, de sorte que la valeur attractive paroît être en équilibre avec la vertu répulsive.

Le Chevalier Newton croyoit qu'il y avoit une telle vertu

dans chaque particule de la matiere, qui les empêchoient de se toucher tout-à-fait les unes & les autres : en effet, on sçait que les corps les plus solides ont des pores, ce qui seroit assez difficile d'expliquer, sans cette vertu, puisqu'il n'y auroit point de raison qui les empêchât de se toucher. Car quand on diroit que ce sont les figures des parties primitives de la matiere qui les empêchent de se joindre, cela ne peut pas être la cause que les parties de l'air & des autres substances fort déliées, se tiennent en une distance considérable, eu égard à leur grosseur, & ne s'approchent davantage. Quoique nous ignorions encore la loi selon laquelle cette force expulsive agit, il est néanmoins certain qu'elle en suit toujours une qui est constante : je veux dire que si la force augmente ou diminue, selon les quarrés ou cubes des distances dans certains cas, elle augmentera ou diminuera aussi dans tous les autres.

PROBLEME.

Fig. 12. 53. *Trouver la figure du noyau vuide dans une sphere qui ne tourne pas autour de son axe.*

Supposez que la sphere soit décrite par la révolution du demi-cercle A B D, autour du diametre A D, comme axe, il est clair que si la matiere s'arrête dans un point quelconque *a* du rayon C A, elle s'arrêtera aussi dans les points *b*, *d*, également distans du centre C, dans le rayon C B & C D ; puisque la gravité est égale à des distances égales du centre, par ce que nous avons prouvé ci-devant, aussi-bien que la force répulsive par supposition ; par conséquent ces deux forces doivent être en équilibre entr'elles à des distances égales du centre.

COROLLAIRE.

Fig. 13. 54. Delà il suit que si cette sphere venoit à tourner autour de l'axe A D, de maniere qu'elle s'alongeât en un sphéroïde, il est clair que le noyau vuide s'alongeroit aussi en même proportion, & deviendroit un sphéroïde semblable au premier : puisque la même force centrifuge qui alongeroit le cercle du rayon B C, alongeroit aussi le cercle du rayon C*b* en proportion, parce que la force centrifuge en B est à la force centrifuge en *b*, comme C B est à C*b*.

N. B. Quelques Auteurs qui ont parlé du noyau vuide, pré-

tendent que la figure n'eſt pas ſemblable au ſphéroïde en dehors ; mais comme ils n'ont point démontré que cela doit être ainſi, & que c'eſt le contraire, comme il paroît dans le corollaire précédent, on ne s'arrêtera pas à ce que ces Auteurs ont dit ſur ce ſujet.

PROBLEME.

55. *Trouver le rapport entre le rayon* C b *du noyau vuide dans une ſphere au rayon de la ſphere.*

Quoique nous ne ſçachions pas préciſément par quelle loi cette force expulſive agit, elle doit néanmoins être telle, que ſa force ſoit plus grande au centre qu'ailleurs, & elle doit diminuer en s'éloignant du centre, & par conſéquent cette loi ne peut être dans la raiſon directe des rayons Cb, & encore moins dans la raiſon directe d'aucune des puiſſances de ſes rayons ; car comme la gravité diminue dans la raiſon inverſe des quarrés des diſtances, il faut que cette force diminue dans une raiſon inverſe plus grande que la premiere.

Or ſi l'on ſuppoſe que la gravité ſoit comme les diſtances, comme cela arrive ſur la ſurface des planetes, & que la force expulſive ſoit comme les quarrés des diſtances inverſes, l'équation qui en réſulte, contient des abſurdités ; & ainſi ces forces ne peuvent être dans cette raiſon ; mais ſi l'on ſuppoſe que la gravité ſoit dans la raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & la force expulſive dans la raiſon inverſe des cubes des diſtances, l'équation qui réſulte de cette ſuppoſition, contiendra le rapport demandé.

Car ſi C B $= x$, bB $= y$, on aura $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{y^2}$, ou $yy = x^3$, dans le cas de l'équilibre ; & ſi le rayon C B eſt l'unité, on aura $1 - x = y$, & $1 - 2x + xx = yy$; donc $1 - 2x + xx = x^3$, ou $1 = 2x - xx + x^3$: or ſi l'on fait uſage de la regle de Daniel Bernoulli, en ſuppoſant trois unités pour les trois premiers termes de la ſuite, on aura 1. 1. 1. 2. 4 7. 12. 21. 37. 65. 114. 200. 351. 616. 1081 ; & en diviſant le pénultieme terme 616 par le dernier 1081, on aura $x = .56984$, & par conſéquent $y = .43016$; ainſi le rayon Cb eſt à bB, comme 7123 eſt à 5377.

Nous imaginons que la raiſon entre les rayons que nous venons de donner eſt la plus probable, en ce que la force expulſive ne peut guere être plus grande : car quand on ſuppoſe que cette

force est comme la quatrieme puissance des distances, on trouve le rapport de Cb à bB, comme 2236 à 1000; mais après cela le rapport augmente beaucoup plus.

COROLLAIRE.

Fig. 13. 56. Puisque le noyau dans un sphéroïde qui tourne autour de son axe, est semblable au sphéroïde, il s'ensuit, que si le sphéroïde est formé par la révolution de l'ellipse ABD autour de son axe AD, & le noyau vuide par l'ellipse *abd*, semblable à la premiere, on aura Cb est à CB, comme 56984 est à 100000. Or comme le rayon de l'équateur de la terre est de 3282930. 5 toises, le rayon Cb de l'équateur du noyau sera de 1870745 toises, & $bB = 1412185$.

Voilà à peu près ce que nous avons jugé à propos de dire touchant les figures des planetes : nous sommes persuadés de l'avoir tiré des principes les plus simples qu'il peut y avoir, sur un sujet qui a fait tant de bruit, & que la plûpart des Mathématiciens les plus célebres de notre tems ont jugé digne de leur attention; & s'ils n'ont point réussi selon que l'on devoit l'attendre de leurs génies, c'est qu'ils ont tous embrassé des principes très-composés, au moyen desquels il est très-difficile de sçavoir si l'on ne s'est point écarté de la vérité ; & la plûpart ont trop négligé leurs calculs numériques pour trouver le véritable rapport entre l'équateur & l'axe, quand même ils auroient été d'ailleurs bien fondé, & que leurs principes seroient bons. Il est vrai que l'on ne tombe pas d'abord sur la voie la plus courte dans un sujet nouveau, parce que l'on croit que cela dépend de principes peu communs : mais ce qui surprend, c'est que quelques-uns ayent abandonné les mêmes principes dont nous nous sommes servis, après les avoir donné, pour en adopter d'autres moins clairs & moins aisés, comme si les choses simples n'étoient pas dignes de leurs plumes. Un autre défaut que je trouve, est que les uns ont trop suivi les autres, comme s'il étoit suffisant que leurs théories s'accordassent avec celles de ceux qui ont écrit avant eux, ce qui est une conduite pernicieuse pour l'avancement des Sciences & des Arts.

N. B. Le Chevalier Newton dit, dans la dix-neuvieme proposition du troisieme Livre, que la différence entre l'équateur & l'axe de la terre, est de $17\frac{1}{8}$ milles d'Angleterre ; & dans la proposition suivante, que cette différence doit être un peu plus grande,

grande, pour s'accorder avec les expériences faites sur la longueur des Pendules : or, selon notre théorie, cette différence est de $19\frac{3}{10}$ de milles ; ce qui s'accorde assez bien avec ce que ce grand homme a dit ; & par conséquent il a mieux réussi dans sa théorie qu'aucun des Auteurs qui ont traité ce sujet.

SECONDE PARTIE.

Du Mouvement dans un milieu résistant.

NOUS avons supposé dans la premiere partie que les corps en mouvement, ne rencontroient d'autre résistance que la gravité qui les détournoit de leurs directions en lignes droites, & les faisoit décrire des lignes courbes ; ce qui rend les loix du mouvement fort simples & fort aisées : mais comme les corps ne peuvent se mouvoir dans un milieu, sans rencontrer plus ou moins de résistance, selon que ce milieu est plus ou moins dense, il est nécessaire de faire voir dans cette seconde partie qu'elles doivent être les loix lorsque la résistance est à la gravité dans un rapport constant ou variable donné ; ou, si la courbe décrite par le corps est donnée, de trouver quel rapport la résistance suit ; & en général en quoi consiste la différence entre le mouvement dans un milieu sans résistance & dans un qui résiste : par ce moyen on pourra déduire ce qu'il y a de plus difficile dans le mouvement dans un milieu quelconque, comme on va voir.

THEOREME I.

56. *La fluxion de la vîtesse v, acquise par une force quelconque P, dans le tems t, dans un milieu dont la résistance est exprimée par* R, *est comme le rectangle* $\overline{P - R} \times \dot{t}$. Fig. 14

Si l'abscisse A P exprime le tems, l'ordonnée P N de la courbe *a* N, la force P, & l'ordonnée P M de la courbe A M, la résistance, il est évident que l'espace A *a* N P exprimera l'effet de la force P pendant le tems A P, & l'espace A M P, l'effet de la résistance pendant ce tems ; & par conséquent la différence A *a* N M de ces espaces exprimera la vîtesse effective acquise

pendant le tems AP : or $P \times \dot{t}$, exprime la fluxion de l'espace AaNP, & $R \times \dot{t}$ celle de l'espace AMB ; par conséquent la fluxion de la vîtesse v est comme $\overline{P - R} \times \dot{t}$.

THEOREME II.

57. *La fluxion de l'espace s parcouru avec une vîtesse v, acquise dans le tems t, sera comme v ṫ, c'est-à-dire, de même que dans un milieu sans résistance.*

Car il est clair que les espaces parcourus dans le même tems, sont comme les vîtesses, puisque si P M exprime la vîtesse acquise pendant le tems A P, l'espace A M P sera comme l'espace parcouru, & la fluxion $v \dot{t}$ comme la fluxion de l'espace parcouru, de même que dans un milieu sans résistance : donc la seule différence ne consiste qu'en ce que la vîtesse est diminuée ici par la résistance, & ainsi l'espace parcouru est diminué en proportion.

THEOREME III.

58. *La résistance du milieu se fait seulement dans la direction du corps, & en nulle autre part.*

Car la résistance ou pression est égale & opposée dans toute autre direct on que celle du corps ; & par conséquent ne peut retarder ni avancer le mouvement du corps ; ainsi les équations que nous avons trouvées dans la premiere partie, seront ici de même, excepté celles qui regardent la direction du corps.

THEOREME IV.

59. *La résistance d'un milieu est dans la raison composée du quarré de la vîtesse, de la densité & de la tenacité.*

Car dans un milieu uniforme & sans tenacité, un corps frappe avec une vîtesse nv, chaque particule n fois plus forte qu'avec la vîtesse v, & rencontre aussi n fois plus de particules en même tems ; ainsi la résistance seroit comme le quarré de la vîtesse dans ce cas.

Dans un milieu n fois plus dense, le corps frappera n fois plus de particules dans le même tems & avec la même vîtesse ; & comme le corps trouve aussi plus ou moins de résistance, selon qu'il trouve plus ou moins de difficulté à séparer les parties les unes des autres, il est clair que la résistance d'un milieu est

dans la raison composée des quarrés des vîtesses, de la densité & de la tenacité.

THEOREME V.

60. *Dans le même milieu la résistance, que les corps de differentes grosseurs souffrent, sont dans la raison directe de leur surface & de leur poids inverse.*

Il est clair que la résistance augmente selon la grosseur des corps, & diminue en proportion que leurs poids augmente; car c'est l'excès du poids du corps pardessus celui du milieu qui les pousse, & par conséquent les résistances que souffrent des corps inégaux en grosseur & en poids, sont dans la raison directe de leurs surfaces & de leurs poids inverse.

COROLLAIRE I.

61. Delà il suit, puisque dans les corps semblables les surfaces sont comme le quarré de leurs axes ou diametres, & leur solidité comme les cubes de leurs axes ou diametres, il s'ensuit que les corps semblables rencontrent des résistances qui sont comme leurs diametres inverses. Par conséquent la résistance des corps semblables diminue dans la même raison que leurs diametres augmentent. Par exemple, la résistance d'un boulet de canon de trois pouces de diametre sera double de celui d'un autre de six pouces; ce qui fait voir que les boulets des gros canons doivent aller plus loin que ceux des petits qui partiront avec la même vîtesse.

COROLLAIRE II.

62. Il est aussi évident que les corps semblables, de différentes gravités spécifiques, sont dans la raison des quarrés de leurs diametres directes & de leurs poids inverses. Puisque leurs surfaces sont comme les quarrés de leurs diametres, & leurs gravités spécifiques comme leurs poids. Par exemple, une bombe de 12 pouces pese environ 200 livres, quand elle est chargée, & le diametre d'un boulet de 24 est de 5. 5 en Angleterre; ainsi la résistance du boulet est à la résistance de la bombe, comme $\frac{30.25}{24}$ est à $\frac{144}{200}$, ou comme 7 est à 4, à peu près.

THEOREME VI.

63. *Dans un milieu dont les parties sont placés à des distances égales, & qui n'ont point de ténacité, ni d'élasticité, une sphere avec une vîtesse uniforme, perdra tout son mouvement en parcourant un espace qui est à quatre troisiemes de son diametre, comme la densité du corps est à la densité du milieu.*

Car si le cylindre circonscrit se meut dans ce milieu avec la même vîtesse uniforme, & dans la direction de son axe, en parcourant un espace égal à la longueur de son axe, il déplacera un volume du milieu égal au cylindre, & par conséquent déplacera une quantité de matiere qui est à la quantité contenue dans le cylindre, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre; & en parcourant un espace qui est à la longueur de son axe, comme la densité du cylindre est à la densité du milieu de ce cylindre, il déplacera une quantité de matiere du milieu égale à la quantité de matiere contenue dans le cylindre; & par conséquent le cylindre communiquera tout son mouvement à une quantité de matiere égale à celle qu'il contient, & ainsi perdra tout son mouvement.

Or comme la sphere ne rencontre que la moitié de la résistance du cylindre, cette sphere doit parcourir deux fois l'espace que le cylindre a parcouru avant de perdre tout son mouvement, s'il est de la même pesanteur: mais comme la *sphere* n'est que les deux tiers du cylindre, elle doit parcourir les deux tiers du double de l'espace parcouru par le cylindre avant de perdre toute sa vîtesse: mais les deux tiers de 2 est $\frac{4}{3}$; & par conséquent, la sphere perdra tout son mouvement en parcourant un espace qui est à quatre troisiemes de la longueur de son diametre, comme la densité de la sphere est à la densité du milieu.

COROLLAIRE.

64. Delà il suit, que si d exprime le diametre de la sphere, m sa densité, n celle du milieu, & r l'espace que le globe doit parcourir avant de perdre toute sa vîtesse, on aura $m : n :: r : \frac{4d}{3}$, ou $r = \frac{4md}{3n}$.

Or comme un corps qui tombe librement pendant un certain

tems acquiert une vîtesse, laquelle étant continuée uniformément, fera parcourir au corps un espace double dans le même tems, il s'ensuit qu'un corps qui tombera de la moitié de la hauteur r, dans un milieu sans résistance, acquerra la plus grande vîtesse qu'il puisse avoir dans ce milieu, & il continuera après cela avec une vîtesse uniforme, & la résistance deviendra égale à sa gravité : donc si l'on met $\frac{1}{2}r$, au lieu de r dans l'égalité ci-dessus, on aura $r = \frac{8md}{3n}$. Par conséquent r exprimera le double de la hauteur qu'un corps en tombant dans un milieu sans résistance, acquerra avec la plus grande vîtesse qu'il puisse avoir dans un milieu dont la densité est à celle du corps, comme n est à m.

PROBLEME I.

65. *Si un corps est jetté en haut dans une direction verticale, avec une vîtesse donnée dans un milieu dont la résistance est exprimée par* R, *l'on demande la hauteur à laquelle le corps peut monter, & le tems employé.*

Si z exprime la hauteur indéterminée, v la vîtesse, & t le tems, on aura* $\dot{v} = \overline{P - R} \times \dot{t}$, & $v\dot{t} = \dot{z}$; & en mettant la valeur de $\dot{t}$ dans la premiere équation, il viendra $v\dot{v} = -\overline{P - R} \times \dot{z}$ en montant, & $v\dot{v} = \overline{P - R} \times \dot{z}$ dans la descente, selon la remarque après l'article dixieme Ainsi en connoissant le rapport entre la force P & la résistance R, on trouvera la vîtesse & le tems écoulé. * Art. 58.

EXEMPLE I.

66. Soit la force P constante & l'unité, comme la gravité proche de la surface de la terre, & la résistance comme le quarré des vîtesses, c'est-à-dire, $R = \frac{vv}{r}$, en mettant cette valeur de R & l'unité pour P dans l'équation ci-dessus, on aura $v\dot{v} = \dot{z} - \frac{vv\dot{z}}{r}$ dans la descente : d'où l'on tire $\dot{z} = \frac{rv\dot{v}}{r - vv}$; dont la fluente est $-z = \frac{1}{2}r \log. \frac{r - vv}{r}$, lorsque le corps commence son mouvement du point de repos. Ou si q exprime le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura $-\frac{2z}{r} \log. q =$

log. $\frac{r - vv}{r}$, ou bien $q^{-\frac{c z z}{r}} = \frac{r - vv}{r}$, d'où l'on tire $vv = r - r q^{-\frac{zz}{cr}}$. Ainsi on connoîtra la vîtesse en connoissant l'espace z parcouru.

En mettant la valeur de $\dot{z}$ ci-dessus dans $v\dot{t} = \dot{z}$, on aura $\dot{t} = \frac{r\dot{v}}{r - vv}$, dont la fluente est $t = \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \log. \frac{r^{\frac{1}{2}} + v}{r^{\frac{1}{2}} - v}$.

Mais dans la montée on a $\dot{z} = \frac{-rv\dot{v}}{r + vv}$, dont la fluente est $z = A - \frac{1}{2} r \log. \frac{r + vv}{r}$, & si c exprime la vîtesse projectile, lorsque $z = 0$, on aura $v = c$, & $A = \frac{1}{2} r \log. \frac{r + c}{r}$, & par conséquent $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r + cc}{r + vv}$. On a aussi $\dot{t} = \frac{-r\dot{v}}{r + vv}$ dans ce cas ; & si a exprime un arc de cercle, dont le rayon est à la tangente comme $r^{\frac{1}{2}}$ est à v, on aura $t = A - a$, lorsque A exprime aussi un arc de cercle, dont le rayon est à la tangente, comme la racine quarrée de r est à c.

Dans un milieu sans résistance, la quantité r est infinie en comparaison de vv : ainsi $\dot{z} = \frac{rv\dot{v}}{r - vv}$, deviendra $\dot{z} = v\dot{v}$, ou $2z = vv$, & $\dot{t} = \frac{r\dot{v}}{r - vv}$, devient $\dot{t} = \dot{v}$, ou $t = v$; ce qui est la même chose que nous avons trouvée dans la premiere partie.

Si h exprime le double de la hauteur d'où un corps doit tomber dans un milieu sans résistance, pour acquérir la vîtesse v, on aura $h = vv$, & $R = \frac{vv}{r}$ deviendra $R = \frac{h}{r}$; & lorsque $h = r$, on aura $R = 1$, c'est-à-dire, égale à la gravité du corps, conformément à ce que nous avons dit dans l'article 64.

EXEMPLE II.

67. *Supposant qu'un boulet de canon de quatre pouces de diametre est jetté en haut, avec une vîtesse acquise en tombant de la hauteur de 2968 pieds dans un milieu sans résistance ; l'on demande la hauteur à laquelle le corps montera & le tems employé.*

On aura $cc = 5936$, étant le double de la hauteur 2968 ; & comme la gravité spécifique du fer fondu est à celle de l'air, comme 5940, est à l'unité, selon notre table, on aura $n = 1$,

* Art. 64. $m = 5940$, $d = \frac{1}{3}$; ces valeurs étant mises dans * $r = \frac{8md}{3n}$, don-

seront $r = 5280$. Or si l'on fait $v = 0$, dans $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+cc}{r+vv}$, on trouvera $z = 1988.97$ pieds pour la plus grande hauteur à laquelle le corps puisse monter avec la vîtesse c.

On trouvera l'arc A de 46 degrés & 40 minutes, ou de $46\frac{2}{3}$ degrés ; ce qui donne * $t = 59.1719$ pieds ; & comme un corps tombe de la hauteur de 32. 2 pieds dans une seconde de tems, dont la racine quarrée est 5. 674 ; en divisant la valeur de t par 5. 674, on aura * 10. 43 secondes pour le tems écoulé ; ce qui est 68 secondes moindre que 11. 11 secondes, le tems que le corps auroit employé dans la descente de la même hauteur, dans un milieu sans résistance.

* Art. 232.

* Art. 81.

EXEMPLE III.

68. Supposant que l'espace parcouru en descendant soit égal à l'espace en montant, l'on demande la vîtesse acquise & le tems écoulé.

Comme on a $z = \frac{1}{2} r \log. \frac{r+cc}{r}$ dans la montée, on aura $\frac{2z}{r} l q = \log. \frac{r+cc}{r}$, ou $q^{\frac{2z}{r}} = \frac{r+cc}{r}$: cette valeur étant mise dans $vv = r - r q^{-\frac{2z}{r}}$, donne $vv = \frac{rcc}{r+cc}$. Or comme $cc = 5936$, & $r = 5280$, en mettant ces valeurs, on trouvera $vv = 2794$ pieds.

Puisque $t = \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \log. \frac{r^{\frac{1}{2}}+v}{r^{\frac{1}{2}}-v}$; & que $v = 52.858$, $r^{\frac{1}{2}} = 72.663$, ces valeurs étant mises, on trouvera $t = 67\ 0861$ pieds, ce qui étant divisé par 5. 674, la racine quarrée de 32. 2, donne 11. 82 secondes ; ce qui excede le tems de la descente dans un milieu sans résistance de 71 secondes, & celui 10. 43 de la montée de 1. 39 secondes.

Il faut remarquer que les expressions logarithmiques, sont du genre hyberbolique, & ainsi quand on fait usage des tables ordinaires, il faut toujours multiplier le logarithme que l'on a trouvé, par le logarithme 2. 302585, hyperbolique de 10, pour avoir les valeurs de ces expressions : ainsi on doit se souvenir de cela dans la suite, lorsque l'on se sert des expressions logarithmiques.

L'on peut aussi exprimer les valeurs des tems, vîtesses & espaces parcourus, par des suites infinies, assez commodément,

sans faire usage des tables des sinus & logarithmes, comme on va voir.

* Art. 65. L'équation * $v\dot{v} = \dot{z} - \frac{vv\dot{z}}{r}$, dans la descente, étant réduite en une suite infinie, en supposant $vv = az + bz^2 + cz^3 +$ &c. donnera $vv = 2z - \frac{4zz}{2r} + \frac{8z^3}{6rr} - \frac{16z^4}{24r^3} + \frac{32z^5}{120r^4} -$ &c. d'où en supposant $2h = vv$, & $z = rx$, ou, ce qui revient au même, en mettant rz pour z, on aura $h = r \times$ par. $z - zz + \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{3}z^4 + \frac{2}{15}z^5 -$ &c. Mais il faut remarquer qu'on doit multiplier la valeur de h par 2, pour avoir celle de vv, puisque nous avons supposé $2h = vv$.

EXEMPLE IV.

69. Soit la hauteur z, comme ci-devant; c'est-à-dire, $z = 1988.97$, & comme nous avons mis rz au lieu de z, il faut diviser 1988.97, par la valeur 5280 de r; ce qui donne $z = .3767$, $zz = .1419$, $z^3 = .0534$, $z^4 = .0201$, $z^5 = .0076$: en mettant ces valeurs dans la suite ci-dessus, on aura h — 1397.5, & $vv = 2795$, comme ci-devant, qui ne diffèrent que d'une unité.

L'équation $\dot{t} = \frac{r\dot{v}}{r - vv}$ dans la descente, étant réduite en une suite infinie par une division continuelle, donne $t = v + \frac{v^3}{3r} + \frac{v^5}{5rr} + \frac{v^7}{7r^3} +$ &c. & en supposant $hr = vv$ deviendra $t = v \times$ par $1 + \frac{1}{3}h + \frac{1}{5}hh + \frac{1}{7}h^3 + \frac{1}{9}h^4 + \frac{1}{11}h^5 +$ &c.

EXEMPLE V.

70. Soit $vv = 2795$, comme ci-devant, & $r = 5280$, on aura $h = .5294$, & $v = 52.867$; & en prenant les 10 premiers termes de la suite, on aura 1. 2689; ce qui étant multiplié par 52. 867, la valeur de v, on aura $t = 67.086$, comme ci-devant.

Comme nous avons $-\dot{z} = \frac{rv\dot{v}}{r + vv}$, cette expression étant réduite en une suite infinie, par une division continuelle, & la fluente étant prise, donne $A - z = \frac{1}{2}vv - \frac{v^4}{4r} + \frac{v^6}{6rr} - \frac{v^8}{8r^3} +$ &c; mais lorsque $z = 0$, on aura $v = c$; & par conséquent $A = \frac{1}{2}cc - \frac{c^4}{4r} + \frac{c^6}{6rr} - \frac{c^8}{8r^3} +$ &c, & lorsque $v = 0$, on aura $z = \frac{1}{2}cc - \frac{c^4}{4r} + \frac{c^6}{6rr} - \frac{c^8}{8r^3} +$ &c. pour la plus grande hauteur.

Ou

Ou en faisant $hr = cc$, cette derniere égalité deviendra $z = rh \times$ par $\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{hh}{6} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{10} - \frac{h^5}{12} +$ &c.

Comme cette suite ne converge que fort lentement dans certains cas, on pourroit trouver la valeur de z, par le moyen de la méthode des différences : il est clair que si $hr = cc$, on aura $t = c \times$ par $1 - \frac{1}{3}h + \frac{1}{5}hh - \frac{1}{7}h^3 + \frac{1}{9}h^4 -$ &c.

PROBLEME II.

71. *Si un corps jetté dans une direction* AE *donnée, avec une vîtesse quelconque* c *aussi donnée, est poussé ou attiré dans une direction perpendiculaire à la ligne horizontale* AK, *par une force quelconque; l'on demande l'équation qui exprime la relation entre les abscisses* AP, *& les ordonnées* PM *correspondantes.* Fig. 15.

Soit la partie TM de la tangente en M, $= \dot{z}$, la perpendiculaire TR $= \dot{x}$, MR $= \dot{y}$, AP $= x$, PM $= y$, soit enfin RS perpendiculaire à MT : cela posé, en nommant p la force dans la direction PM, v la vîtesse en M, t le tems de la description de l'arc AM, on aura * $v\dot{t} = \dot{z}$; & la force p dans la direction MR, est à son effet dans la direction MT, comme MR est à MS, ou à cause des triangles semblables, RMS, RMT, comme MT est à MR : cet effet sera donc exprimé par $\frac{p\dot{y}}{\dot{z}}$: par conséquent $\overline{\frac{p\dot{y}}{\dot{z}} - R} \times \dot{t} = \dot{v}$, ou $v\dot{v} = p\dot{y} - R\dot{z}$, par l'article 56. * Art. 57.

La force p dans la direction MR, est à son effet dans la direction RS, perpendiculaire à la tangente comme MR est à RS, ou comme MT est à RT; ainsi cet effet sera exprimé par $\frac{p\dot{x}}{\dot{z}}$: & comme la résistance ne change rien * dans cette direction, on aura la même équation $p\dot{y}\ddot{z} + vv\ddot{z} = 0$, ou $p\dot{z}^2 + vv\ddot{y} = 0$, que dans l'article 13. Par le moyen de ces trois équations, celle qui exprime la relation entre les co-ordonnées x, y, sera connue lorsque la résistance R est donnée. * Art. 58.

N. B. On doit remarquer ici, comme on a fait dans un milieu sans résistance, que si v & y augmentent ou diminuent ensemble, on a toujours $v\dot{v} = p\dot{y} - R\dot{z}$; mais si l'une de ces quantités augmente lorsque l'autre diminue, on doit avoir $v\dot{v} = -p\dot{y} - R\dot{z}$.

EXEMPLE.

72. *Supposant la résistance du milieu, comme le quarré des vitesses, la force* p *constante & égale à l'unité, & le reste comme ci-devant, l'on demande la nature de la courbe décrite par le corps.*

L'on aura $v\dot{v} = -p\dot{y} - R\dot{z}$, & $p\dot{y}\dot{z} + vv\ddot{z} = 0$, en montant ; & si $R = \frac{vv}{r}$, en mettant cette valeur, il viendra $v\dot{v} = -p\dot{y} - \frac{vv\dot{z}}{r}$; & si l'on met au lieu de p sa valeur, prise dans la seconde équation, $v\dot{v} = \frac{vv\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{vv\dot{z}}{r}$, ou en divisant par vv, & transposant le premier terme du second membre dans le premier, on aura enfin $\frac{\dot{v}}{v} - \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = -\frac{\dot{z}}{r}$, dont la fluente est $\log. \frac{v}{\dot{z}} = -\frac{Az}{r}$; en supposant $\dot{x} = 1$: & si q exprime le nombre dont le logarithme hyberbolyque est l'unité, on aura $\log. \frac{v}{\dot{z}} = -\frac{Az}{r} \log. q$, & par conséquent $v = A\dot{z}q^{-\frac{z}{r}}$.

Or en A, où $v = c$, $z = 0$; en nommant k le sinus de l'angle EAB d'élévation, on aura $\dot{z} : \dot{x} :: 1 : k$: ce qui donne $A = ck$: par conséquent la dernière équation deviendra $v = ck\dot{z}q^{-\frac{z}{r}}$. En mettant cette valeur de v dans $p\dot{z}^2 + vv\ddot{y} = 0$, on aura $q^{-\frac{2z}{r}} + cckk\ddot{y} = 0$; pour l'équation de la courbe.

Lorsque le corps est jetté dans la direction horizontale, comme du sommet D, $\dot{z}$ & $\dot{x}$ deviennent égales, & k égal à l'unité, par conséquent $q^{-\frac{2z}{r}} = cc\ddot{y}$, sera l'équation dans ce cas.

Pour avoir la fluente de l'une ou l'autre de ces équations, il n'y a que deux moyens que je sçache : l'un est par des suites infinies, & l'autre par la méthode des différences. Mais comme on trouve des difficultés dans l'un & l'autre cas, nous les donnerons tous les deux, afin de se servir de celui que l'on jugera à propos.

J'avois donné les problêmes sur la jettée des corps dans mes élémens de Mathématiques, par les suites infinies, sans y mettre la démonstration : mais je ne fis pas alors attention que les suites, telles que je les ai publiées, ne convergent que dans fort peu de cas ; & ainsi elles ne peuvent être que de très-peu d'usage, sans faire quelque légere addition ou changement. En faisant cette

addition ou changement, on verra que c'est là plus courte méthode dont on puisse se servir, comme le lecteur en sera convaincu par ce qui suit.

PREMIERE MANIERE.

Pour résoudre le problême, il faut prendre la fluxion de l'équation $-q^{\frac{2z}{r}} = cckk\dot{y}$, ce qui donne $-\frac{2\dot{z}}{r}q^{\frac{2z}{r}} = cckk\ddot{y}$; la derniere étant divisée par la premiere, donne $r\ddot{y} = 2\dot{z}\dot{y}$. Or si l'on suppose y égale à une suite infinie composée de x & de ses puissances, comme la premiere égalité ci-dessous, on aura les autres en prenant la fluxion premiere, seconde & troisieme; & en supposant la fluxion de x constante & égale à l'unité, afin de rendre le calcul plus simple & moins embarrassant.

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + fx^5.$$
$$\dot{y} = a + 2bx + 3cxx + 4dx^3 + 5fx^4.$$
$$\ddot{y} = 2b + 6cx + 12dxx + 20fx^3.$$
$$\dddot{y} = 6c + 24dx + 60fx^2.$$

Le quarré de la seconde, ajouté à l'unité, donne, en faisant $1 + aa = ss$,

$$\dot{z}^2 = ss + 4abx + 6acx^2. \\ + 4bbx^2.$$

dont la racine est $\dot{z} = s + \frac{2abx}{s} + \frac{3ac}{s}x^2.$
parce que $ss - aa - 1.$ $\qquad + \frac{2bb}{s^3}x^2.$

Ces valeurs étant mises dans l'équation $r\dddot{y} = 2\dot{z}\ddot{y}$, donnera

$$6rc + 24rdx + 60rfxx = 4bs + 12csx + 24dsx^2. \\ + \frac{8abbx}{s} + \frac{36abcx^2}{s}. \\ + \frac{8b^3x^2}{s^3}.$$

D'où égalant les coefficiens des termes homologues, on aura $3rc = 2bs$, $6rd = 3cs + \frac{2abb}{s}$, $15rf = 6ds + \frac{9abc}{s} + \frac{2b^3}{s^3}$. A présent pour avoir les valeurs des deux premiers coefficiens a & b, il faut considérer qu'en A, où $x = 0$, l'équation

Pour sçavoir si cette racine ou valeur de x est celle que l'on cherche, on n'a qu'à mettre les valeurs de x, x^2, x^3 & x^4, dans la premiere de ces équations ci-dessus, & on trouvera $1 = 10003$, ce qui montre qu'il n'y a que les trois dix milliemes parties de trop.

PROBLEME IV.

75. *L'on demande la plus grande appliquée* B D.

En mettant les valeurs de a, s & n, dans celle de y, on aura $y = x\ 1.1.1\ x^2 - 1.037\ x^3 - .448\ x^4 + .1676\ x^5$; & comme $x = .3042$, $x^2 = .0925$, $x^3 = .0281$, $x^4 = .0085$, & $x^5 = .0026$: ces valeurs étant multipliées par les coefficiens respectifs, donnent $y = .1699$, qui étant multiplié par 6600, la valeur de r donnera B D $=$ 1121 pieds.

PROBLEME V.

76. *L'on demande la portée* A K.

En faisant $y = 0$, dans la derniere équation, on aura $1 = 1$, $1\ x + 1.037\ x^2 + .448\ x^3 - .1677\ x^4$, d'où prenant encore quatre unités pour les quatre premiers termes de la suite, on aura 2. 418 : 3. 977 : 7. 163 : 12. 919 : 23. 014 : 41. 26 : 74, 026 : 132, 369 : 237. 011 : 424. 252 ; & en divisant le pénultiéme terme 237. 011 par le dernier, on aura $x = .5586$, & A K $=$ 3687 pieds.

Pour sçavoir si la racine trouvée est juste, il ne faut que mettre les valeurs de x & de ses puissances dans la derniere équation ; on trouvera $1 = 1.00004$; ce qui est aussi proche qu'il est possible.

PROBLEME VI.

77. *L'on demande la vîtesse au sommet* D.

* Art. 73. Nous avons fait voir * que la vîtesse est exprimée par le rapport entre $-\ddot{y}$ & $\dot{z}^2$; & comme $\dot{z}$ est égal à $\dot{x}$, ou l'unité au sommet, on n'a qu'à diviser l'unité par la valeur de $-\ddot{y}$ pour avoir la vîtesse demandée.

* Art. 73. * Art. 75. Or comme * $-\ddot{y} = n \times$ par $2 + 5.6568\ x + 4.8887\ x^2 - 3.05\ x^3$, & $n = 1.1$, * $x = .3042$, $x^2 = .0925$, $x^3 = .0281$; ces valeurs étant mises dans cette égalité, donnent $-\ddot{y} = 4.496$; & en divisant l'unité par ce nombre, on aura $.2224$, qui étant multiplié par 6600 la valeur de r, donnera $vy = 1468$ pieds.

de y, il faut les multiplier par r pour avoir leurs valeurs véritables, selon la supposition que nous venons de faire.

Si le corps est jetté dans une direction horizontale, a devient $=0$, $s=1$, & y devient négatif; par conséquent l'équation ci-dessus deviendra $y=\frac{1}{2}nx^2+\frac{1}{3}nx^3+\frac{1}{6}nx^4+\frac{n^3+4n}{60}x^5$.

COROLLAIRE.

73. Puisque $v\dot{t}=\dot{z}$, $\dot{z}^2=-vv\ddot{y}$, ou $\dot{z}=-\ddot{y}^{\frac{1}{2}}v$, on aura $\dot{t}=-\ddot{y}^{\frac{1}{2}}$: or en prenant la seconde fluxion de l'équation ci-dessus, en supposant toujours $\dot{x}=1$, on aura $-\ddot{y}=nss+2ns^3x+3ndx^2+4nfx^3$, dont la racine est $\dot{t}=n^{\frac{1}{2}}\times$ par $s+ssx+\frac{s^3-anss}{2}x^2+$ &c. Par conséquent $t=n^{\frac{1}{2}}\times$ par $sx+\frac{1}{2}ssx^2+\frac{s^3-anss}{6}x^3$.

Quant à la vîtesse dans un point donné, on n'a qu'à chercher le rapport entre $\dot{z}^2$ & $-\ddot{y}$, & on aura ce que l'on cherche, ce qui est évident, puisque $\dot{z}^2+vv\ddot{y}=0$.

PROBLEME III.

74. *Si un boulet de canon, dont le diametre est de cinq pouces, est chassé sous un angle de 45 degrés avec une vîtesse acquise en tombant (dans un milieu sans résistance) de 3000 pieds, l'on demande l'abscisse* AB, *correspondante à la plus grande ordonnée* BD. Fig. 15.

En supposant la fluxion de $y=0$, dans l'équation de la courbe, on aura $0=a-nssx-ns^3x^2-ndx^3-nfx^4$: or, selon l'article 63, on aura $r=6600$, & $h=6000$ par supposition, $a=1$, $ss=2$, & $s=1.4142$: donc $d=1.6296$, $-f=.7625$; par conséquent $n=1.1$. Ces valeurs étant mises dans l'équation donnée $1=2.2x+3.11124x^2+1.79254x^3-.83875x^4+$ &c. ou seulement $1=2.2x+3.1x^2+1.8x^3-.8x^4$, ce qui suffit pour avoir la valeur en quatre décimales: or en faisant usage de la regle de Daniel Bernoulli, pour avoir la valeur de x, en supposant quatre unités pour les quatre premiers termes de la suite, on aura 6.3 : 17.96 : 60.04 : 198.3 : 649.67 : 2137.711 : 7025.85 : en divisant le penultieme terme 2137.71 par le dernier, on aura $x=.3042$; ce qui étant multiplié par 6600, la valeur de r, selon ce que nous avons dit à la fin de l'article 72, on aura AB $=2007$ pieds.

95634, on aura enfin 309 pieds pour l'espace parcouru uniformément par cette vîtesse dans une seconde de tems.

COROLLAIRE.

80. Il est manifeste que la valeur 1. 43095 de y, que nous venons de trouver, exprime la tangente de l'angle fait par la courbe & la portée AK en K, laquelle répond à un angle de 55 degrés & 3 minutes.

PROBLEME IX.

81. *L'angle d'élévation & la vîtesse projectile étant donnés; l'on demande le point* M, *où le corps rencontre un plan incliné* AM, *dont l'angle qu'il fait avec la ligne horizontale* AP, *est connu, la résistance étant comme le quarré de la vitesse.*

Soit AP $= x$, & la tangente de l'angle PAM, p, on aura PM $= px$. D'où en mettant $\underline{y - } px$, au lieu de y, dans l'équation ci-devant, on aura $y = a + p,\ x - \frac{1}{2} n s s x^2 - \frac{1}{3} n s^3 x^3 - \frac{1}{4} n d x^4 -$ &c.

Soit à présent le quarré de la vîtesse c projectile de 6600 pieds, c'est-à-dire, égale à la valeur de r; l'angle d'élévation avec l'horizon de 45 degrés, & l'angle d'inclinaison de 5 degrés & 43 minutes, dont la tangente est .1001; mais comme $a = 1$, $ss = 2$, $n = 1$, $d = 1.7239$, $-f = .54536$; en supposant $y = 0$, & mettant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on aura $1.1 = x + .9428 x^2 + .431 x^3 - .109 x^4 +$ &c. Or en divisant par 1.1, pour réduire l'équation égale à l'unité, & en cherchant la racine, on ne trouvera pas ce que l'on cherche; mais si l'on met $.5 + z$, au lieu de x, il viendra $1 = 6.97 z + 4.49 z^2 + .67 z^3 +$ &c. En supposant un zero & deux unités pour les trois premiers termes de la suite, on aura 0, 1, 1, 12. 13, 89. 7, 680. 34, 5152. 85. Et en divisant le pénultiéme terme par le dernier, on aura $z = .132$; & par conséquent $.5 + z = x = .632$, qui étant multiplié par 6600, la valeur de r, donnera AP $= 4171.4$ pieds.

Pour sçavoir si la valeur de x est juste, il ne faut que la substituer dans la premiere équation, & on trouvera $1 = 1.00019$; ce qui est fort proche de la véritable racine.

Si l'objet qu'on doit frapper est au dessous de la ligne horizontale, comme dans la dix-septiéme figure, il faudra mettre $y + px$,

au

au lieu de y, dans l'équation de la courbe, & trouver ensuite la racine de la même maniere que ci-dessus.

Seconde maniere de résoudre les mêmes problêmes par la méthode des différences.

PROBLEME.

82. *L'on demande les valeurs des abscisses* AP, *& ordonnées* PM, *lorsque l'angle d'élévation & la vîtesse projectile sont donnés.* Fig. 151

Nous avons trouvé * $q^{\frac{2z}{r}} = cc\ddot{y}$, lorsque c exprime la vîtesse au sommet D; & en supposant toujours $\dot{x}$ égale à l'unité, on aura $\dot{z} = \sqrt{1+\dot{y}^2}$; d'où en multipliant le premier membre de l'équation $q^{\frac{2z}{r}} = cc\ddot{y}$ par $\dot{z}$, & le second par son égal, on aura $\dot{z}q^{\frac{2z}{r}} = cc\ddot{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}$, dont la fluente est $\frac{r}{2}q^{\frac{2z}{r}} = A + cc\dot{y}\sqrt{1+\dot{y}^2} + cc \times \log. \overline{\dot{y}+\sqrt{1+\dot{y}^2}}$; ou en supposant la fluente de $\ddot{y}\sqrt{1+\dot{y}^2} = n$, on aura $\frac{r}{2}q^{\frac{2z}{r}} = A + ccn$; mais au sommet D, on a $z = \dot{y} = 0$, & $q^{\frac{2z}{r}} = 1$: donc $\frac{r}{2} = A$; & par conséquent $q^{\frac{2z}{r}} = 1 + \frac{2ccn}{r}$. Cette valeur étant mise dans * $v = c\dot{z}q^{-\frac{z}{r}}$, ou $vvq^{\frac{2z}{r}} = cc\dot{z}^2$, donne $vv = \frac{rcc\dot{z}^2}{r+2ccn}$; d'où l'on voit que le rapport entre les vîtesses au sommet & à un point quelconque, dont l'angle T est donné, est exprimé par cette équation. * Art. 271 / * Art. 272

Pour avoir les valeurs de $\dot{x}$ & de $\dot{y}$, il ne faut que mettre la valeur $1 + \frac{2ccn}{r}$ de $q^{\frac{2z}{r}}$, dans l'égalité $q^{\frac{2z}{r}} = cc\ddot{y}$, on aura $1 = \frac{rcc\ddot{y}}{r+2ccn}$; d'où en multipliant chaque membre par $\dot{y}$, il viendra $\dot{y} = \frac{rcc\ddot{y}\dot{y}}{r+2ccn}$: & si l'on multiplie le premier membre de la même équation par $\dot{x}$, & le second par son égal, c'est-à-dire, par l'unité, on aura $\dot{x} = \frac{rcc\ddot{y}}{r+2ccn}$: ou en faisant $\frac{r}{cc} = p$, ces deux

dernieres équations deviendront $\dot y = \frac{r\dot y\ddot y}{r+2n}$, & $\dot x = \frac{r\ddot y}{p+2n}$.

Il faut remarquer que les équations que nous venons de trouver des vîtesses & des co-ordonnées, sont pour la descente du corps, en commençant au sommet D; mais lorsque le corps monte, n devient négative, ce qui donne $vv = \frac{rcc\dot z^2}{r-2ccn}$, $\dot y = \frac{r\dot y\ddot y}{p-2n}$, & $\dot x = \frac{r\ddot y}{p-2n}$ dans ce cas.

Puisque l'équation $v\dot t = \dot z$ des tems, devient $c\dot t = \dot x q^{\frac{z}{r}}$, en mettant la valeur de v prise dans $v\dot x = c\dot z q^{\frac{z}{r}}$, & de ce que nous avons trouvé ci-dessus que $q^{\frac{z}{r}} = \sqrt{1 - \frac{2ccn}{r}}$, & $\dot x = \frac{r\ddot y}{p-2n}$; en substituant ces valeurs dans l'équation des tems aussi-bien que p pour $\frac{r}{cc}$, on trouvera enfin $\dot t = \frac{r^{\frac{1}{2}}\ddot y}{\sqrt{p+2n}}$.

EXEMPLE.

83. Supposant qu'un boulet de canon de 18 livres, soit chassé sous un angle de 45 degrés, avec une vîtesse acquise en tombant de la hauteur de 3000 pieds, dans un milieu sans résistance, l'on demande l'abscisse A B, correspondante à la plus grande ordonnée B D.

On a $r = 6600$, $vv = 6000$; & comme il est nécessaire d'avoir la vîtesse c au sommet, on se servira de l'équation $vv = \frac{rcc\dot z^2}{r-2ccn}$, d'où l'on tire $cc = \frac{rvv}{r\dot z^2 + 2nvv}$; mais comme $\dot z$ exprime la sécante d'un angle de 45 degrés, dont le rayon est l'unité, on aura $2 = \dot z^2$; & $\dot y$ exprimant la tangente de cet angle, sera égal à l'unité, ce qui donne $n = \dot y\sqrt{1+\dot y^2} + \log. \dot y + \sqrt{1+\dot y^2} = 1.1478$: ces valeurs étant mises dans celle de cc, donnent $cc = 1468$ pieds, ce qui est précisément la même que celle que nous avons trouvée dans l'article 77.

En divisant 6600 la valeur de r, par 1468 celle de cc, on aura $p = 4.4959$: mais pour trouver la valeur de A B, il est à propos de donner auparavant une petite table des valeurs de $2n$, selon les valeurs que l'on supposera pour $\dot y$; par ce moyen les

opérations deviendront plus aisées & plus courtes, comme on verra ci-après. La premiere colonne, formée des nombres placés sous y, expriment les valeurs de y; & la seconde, celles de $2n$ correspondantes à celles de y, qui sont à côté.

y	$2n$						
1	2.29559	$\frac{1}{4}$	.50688	$\frac{2}{5}$	.82091	$\frac{1}{8}$	.25077
$\frac{1}{3}$	.67872	$\frac{1}{2}$	1.04027	$\frac{3}{5}$	1.26642	$\frac{3}{8}$	.76722
$\frac{2}{3}$	1.42638	$\frac{3}{4}$	1.63064	$\frac{4}{5}$	1.75720	$\frac{5}{8}$	1.32727
		$\frac{1}{5}$	.40265	$\frac{1}{6}$	.33500	$\frac{7}{8}$	1.95340

Or si l'on suppose à présent que l'espace dont $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{p - 2n}$ est la fluxion, soit divisé en six parties par sept ordonnées également distantes les unes des autres, on aura les parties de la base y, comme il suit, $0 : \frac{1}{6} : \frac{2}{6} : \frac{3}{6} : \frac{4}{6} : \frac{5}{6} : \frac{6}{6}$, ou $0 : \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{5}{6} : 1$. En soustrayant les valeurs correspondantes de $2n$, de 4.49591, celle de p; & en divisant l'unité par les différences, on aura les valeurs des ordonnées correspondantes .22242 : .24033 : .26197 : .28938 : .31578 : .37698 : .45454. D'où en faisant la somme de la premiere & derniere égale à A, celle de la seconde & pénultieme B, celle de la troisieme & une pénultieme C, & la quatrieme D, on aura A = .6769, B = .61731, C = .58775, & D = .28938. En mettant ces valeurs dans l'expression générale des espaces terminés par sept ordonnées, qu'on a donnée dans une Table, où nous avons traité de la méthode des différences; sçavoir dans $\frac{41A + 216B + 27C + 272D}{840}R$, on trouvera 255.67247, pour le numérateur, parce que la base R est ici égale à l'unité; lequel étant divisé par le dénominateur 840, donne .30437; ce quotient étant multiplié par 6600, la valeur de r donnera enfin $x = AB = 2009$ pieds; ce qui excede de deux pieds seulement la valeur de cette abscisse trouvée ci-devant.

Exemple.

84. *L'on demande la valeur de la plus grande appliquée* BD.

Puisque $y = \frac{r y \dot{y}}{p - 2n}$, l'on voit qu'il ne faut que multiplier les ordonnées trouvées ci-dessus, par les valeurs correspondantes de y, pour avoir les ordonnées de cet espace, ou de la valeur de y; ce qui donne 0 : .040055 : .08732$\frac{2}{3}$: .14469 : .21718$\frac{2}{3}$: .31415 :

.45454, d'où l'on a A = .45454, B = .354205, C = .30451, & D = .14469 : en mettant ces valeurs dans l'expression générale ci-dessus, on aura 142. 7 2, pour le numérateur, qui étant divisé par le dénominateur 8405 donne .1699, & B D = y = 1121 pieds ; ce qui est précisément la même valeur trouvée ci-devant.

EXEMPLE.

85. *L'on demande la partie* BK *de la portée.*

Pour trouver la valeur de cette partie, il faut trouver auparavant la tangente y de l'angle en K, afin d'avoir la valeur de n. Pour cet effet, soit QN parallele à la base BK, & telle que la tangente y en N, soit l'unité. Cela posé, on se servira des équations $x = \frac{r\dot{y}}{p + 2n}$, $y = \frac{r y \dot{y}}{p + 2n}$, pour avoir DQ & QN, en supposant cinq ordonnées, ce qui donne 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, pour les valeurs de y : en divisant l'unité par la somme de la valeur de p, 4. 49559, & les valeurs correspondantes de $2n$, on aura .22244: .1999 : .18064: .16457 : .14725 ; ce qui donne A = 36969, B = .36447, C = .18064. Or ces valeurs étant mises dans l'expression générale $\frac{7A + 32B + 12C}{90}$ R, de l'espace compris par cinq ordonnées, on trouvera 16 .41855 pour le numérateur, qui étant divisé par le dénominateur 90, donne x, ou QN = r × .18294 = 1204 pieds.

A présent pour avoir la valeur de DQ, il faut multiplier chaque ordonnée trouvée ci-dessus par sa base, c'est-à-dire, par 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 ; ce qui donne 0 : .04997 : .09032 : .12342$\frac{3}{4}$: .14725, d'où l'on a A = 14725, B = .1733, & C = 09032 ; ces valeurs étant mises dans l'expression générale ci-dessus, donne 7. 66, qui étant divisé par le dénominateur 90, donne DQ = y = r × 0851 = 561. 66 pieds.

Il s'agit à présent de trouver une valeur de y, telle que l'espace que l'on trouve par le moyen de l'équation $y = \frac{r y \dot{y}}{p + 2n}$, soit égal à BQ ; car quand on aura trouvé cette valeur, il ne faut que l'ajouter à l'unité, qui est celle de y en N, pour avoir celle en K ; & ayant une fois cette derniere valeur, on trouvera aisément la différence entre QN & BK.

Ainsi en retranchant la valeur .0851, de 1699 la valeur de

BD, on aura BQ = .0848; laquelle étant divisée par la derniere ordonnée .14725, donne .577, ce qui doit être plus grand que la valeur de y, demandée: ainsi prenant .54, pour cette valeur, & en cherchant les valeurs de zn, qui correspondent à 1.27 & 1.54, on trouvera 3.1128, 4.0444, pour ces valeurs, lesquelles étant ajoutées à 4.49559 celle de p, & l'unité divisée par leurs sommes, donne .13143 & 11709, pour les ordonnées correspondantes.

La somme de l'ordonnée .14725, qui correspond à l'unité, & la derniere .11709 étant ajoutée à quatre fois la premiere .13143, & la somme multipliée par la base .54, donne .4266; pour le produit, qui étant divisé par 6, donne $x = r \times .0711 = 469.26$ pieds.

Or si l'on multiplie l'ordonnée .13143, par sa distance 1.27, & .11709, par la sienne 1.54, on aura .1669, & .1803; en ajoutant quatre fois l'ordonnée .1669 à la somme de .1803, & l'ordonnée .14725 correspondante à l'unité, on aura .995, qui étant multiplié par la base .54, & divisée par 6, donne 0895; ce qui ne différe de 0848 que de 0047, d'où l'on voit que la valeur supposé de y est un peu plus qu'elle ne devroit être.

En ajoutant la différence 469.26 pieds entre BK & QN, à la valeur 1204 pieds, on aura BK = 1673 pieds, & AK = 3682 pieds; ce qui différe de cinq pieds de cette valeur que nous avons trouvée par la premiere méthode.

Troisieme maniere pour résoudre les mêmes problêmes.

Nous avons donné une équation à la fin du 72me article, qui contient le rapport des abscisses & ordonnées, dont l'origine est au sommet D; mais en supposant $\frac{r}{cc} = n$, comme nous avons fait dans cet article, après avoir mis ry, & rx, au lieu de y & de x; il vaut mieux dans ce cas-ci, supposer $zcc = h$, & mettre hy & hx, au lieu de y & de x; & après avoir fait $\frac{h}{r} = n$, l'équation deviendra $y = x^2 + \frac{2n}{3} x^3 + \frac{1}{3} nn x^4 + \frac{2n^3 + 2n}{15} x^5 + e x^6 + f x^7$; en supposant $e = \frac{2n^4 + 14nn}{45}$, & $f = \frac{4n^5 + 128n^3 + 12n}{315}$. Il est à observer qu'on a été obligé de pousser cette suite plus loin que la premiere, parce que x devient négative dans la

montée, & les termes où l'exposant de x est impair, deviennent négatifs, ce qui fait que la suite ne converge pas si vîte que dans le premier cas.

EXEMPLE.

86. *Supposant la vîtesse en* A, *de 3000 pieds comme ci-devant, & l'angle d'élévation de 45 degrés aussi-bien que* $r = 6600$, *l'on demande la valeur de l'abscisse* AB, *qui corresponde à la plus grande appliquée* BD.

* Art. 77. Nous avons trouvé * 1468 pieds pour la vîtesse au sommet D, en négligeant les décimales, qui n'étoient d'aucunes conséquences dans ce cas, qui cependant deviennent nécessaires ici; ainsi cette vîtesse est de 1468 .1054 pieds; ce qui donne $h = 2936 .2\ 08$, & $n = .44488$, d'où l'on tire $n^2 = .19792$, $n^3 = .08805$, $n = .039171$, & $n^5 = .017426$.

Or si l'on change les signes des termes où l'exposant de x est un nombre impair, & que l'on prenne la fluxion de l'équation, on aura $\dot{y} = 2x - 2nx^2 + \frac{4}{3}nnx^3 - \frac{2n^3 + 2n}{3}x^4 + 6ex^5 - 7fx^6$; & comme $\dot{y}$ exprime la tangente de l'angle d'élévation en A, qui est de 45 degrés par supposition, on aura $\dot{y} = 1$; & en mettant les valeurs de n & de ses puissances, la derniere équation deviendra $1 = 2x - .88976\,x^2 + .26389\,x^3 - .35529\,x^4 + .377989\,x^5 - .13337\,x^6$; d'où en supposant six unités pour les premiers termes de la suite, on aura 1. 26536 : 1. 79608 : 2. 62141 : 3. 86988 : 5. 67825 : 8. 3142; & en divisant le pénultieme terme 5. 67825, par le dernier 8. 3142, on trouvera $x = .6829$; ce qui étant multiplié par 2936. 2108, la valeur de h, donne AB = 2005 pieds; ce qui ne différe que de deux pieds de cette distance que nous avons trouvée par la premiere maniere.

Pour sçavoir si la racine trouvée de l'équation ci-dessus est juste, il ne faut que mettre les valeurs .6829, .46635, .35847, .21748, .14852, .10142, de x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, dans cette équation, & on trouvera $\dot{y} = 1.00073$, ce qui est assez juste.

EXEMPLE.

87. *L'on demande la plus grande hauteur* BD, *à laquelle le corps monte.*

En mettant les valeurs de n & de ses puissances trouvées dans le dernier exemple dans l'équation $y = x^2 - \frac{2}{3} n x^3 + \frac{1}{3} nn x^4 - \frac{2n^3+2n}{5} x^5 + e x^6$, on aura $y = x^2 - .29658\ x^3 + .06597\ x^4 - .07106\ x^5 + .06331\ x^6$; & si l'on met les valeurs des puissances de x, trouvées ci-dessus, on trouvera $y = .382$; ce qui étant multiplié par 2936. 21, la valeur de h, donnera BD = 1121. 6 pieds; ce qui est précisément la même chose que ce que nous avons trouvé par les deux manieres précédentes.

EXEMPLE.

88. *Ayant la valeur de* BD, *l'on demande la partie* BK *de la portée.*

Comme $y = .382$ par le dernier article, on aura $.382 = x^2 + .29658\ x^3 + .06597\ x^4 + .07106\ x^5 + .06331\ x^6$, ou en divisant par .382, il viendra $1 = 26178\ x^2 + .77638\ x^3 + .172696\ x^4 + .18602\ x^5 + .16573\ x^6$, dont la racine quarrée est $1 = 1.6179x + .2399x^2 + .0356x^3 + .0522x^4 + .0507x^5$. Or en supposant cinq unités pour les cinq premiers termes de la suite, on aura 1. 9963, 3. 6082, 6. 4551, 11. 4833, 20. 4107; d'où en divisant le pénultieme terme 11. 4833 par le dernier 20. 4107, on trouvera $x = .5626$, qui étant multiplié par 2936. 21, la valeur de h, donne BK = .1652 pieds; & si à cette valeur on ajoute 2005 pieds, la partie AB, on aura AK = 3657 pieds, pour la portée entiere; ce qui différe de 30 pieds de ce que nous avons trouvé ci-devant: la cause de cette différence vient apparemment de ce que nous avons fait quelque faute dans le calcul numérique; mais nous n'avons pas le tems de l'examiner à présent, étant satisfait de ce que la méthode est juste: le lecteur est prié de prendre la peine de le corriger lui-même.

PROBLEME.

89. *La portée* AK, *& la vîtesse projectile en* A, *étant données, l'on demande le sinus de l'angle d'élévation.*

En supposant $y = 0$, dans l'équation * $y = ax - \frac{1}{2} n s s x^2 -$ &c. on aura $a = \frac{1}{2} nssx + \frac{1}{3} ns^3 x^2 + \frac{1}{4} n d x^3 + \frac{1}{5} n f x^4 +$ &c. & x exprimera la portée donnée dans ce cas. Or si l'on nomme le sinus de l'angle d'élévation z, son cosinus u, on aura $a = \frac{z}{u}$, $s =$ * Art. 72.

$\frac{1}{u}$; ces valeurs étant ſubſtituées, donnent $z = n \times$ par $\frac{x}{2u} + \frac{xx}{3uu} + \frac{2 - nz}{12u^3} x^3 + \frac{1 - 2nz}{15u^4} x^4$; d'où par le retour des ſuites, on aura $x =$

$$\frac{2z}{n} - \frac{8zz}{3nn} + \frac{40z^3}{9n^3} - \frac{448z^4}{27n^4} + \&c.$$
$$- \frac{z^3}{n} - \frac{32\ z^4}{3\ n^3} + \&c.$$
$$- \frac{8z^4}{15}.$$

Après avoir mis $1 - \frac{xx}{2} + \&c.$ au lieu de u, qui lui eſt égal par la propriété du cercle.

Ayant ainſi la valeur de x exprimée par le ſinus cherché, on trouvera la valeur du ſinus exprimé par x, & de ſes puiſſances, par le moyen du retour des ſuites, comme il ſuit

$$z = \frac{nx}{2} + \frac{nx^2}{3} + \frac{nx^3}{6} + \frac{nx^4}{3} + \&c.$$
$$+ \frac{n^3x^3}{16} + \frac{9n^3}{49} x^4 + \&c.$$

Or ſi l'on nomme A le ſinus de l'angle double de celui d'élévation, à cauſe que ce ſinus eſt égal à $2z - z^3 + \&c.$ en ſubſtituant ces valeurs priſes dans la derniere équation, on trouvera $A = nx + \frac{2}{3}nx^2 + \frac{1}{3}nx^3 + \frac{2}{3}nx^4 + \frac{1}{5}n^3x^4 + \&c.$

EXEMPLE.

90. *Suppoſant la même choſe, quant aux valeurs des lettres, que dans le 76me article, l'on demande le ſinus double de l'angle d'élévation.*

Comme on a trouvé $x = .5586$, $n = 1.1$, on aura $x^2 = .31203$, $x^3 = 17418$, $x^4 = .09735$: ces valeurs étant miſes dans la derniere équation, on aura $A = 1.00448$; ce qui s'accorde aſſez bien, puiſque l'angle d'élévation doit être de 45 degrés, & ſon double de 90, dont le ſinus eſt l'unité.

REMARQUE.

Voilà ce que nous nous étions propoſé de dire ſur l'art de jetter les bombes dans un milieu réſiſtant, parce qu'il ſemble que les autres hypotheſes ſur la réſiſtance ne ſe rencontrent que fort rarement dans la nature, du moins dans l'air; & il auroit été fort ennuyeux d'étendre une matiere ſi épineuſe que celle-ci, plus

plus qu'il n'est nécessaire : au reste, les exemples que nous venons de donner, suffisent pour éclaircir le sujet, & pour faire voir au lecteur, comment il faut s'y prendre dans d'autres cas qui pourroient se présenter.

Nous avons choisi les mêmes exemples dans les trois manieres différentes de résoudre les mêmes problêmes, afin d'être assurés qu'ils menent également au même but, & qu'ils s'accordent parfaitement bien ensemble : car quand on considere qu'il est presqu'impossible qu'on ne commette quelque petite erreur dans des calculs numériques aussi difficiles que ceux-là, on excusera aisément les petites différences qui se trouvent dans quelques-unes des parties.

Comme aucun Auteur que je sçache, n'a réduit ces problêmes au calcul numérique, qui est cependant nécessaire pour les pouvoir appliquer à la pratique, on espere que ce que nous venons de dire ne sera pas désapprouvé du public : nous aurions même été bien aises de comparer la théorie avec les expériences qu'on a faites sur ce sujet, si nous en avions eu le tems. Mais comme la partie de cet ouvrage est déja imprimée il y a long-tems, nous n'avons pas voulu en retarder plus long-tems la publication. Avant que de finir, il nous reste encore quelques problêmes sur le mouvement des pendules dans un milieu résistant, que nous allons exposer d'autant plus volontiers, qu'ils ont été donnés par le Chevalier Newton dans le second Livre de ses Principes, mais d'une maniere si obscure & si courte, que quelques Sçavans ont cru qu'il s'étoit trompé, quoique ce soient eux-mêmes, parce qu'ils se sont jettés dans des calculs très-embarrassans ; de sorte qu'il étoit presqu'impossible de ne se pas méprendre.

PROBLEME.

91. *Supposant qu'un corps a commencé son mouvement au point* E, *étant pressé par la force de gravité uniformément dans un milieu dont la résistance est comme le quarré des vîtesses, l'on demande la vîtesse dans un point quelconque* M *dans une courbe donnée ; & le tems que le corps emploie à décrire l'arc* EM.

Soient tirées EB & MP perpendiculaires à l'axe AB ; si l'arc $EM = z$, $BP = y$, on aura $v\dot{v} = P\dot{y} - R\dot{z}$ dans la descente, & $P\dot{y}\dot{z} + v\dot{v}\ddot{z} = 0$.

En mettant cette derniere valeur de $P\dot{y}$, & $\frac{vv}{r}$ pour R, dans

la premiere équation, on aura $v\dot{v} = -\frac{vv\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{vv\dot{z}}{r}$, ou $\frac{\dot{v}}{v} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = -\frac{\dot{z}}{r}$, dont la fluente est log. $\frac{v\dot{z}}{\dot{x}} = -\frac{z}{r}$, parce que $\dot{x}$ a été supposée constante : or il est nécessaire de diviser le premier membre de l'équation par cette quantité, afin de rendre les parties homogenes, ou en nommant q le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura $v\dot{z} = \dot{x}\, q^{-\frac{z}{r}}$: & comme $v\dot{t} = \dot{z}$, on trouvera $\dot{t} = \frac{\dot{z}^2}{\dot{x}}\, q^{\frac{z}{r}}$. Par conséquent la courbe étant donnée, la vîtesse & le tems seront déterminés, comme on va voir.

EXEMPLE.

92. Soit AME la moitié de la cycloïde ordinaire, ANB son demi-cercle générateur ; par la propriété de cette courbe, la corde AN est toujours parallele à la tangente en M. Ainsi si le diametre AB du cercle générateur est l'unité, & si PB $= y$, on aura PN $= \sqrt{y - yy}$, & AN $= \sqrt{1 - y}$, par la propriété du cercle : donc AN : PN, ou $1 : y^{\frac{1}{2}} :: \dot{z} : \dot{x} = \dot{z}\, y^{\frac{1}{2}}$. Cette valeur de $\dot{x}$ étant substituée dans celle des vîtesses & du tems, trouvée dans le dernier article, donne $v = y^{\frac{1}{2}}\, q^{-\frac{z}{r}}$, & $y^{\frac{1}{2}}\, \dot{t} = \dot{z}\, q^{\frac{z}{r}}$.

Dans un milieu sans résistance, la quantité r est infinie, & ainsi $q^{\frac{z}{r}} = 1$; & par conséquent on aura $v = y^{\frac{1}{2}}$, & $y^{\frac{1}{2}}\, \dot{t} = \dot{z}$ dans ce cas ; ce qui s'accorde avec ce qu'on trouve par le moyen des principes dans un milieu sans résistance.

PROBLEME.

93. *L'on demande la différence* mM, *entre les arcs décrits, dans la descente & dans la montée immédiate dans la cycloïde, lorsque la résistance est comme le quarré des vîtesses.*

Comme $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 + \dot{x}^2$, & $\dot{x} = \dot{z}\, y^{\frac{1}{2}}$, ou $\dot{x}^2 = y\,\dot{z}^2$, par l'article dernier ; ainsi $\dot{z}^2 = \dot{y}^2 + y\,\dot{z}^2$, d'où l'on tire $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - y}}$, dont la fluente est $z = 2\sqrt{1 - y}$, ou AM $=$ 2 AN ; & la moitié AME de la cycloïde est le double du diametre AB du cercle générateur.

Si à présent l'on nomme l'arc A M $= a$, l'arc A $m = v$, A P $= b$, & A $p = x$, à cause que $a = 2\sqrt{b}$, $v = 2\sqrt{x}$, on aura $aa - vv = 4b - 4x$, ou si M $m = z$, on aura $a - z = v$, ou $aa - 2az + zz = vv$; ainsi $\frac{2az - zz}{4} = b - x = y$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{2az - zz} = y^{\frac{1}{2}}$; en supposant P $p = y$, cette valeur de y étant substituée dans $\dot{v} = y^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{z}{r}}$, donne $v = \frac{1}{2}\sqrt{2az - zz} \times q^{-\frac{z}{r}}$. Or il est évident que le point de la courbe où la vîtesse est la plus grande, divise l'arc entier décrit dans une oscillation en deux parties égales : donc en faisant la fluxion de la vîtesse v égale à zero, on aura $\frac{a\dot{z} - z\dot{z}}{\sqrt{2az - zz}} - \frac{\dot{z}}{r}\sqrt{2az - zz} \times q^{-\frac{z}{r}} = 0$; & par conséquent $ar - rz = 2az - zz$, ou $-rz - 2az + zz = -ar$, dont la racine quarrée est $\frac{1}{2}r + a - z = \frac{1}{2}\sqrt{rr + 4aa} = \frac{1}{2}r + \frac{aa}{r} - \frac{a^4}{2r^3} +$ &c. ou $a - z = \frac{aa}{r} - \frac{a^4}{2r^3} +$ &c. Or ceci est la moitié de la différence entre les arcs décrits en descendant & en montant : en doublant cette valeur, on aura $\frac{2aa}{r} - \frac{2a^4}{r^3} +$ &c. pour la différence cherchée.

LEMME I.

94. En supposant $\dot{A} = \dot{z} z^{rn-1} v^{m-1}$, $\dot{B} = \dot{z} z^{rn+n-1} v^{m-1}$, & $v = e - fz^n$, on aura $ern\,A - \overline{r+m}, nfB = z^{rn} v^m$; ce qui a été démontré dans la premiere partie de cet ouvrage.

LEMME II.

95. Supposant $v = e - fz^n$, comme ci-dessus, il s'agit de trouver la fluente de $\dot{z} z^{rn-1} v^{m-1} \times 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} +$ &c. lorsque $v = 0$, ou $e = fz^n$.

Si A, B, C, D, &c. expriment les fluentes des termes dans l'ordre qu'ils sont placés, on aura $erA - \overline{r+m}, fB = \frac{1}{n} z^{rn} v^m$, & lorsque $v = 0$, on aura $B = \frac{erA}{f, \overline{r+m}}$; ou si $r + m = s$, on aura $B = \frac{erA}{fs}$.

Or r étant augmentée d'une unité dans chaque terme de la fluxion $\dot{z}z^{rn-1}v^{m-1} \times \overline{1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + \&c.}$ & le reste des quantités demeurant les mêmes; si l'on met $r+1, s+1, \& r+2, s+2,$ &c. dans $B = \frac{er}{fs} A$; alors les termes A & B, deviendront successivement les termes B, C, D, &c. sçavoir, $\frac{e}{f} \times \frac{1+r}{1+s} B = C$, $\frac{e}{f} \times \frac{2+r}{2+s} C = D$; ainsi en mettant la valeur de B dans celle de C, & celle de C dans celles de D, elles deviendront $\frac{ee}{ff} \times \frac{r \times \overline{1+r}}{s \times \overline{1+s}}$ $A = C$, & $\frac{e^3}{f^3} \times \frac{r \times \overline{1+r} \times \overline{2+r}}{s \times \overline{1+s} \times \overline{2+s}} A = D$. Par conséquent la fluente cherchée sera A $\times$ par $1 + \frac{re}{sf} + \frac{ee}{ff} \times \frac{r \times \overline{1+r}}{s \times \overline{1+s}} + \frac{e^3}{f^3} \times \frac{r \times \overline{1+r} \times \overline{2+r}}{s \times \overline{1+s} \times \overline{2+s}} +$ &c. Comme la loi de cette suite est connue, elle peut être continuée à volonté.

PROBLEME.

96. *L'on demande le tems d'une oscillation complette dans une cycloïde, lorsque la résistance est comme le quarré des vîtesses.*

Si a exprime la longueur de l'arc de la cycloïde décrite, comme $y = \frac{1}{2}\sqrt{2az - zz}$, & $\dot{t} = \frac{\dot{x}}{y^{\frac{1}{2}}}$, on aura $\dot{t} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{az - zz}}$, ou à cause que $q^{\frac{z}{r}} = 1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{2rr} + \frac{z^3}{6r^3} +$ &c. on a $\dot{t} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{az - zz}}$ $\times \overline{1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{2rr} + \frac{z^3}{6r^3} + \&c.}$

Mais il est clair que lorsque $z = a$, la fluente de cette fluxion exprime le tems d'une oscillation entiere, & que la fluente de $\frac{2\dot{z}}{\sqrt{az - zz}}$ exprime la circonférence du cercle dont le diametre est l'unité.

Or si l'on compare cette fluxion avec la formule générale ci-dessus $\dot{z}z^{rn-1} \times \overline{e - fz^n}^{m-1}$, on aura $n = 1$, $rn - 1 = -\frac{1}{2}$, $m - 1 = -\frac{1}{2}$, ou $r = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $r + m = s = 1$, $f = 1$, & $a = e$. Par conséquent la fluente du dernier article deviendra

$A \times \overline{1 + \frac{a}{2r} + \frac{3aa}{16rr} + \frac{5a^3}{96r^3} + \&c.}$ lorſque A exprime la circonférence de cercle dont le diametre eſt l'unité.

COROLLAIRE.

97. Delà il ſuit (puiſque A exprime le tems d'une oſcillation d'un pendule qui décrit une cycloïde dans un milieu ſans réſiſtance, & $A \times \overline{1 + \frac{a}{2r} + \&c}$, celui lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré des vîteſſes) que la différence de ces tems ſera comme $A \times \frac{a}{2r}$, à peu près, c'eſt-à-dire, comme l'arc décrit ; ce qui s'accorde avec ce que le Chevalier Newton a dit dans la propoſition 27, livre 2 de ſes principes ; & par conſéquent ce que M. Simpſon rapporte dans ſon Eſſai, page 74, n'eſt pas juſte ; car il dit que cette différence eſt comme le quarré de l'arc.

PROBLEME.

98. *Si un pendule qui fait ſes oſcillations dans une cycloïde, eſt retardé dans la raiſon des vîteſſes, l'on demande le tems d'une oſcillation.*

Comme nous avons $v\dot{v} = -\frac{vv\ddot{z}}{\dot{z}} - \frac{v\dot{z}}{r}$ dans ce cas, ou $\dot{v}\dot{z} + v\ddot{z} = -\frac{\dot{z}^2}{r}$; en diviſant par la conſtante $\dot{x}$, on aura $\frac{\dot{v}\dot{z} + v\ddot{z}}{\dot{x}} = -\frac{\dot{z}^2}{r\dot{x}}$, dont la fluente eſt $\frac{v\dot{z}}{\dot{x}} =$ fluente $-\frac{\dot{z}^2}{r\dot{x}}$. Or ſi a exprime l'arc entier décrit, on aura $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{2}{\sqrt{az - zz}}$, & $\frac{\dot{z}^2}{r\dot{x}} = \frac{2\dot{z}}{r\sqrt{az - zz}}$; cette derniere eſt la fluxion d'un arc de cercle dont le diametre eſt l'unité, & ſon ſinus eſt z : donc ſi l'on nomme m cet arc, & c la circonférence entiere du même diametre, la fluente complete ſera $\frac{c - m}{r}$, & ainſi $\frac{v\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{c - m}{r}$, ou $v = \frac{\dot{x}}{\dot{z}} \times \frac{c - m}{r}$; & comme on a $\dot{t}v = \dot{z}$, il viendra $\dot{t} = \frac{r\dot{z}^2}{\dot{x} \times \overline{c - m}}$, ou à cause que $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{2}{\sqrt{az - zz}}$, on aura $\dot{t} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{az - zz}} \times \frac{r}{c - m}$; mais $\dot{m} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{az - zz}}$: donc $\dot{t} = \frac{r\dot{m}}{c - m}$, dont la fluente eſt $t = r \times \log. \frac{1}{c - m}$.

Or lorſque $m = 0$, ce logarithme devient une quantité

constante & indépendante de l'arc décrit. Par conséquent les tems seront égaux dans ce cas, aussi-bien que dans un milieu sans résistance ; ce qui confirme la 26me proposition du second Livre des principes du Chevalier Newton.

PROBLEME.

99. *L'on demande le tems lorsque la résistance est uniforme, le reste étant de même que ci-dessus.*

Supposant la résistance exprimée par r, on aura $v\dot{v}y = \dot{y} - r\dot{z}$, dont la fluente est $vv = 2y - 2rz$; & comme $\frac{az - zz}{4} = y$, par la propriété de la cycloïde, en mettant cette valeur de y dans celle de vv, il viendra $vv = \frac{az - zz}{2} - 2rz$, ou en faisant $a - 4r = b$, on aura $v = \sqrt{\frac{bz - zz}{2}}$; & par conséquent $v\dot{t} = \dot{z}$, donne $\dot{t} = \frac{\dot{z}\sqrt{2}}{\sqrt{az - zz}}$; dont la fluente, lorsque $b = z$, est la circonférence d'un cercle dont le diametre est l'unité. Par conséquent les tems sont égaux, quoique les arcs décrits soient grands ou petits.

Comme les pendules qui sont bien faits, ne décrivent que des forts petits arcs, & que leur mouvement est sensiblement égal, la résistance qu'ils rencontrent doit être uniforme, & de peu de chose : ainsi il me paroît fort inutile de considérer la résistance lorsqu'on fait des expériences sur la longueur des pendules à secondes, comme quelques Auteurs modernes ont fait. Tout ce qu'on pourroit dire, est que cette longueur sera de quelque chose de plus qu'elle ne devroit être ; mais la différence doit être très-peu de chose.

Fin du Traité du Mouvement.

D E M F S R T B P A

E B 5 M N P m p A

D M a C F A m n 9

B N D M 10 a C P A

B 13 b C a A

R N M a 14 Q P A

D 17. P B M L A

A

LETTRE

De M. Clairaut à M. Saverien. (1)

Je vous remercie, Monsieur, de la bonté que vous avez eue de me communiquer les réflexions de M. Muller sur ma théorie de la figure de la Terre. Quoiqu'elles ne me paroissent pas de nature à faire impression sur les lecteurs qui entendent la matiere, je profiterai cependant de l'offre que vous m'avez faite de faire imprimer ma réponse à la suite de ses objections, afin que l'air d'assurance avec lequel il les présente, n'en impose pas à ceux qui n'ont pas fait d'étude particuliere de la question de la figure de la Terre.

L'article de mon ouvrage que M. Muller attaque, est, comme vous l'avez vu, celui où j'examine la figure que la Terre doit prendre dans l'hypothese de l'attraction Newtoniene lorsque toutes les parties sont supposées homogenes.

Il est étonné que j'aye regardé comme une vérité difficile à démontrer que cette figure doit être celle de l'ellipse d'Apollonius ; & pour justifier son étonnement, il le démontre ainsi en peu de lignes.

Si l'on considere, comme l'a fait M. Newton, que les parties d'un fluide sont attirées vers un point fixe avec des forces égales à des distances égales de ce point, ce fluide formera une sphere. Supposez cette sphere tourner autour de son axe avec une certaine vîtesse comparable à celle produite par la force centripete, les rayons de cercles paralleles à l'équateur s'alongeront proportionnellement à leur longueur : cela étant, voilà l'ellipse démontrée ; & si le Chevalier Newton ne l'a pas démontrée lui-même, c'est qu'il l'a cru si simple & si palpable, que cela doit sauter aux yeux de tout le monde.

(1) Nous croyons entrer dans les vues de M. *Muller*, dont la candeur & l'habileté nous sont également connues, en insérant ici la réponse de M. *Clairaut* à quelques objections qu'il y a dans cet Ouvrage contre sa théorie de la figure de la Terre. En pareil cas, M. de *Montmort* fit imprimer à la fin de son Analyse des Jeux de Hazards, les Lettres que M. *Bernoulli* lui avoit écrites contre cette Analyse ; & il croyoit que sa gloire & le succès de son Ouvrage étoient interessés à cette publication. Ce seroit, sans doute, faire injustice à M. *Muller*, que de ne lui pas attribuer les mêmes sentimens.

Ce qui me paroît sauter aux yeux de tout le monde, c'est qu'il n'y a pas dans cet argument le moindre germe de la vraie théorie du sujet. Que peut entendre M. Muller par une vîtesse comparable à celle produite par la force centripete ? Cette force ne produit de vîtesse que lorsque le corps sur lequel elle agit est abandonné à son impulsion. Ici toutes les parties du fluide se tiennent, & n'ont point de chûte. D'ailleurs, quel sens donne-t'il au mot comparable ? Veut-il désigner de l'égalité par ce mot, ou seulement que l'une des vîtesses n'est pas infinie par rapport à l'autre ? Mais prêtons-nous à l'idée de cet Auteur, & supposons-lui une théorie qui montre que la rotation tend à alonger tous les paralleles proportionnellement à leur longueur, afin de changer le globe en sphéroïde. Qu'il nous dise donc en même tems où il prendra la matiere que cet alongement demande. La rotation ne peut certainement pas le produire. Ne voit-on pas que lorsqu'on vient à faire tourner le globe, il faut qu'il se déprime vers les poles, pendant qu'il s'éleve à l'équateur ? Et comment donc *la vîtesse comparable à celle produite par la force centripete*, diminuera-t'elle quelques-uns des rayons pendant qu'elle alongera les autres ?

Au reste, quel est le Géometre, autre que M. Muller, qui ait cru pouvoir démêler la maniere avec laquelle le fluide est parvenu à l'équilibre en tournant ? Huygens, Newton, & tous ceux qui ont traité des figures des Planetes, n'ont jamais cherché qu'à faire voir comment l'équilibre pouvoit subsister avec telle ou telle figure ; mais ils n'ont point entrepris de calculer les oscillations infinies qui ont dû avoir lieu avant que la masse soit parvenue à un état permanent. Il falloit donc, pour que la vérité à démontrer fût aussi palpable que le prétend M. Muller, qu'il trouvât une maniere simple de faire voir qu'en chaque point du méridien elliptique, la direction de la pesanteur qui résultoit de l'attraction totale & de la force centrifuge, étoit nécessairement perpendiculaire à la superficie, ou, s'il aimoit mieux, que l'équilibre des colonnes quelconques de fluide avoit lieu dans la forme elliptique. Pour moi, je me console de n'avoir pu trouver qu'avec peine cette démonstration, lorsque Messieurs Maclaurin, Simpson & Stirling n'y sont parvenus que par des méthodes qui sont aussi compliquées que la mienne. La supériorité de M. Muller sera bien établie lorqu'il aura résolu la question par une voie aussi courte que celle qu'il a employée, mais il faudra que ce soit en effet une solution. En

En attendant qu'il nous en donne une, voyons s'il attaque avec plus de ſuccès le calcul par lequel j'ai déterminé les axes de la Terre. Voici comme il l'a compris.

Il croit qu'après avoir ſuppoſé que le rapport de la force centrifuge à la gravité ſous l'équateur, eſt celui de 1 à 289, & en avoir conclu pour les axes un rapport de $231\frac{4}{10}$ à $230\frac{4}{10}$ différent de celui qui avoit été trouvé avant moi, j'abandonne en conſéquence ma ſuppoſition, & que je prends tout ſimplement & pour ma commodité, le rapport déja connu de 230 à 231 : que je trouve enſuite par un long circuit l'expreſſion $\frac{10}{28752}$ de la force centrifuge qui étoit impliquée dans le rapport de 231 à 230 que j'avois pris gratuitement pour les axes ; enſorte que je ne fais, ſuivant lui, que ſuppoſer la choſe en queſtion & y ajouter du verbiage.

Mais ſi M. Muller étoit entré le moins du monde dans l'eſprit du problême, qu'il eût même celui des méthodes d'approximations (ſi néceſſaire pour un Auteur qui enſeigne la méthode des fluxions,) il eût vu que ce long circuit, qu'il me reproche d'employer pour déterminer la force centrifuge, n'avoit pas une ligne de trop en partant des élémens qui étoient donnés.

Si j'avois eu par obſervation la meſure de degré de l'équateur & la longueur du Pendule à ſecondes au même lieu, la valeur de la force centrifuge qui en auroit réſulté m'auroit donné immédiatement le rapport des axes par ma formule : mais au défaut des meſures actuelles de ces quantités, j'étois réduit à les conclure des meſures de même eſpece que j'avois, & ſur l'exactitude deſquelles je devois le plus compter, leſquelles étoient la longueur du Pendule à ſecondes, déterminée à Paris par M. de Mairan, & le degré meſuré au Nord. A la vérité, l'opération qu'il falloit employer pour paſſer de ces élémens à ceux dont j'avois beſoin, demandoit que l'on connût au moins à peu près le rapport des axes. C'eſt ce qui fait que j'ai commencé par une premiere détermination de ce rapport dans laquelle j'ai négligé toutes les petites quantités qui pourroient l'être en pareil cas ; je me ſuis contenté, par exemple, de faire la force centrifuge égale à $\frac{1}{289}$ de la gravité, ainſi qu'on le trouveroit ſi l'on négligeoit entiérement la ſphéroïdicité de la Terre. Subſtituant alors la fraction $\frac{1}{289}$ à la place de ϕ dans la formule $\delta = \frac{5}{4}\phi$, j'ai eu pour δ la fraction $\frac{1}{230\frac{4}{10}}$, dans laquelle j'ai négligé les $\frac{4}{10}$, non

comme M. Muller se l'est imaginé, pour me conformer au rapport déterminé par M. Maclaurin; mais parce que les fractions étoient inutiles dans la premiere détermination. J'aurois pu même, si j'avois voulu, prendre le rapport $\frac{1}{229}$ que Newton avoit trouvé par une approximation moins rigoureuse que la mienne, & arriver également à mon second résultat; mais il étoit bien plus simple de n'emprunter la premiere valeur du rapport cherché, que de la même méthode qui en pouvoit donner une seconde plus exacte, & même une troisieme, quatrieme, &c. si l'on vouloit pousser plus loin la rigueur du calcul.

Dès que j'ai eu une valeur de δ, il m'a été facile, au moyen des formules données dans les pages 193 & 194 de mon Ouvrage, de rendre la valeur de φ suffisamment exacte, pour que celle de δ qui en résultoit fût aussi voisine de la vraie qu'il étoit possible d'en approcher dans une seconde opération. Cette valeur de φ ainsi corrigée, s'est trouvée $\frac{1}{287,52}$; & comme j'y suis parvenu par les formules essentielles au problême, & non par un cercle vicieux, comme se l'est imaginé M. Muller, le rapport des axes que donne la substitution de cette valeur de φ dans l'équation entre φ & δ, fournit une valeur de δ qui ne dépend point d'aucune supposition gratuite, & sur l'exactitude de laquelle aucun Géometre ne sçauroit avoir de plus grand scrupule que celui d'avoir négligé les troisiemes puissances des très-petites quantités φ & δ, scrupule qu'il seroit aisé de lever par une troisieme opération, mais que personne ne jugera nécessaire, pas même M. Muller, qui ne s'est pas douté seulement que l'on pût pousser l'exactitude jusqu'aux secondes puissances.

Au reste, ce qui a pu lui faire prendre tellement le change, en examinant ma solution, c'est que le résultat de ma seconde opération ne s'écarte presque point du tout de la fraction $\frac{1}{230}$ que j'avois tiré de la premiere, mais ce n'est pas ma faute si ce premier résultat s'étoit trouvé si près du but. C'en auroit été une très-réelle que j'aurois commise, si j'avois cru le rapport $\frac{1}{230}$ plus exact que le rapport $\frac{1}{229}$, avant d'avoir employé une approximation plus rigoureuse que celle qu'avoit employé Newton en déterminant ce dernier. Au reste, si M. Muller trouve que j'ai fait trop de frais pour déterminer la proportion des axes, qu'il enseigne un chemin plus court, comme il a voulu faire pour la détermination de la nature du méridien, mais que ce soit un chemin par lequel on arrive

Quelques considérables que soient les deux méprises de M. Muller dont je viens de parler, il finit ses objections par une troisieme erreur qui étonnera davantage ceux qui ont la plus légere teinture de la question.

Pour être fondé à rejetter le rapport de 230 à 231, que Messieurs Maclaurin, Simpson & moi avons prétendu être celui des axes de la Terre dans la supposition de l'homogénéité de ses parties, il employe un raisonnement dans lequel il confond entiérement ce que la théorie seule fait conclure de suppositions qui n'ont peut-être pas lieu dans la nature, avec ce que l'on tire de mesures actuelles qui sont indépendantes de toute théorie.

Qu'on jette les yeux, dit-il, *sur la page 194 de la figure de la Terre, où M. Clairaut trouve le degré du méridien sous l'équateur de 57309 toises, ce qui surpasse ce même degré mesuré par Messieurs Bouguer & de la Condamine, de 556 toises; s'il admet que ses Confreres se soient si fort trompés dans leurs mesures, que doit-on croire des mesures du Nord auxquelles il étoit lui-même employé!*

Que M. Muller sçait confondre de choses en peu de mots! Il m'attribue d'abord d'avoir conclu le degré du méridien à l'équateur de 57309. Mais s'il m'avoit seulement lu, il auroit vu que c'est du degré de l'équateur même dont je parle; & pouvois-je parler d'un autre cercle que de celui qui sert à mesurer la force centrifuge? Or les 57309 toises que je suppose au degré de l'équateur, ne s'écartent que de 45 toises des 57309 donnés par M. Bouguer pour ce même degré.

Mais la différence de 556 toises que M. Muller a cru voir si mal à propos, existât-elle, il n'y auroit rien à en conclure contre ma solution. Pourquoi faut-il que le degré de l'équateur que je déduis du degré mesuré au Nord, & de la supposition que la terre est homogene, soit le même que le degré qui résulte de mesures actuelles. Jetterois-je le moindre doute sur l'opération de mes Confreres, ou sur celle à laquelle j'ai eu part, en faisant voir que ces deux opérations ne donnoient pas à la terre l'applatissement que l'homogénéité des parties demanderoit?

Je ne peux pas croire que M. Muller m'eût attaqué si injustement, & se fût si fort égaré dans toute cette question, s'il l'eût examinée de sens froid. Mais qui peut l'en avoir tiré? Seroit-ce le reproche que je semble faire à Newton de n'avoir pas suivi dans ses recherches sur la figure de la Terre, une méthode

auſſi rigoureuſe que dans les autres ſujets qu'il a traités ? Il n'y avoit rien-là, ce me ſemble, qui dût bleſſer M. Muller : & d'ailleurs ceux qui ſe croiroient le plus intéreſſés à la gloire de Newton, ne pourroient pas être choqués le moins du monde de la maniere dont je préſente mes objections contre le ſentiment de ce grand homme.

J'ai l'honneur d'être parfaitement, Monſieur, votre très-humble & très-obéïſſant ſerviteur,

CLAIRAUT.

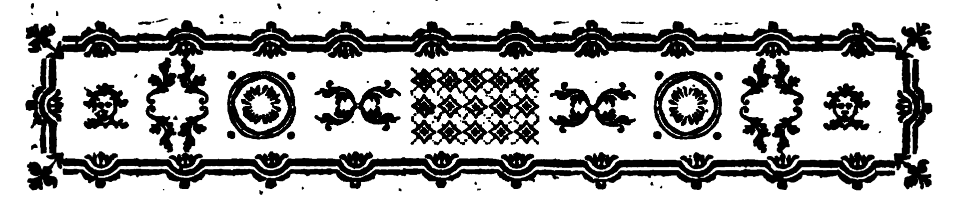


TABLE DES MATIERES

Contenues dans cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

DES SECTIONS CONIQUES.

PROB.

LIVRE SECOND.

Des Fluxions.

SECTION PREMIERE.

LIVRE TROISIEME.

Des Fluentes.

SECTION PREMIERE.

TRAITÉ DES QUADRATURES.

TRAITÉ DU MOUVEMENT

DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

DES NOYAUX OU VUIDES DANS LES PLANETES.

TRAITÉ DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU QUELCONQUE.

SECONDE PARTIE.

Seconde maniere de résoudre les mêmes Problêmes par la méthode des différences.

Troisieme maniere de résoudre les mêmes Problêmes.

Fin de la Table.

